



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
и ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

Г.А. КУЗЬМИНА
Т.А. ТРОФИМОВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ,
РАСЧЕТ
И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ВОЛНОВОДНЫХ
И РЕЗОНАТОРНЫХ
УСТРОЙСТВ СВЧ

МОСКВА-1985

538/075
1083

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

Г.А. КУЗЬМИНА, Т.А. ТРОФИМОВА

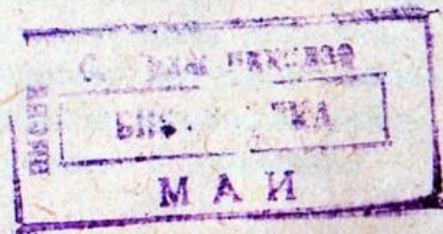
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ВОЛНОВОДНЫХ И РЕЗОНАТОРНЫХ
УСТРОЙСТВ СВЧ

Учебное пособие

Под редакцией канд.техн.наук доц. В.С. Филиппова

Для дневной и вечерней форм обучения

Утверждено
на заседании редсовета
21 июня 1984 г.



МОСКВА 1985

УДК: 573.876.4.+62I.372.8+ 62I.372 (075.8)

538(075)

К 893

Кузьмина Г.А., Трофимова Т.А. Математическое моделирование, расчет и проектирование волноводных и резонаторных устройств СВЧ: Учебное пособие/Под ред. В.С. Филиппова. - М.: МАИ, 1985. - 95 с., ил.

Данное учебное пособие предназначено для студентов второго курса, изучающих дисциплину "Специальные главы физики", в которой рассматривается классическая электродинамика и основы теории распространения радиоволн по естественным трассам. В пособии излагаются методы решения краевых задач для волноводов и резонаторов, теория возмущения волноводов заданными источниками и методы решения граничных задач для неоднородностей в волноводах, включая пространственный волновод.

Предполагается, что данное учебное пособие будет использоваться при проработке лекционного материала, подготовке к практическим занятиям и выполнении курсовой работы.

Рецензенты: В.М. Свистов, В.П. Тарасов, В.В. Чебышев

© Московский авиационный институт, 1985 г.

Глава 1. ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

1.1. НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ И НАПРАВЛЯЕМЫЕ ВОЛНЫ

При осуществлении любой радиосистемы возникает необходимость передачи электромагнитной энергии от передатчика к передающей антенне и от приемной антенны к приемнику. Передача энергии в таких случаях должна осуществляться в требуемом направлении с достаточно высокой степенью локализации.

Для этой цели используют направляющие системы в виде металлических проводов и труб, металлических стержней, покрытых диэлектриком, диэлектрических стержней и др. Направляющие системы называют также линиями передачи.

На рис. 1.1 и 1.2 изображен ряд используемых на практике линий передачи: двухпроводная линия (рис. 1.1,а), экранированная двухпроводная линия (рис. 1.1,б), коаксиальная линия (рис. 1.1,в), полосковая линия (рис. 1.1,г), прямоугольный волновод (рис. 1.2,а), круглый волновод (рис. 1.2,б), металлическая поверхность, покрытая слоем диэлектрика (рис. 1.2,в), ребристая структура (рис. 1.2,г).

Электромагнитное поле распространяется вдоль этих линий передачи в виде направляемых волн. Направляемые волны являются плоскими неоднородными волнами, так как пространство, в котором происходит распространение, неоднородно.

В общей теории линий передачи рассматриваются регулярные линии передачи, или направляющие системы. Направляющая система называется регулярной, если она прямолинейна и ее поперечное сечение неизменно по длине.

Основными требованиями, которым должна удовлетворять направляющая система, являются: простота конструкции, дешевизна, малые масса и габариты, малый коэффициент затухания, обеспечивающий высокий КПД, обеспечение передачи заданной мощности без электрического пробоя и температурного перегрева (обеспечение электрической прочности).

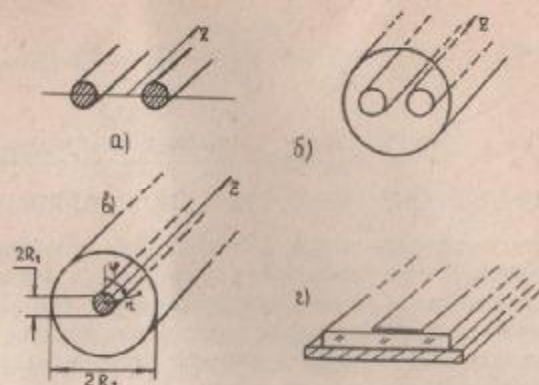


Рис. 1.1

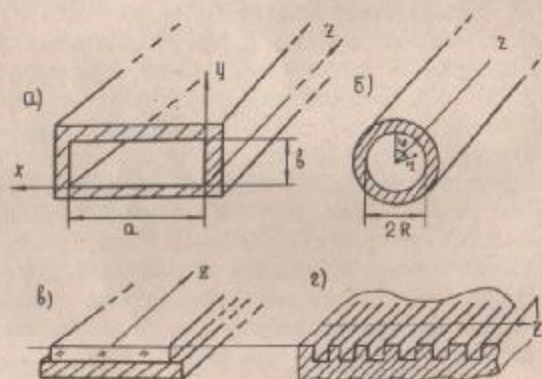


Рис. 1.2

В различных диапазонах волн этим требованиям удовлетворяют различные линии передачи.

Рассмотрим некоторые из перечисленных выше линий передачи. Наиболее простой направляющей системой является открытая двухпроводная линия. Направляемая волна в такой системе распространяется в пространстве, окружающем провода. Для то-

го чтобы излучение двухпроводной линии было невелико, необходимо, чтобы расстояние между проводами было много меньше длины волны. Такие открытые двухпроводные линии находят применение на волнах длиннее 1 м. На более коротких волнах для уменьшения потерь на излучение необходимо уменьшать расстояние между проводами, что приводит к снижению электрической прочности. Если проводники линии окружить экраном (рис. 1.1, в), то влияние окружающих предметов и излучение будут резко ослаблены. КПД такой линии более высокий.

Более простую конструкцию имеет коаксиальная линия (рис. 1.1, б). Она обладает всеми достоинствами экранированной двухпроводной линии и применяется вплоть до длинноволновой части сантиметрового диапазона волн.

В последние годы широко используются (вплоть до сантиметрового диапазона волн) полосковые линии, занимающие промежуточное положение между открытыми и экранированными линиями. Основные достоинства полосковых линий — технологичность конструкции, малые масса и габариты. К недостаткам полосковых линий относятся малая электрическая прочность и большие потери в сантиметровом диапазоне волн.

Для перехода к более коротким волнам поперечные размеры перечисленных направляющих систем приходится уменьшать для сохранения в них пучковой структуры волн. Поперечные размеры проводников уменьшаются, и вследствие поверхностного эффекта их сопротивление резко возрастает. Кроме того, при уменьшении расстояния между проводами ухудшается электрическая прочность линии передачи. Поэтому для передачи электромагнитной энергии сантиметровых и более коротких волн применяют металлические трубы, называемые радиоволноводами или просто волноводами (рис. 1.2, а и б).

Электромагнитные волны распространяются внутри волноводов. Поперечное сечение волноводов может быть различным. По сравнению с коаксиальными и полосковыми линиями волноводы обладают меньшими потерями и значительно более высокой электрической прочностью.

В сантиметровом и миллиметровом диапазоне волн применяются диэлектрические волноводы в виде сплошных диэлектрических стержней. Электромагнитное поле волны в таком волноводе существует как внутри, так и вне стержня. Вне стержня поле быстро убывает в поперечном направлении.

Другим типом направляющей системы является линия передачи поверхностных волн, представляющая собой проводящую поверхность со слоем диэлектрика (рис. 1.2, в) или проводящую

ребристую поверхность, вдоль которой распространяется направляемая волна (рис. 1.2, г).

В настоящее время осваиваются субмиллиметровый и оптический диапазоны. Для этих диапазонов создаются направляющие системы, использующие оптические принципы, например, линзовые волноводы.

Электромагнитные волны, которые распространяются в направляющих системах, в отличие от волн в безграничной среде, кроме волновых уравнений, должны удовлетворять еще и граничным условиям на направляющих поверхностях. Поэтому структура поля определяется формой направляющих поверхностей.

1.2. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

Направляемые волны распространяются в направляющих системах и являются плоскими неоднородными волнами.

Рассмотрим регулярную направляющую систему, свойства которой неизменны в одном прямолинейном направлении, с которым совместим ось x . В пространстве между проводниками направляющей системы, где токи и заряды отсутствуют, векторы \vec{E} и \vec{H} монохроматического электромагнитного поля удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0; \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad (1.2)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ — коэффициент распространения в среде, заполняющей направляющую систему.

Будем искать частные решения этих уравнений для случая электромагнитных волн, бегущих вдоль положительного направления оси x . Обозначим коэффициент распространения направляемой волны β , тогда зависимость векторов \vec{E} и \vec{H} от координаты x примет вид

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi, \eta) e^{-i\beta x}; \quad (1.3)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\xi, \eta) e^{-i\beta x}, \quad (1.4)$$

где ξ, η — координаты поперечного сечения линии передачи.

Выбор конкретной системы координат зависит от формы поперечного сечения линии. Подставляя (1.3) в (1.1) и (1.4) в (1.2), получаем систему из двух векторных уравнений:

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{E} + (k^2 - \beta^2) \vec{E} = 0; \quad (1.5)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{H} + (k^2 - \beta^2) \vec{H} = 0. \quad (1.6)$$

При переходе от (1.1) и (1.2) к (1.5) и (1.6) учтено, что $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -\beta^2 \vec{E}$, $\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = -\beta^2 \vec{H}$. Кроме того, в (1.5) и (1.6) двумерный оператор Лапласа обозначен как ∇_{\perp}^2 и в прямоугольной системе координат

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

В цилиндрической системе координат

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.8)$$

В уравнениях (1.5) и (1.6) введем обозначение

$$q^2 = k^2 - \beta^2 \quad (1.9)$$

и назовем q поперечным волновым числом. Тогда волновые уравнения для векторов \vec{E} и \vec{H} направляемой волны примут вид

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{E} + q^2 \vec{E} = 0 \quad (1.10)$$

и

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{H} + q^2 \vec{H} = 0. \quad (1.11)$$

Каждое из уравнений (1.10) и (1.11) эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые в прямоугольной системе координат будут записаны в виде:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \dot{E}_x + q^2 \dot{E}_x &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 \dot{E}_y + q^2 \dot{E}_y &= 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \dot{E}_z + q^2 \dot{E}_z &= 0; \\ \nabla_{\perp}^2 \dot{H}_x + q^2 \dot{H}_x &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 \dot{H}_y + q^2 \dot{H}_y &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 \dot{H}_z + q^2 \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ниже будет показано, что для определения поля направляемых волн достаточно решить скалярные волновые уравнения только для \dot{E}_x (1.12) и \dot{H}_x (1.13). Поперечные составляющие векторов поля могут быть выражены через продольные составляющие \dot{E}_x и \dot{H}_x .

1.3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОПЕРЕЧНЫМИ И ПРОДОЛЬНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

Для получения связи между продольными и поперечными составляющими направляемой волны воспользуемся первым и вторым уравнениями Максвелла при условии, что сторонний ток равен нулю. Учтем также, что $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -i\vec{r}\vec{E}$, $\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = -i\vec{r}\vec{H}$. Тогда уравнения Максвелла для комплексных амплитуд примут вид

$$\text{I. } \text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_a \vec{E} \quad \text{II. } \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H}.$$

В координатной форме записи:

$$\left. \begin{aligned} \text{(Ia)} \quad \frac{\partial}{\partial y} \dot{H}_x + i\vec{r}\dot{H}_y &= i\omega\epsilon_a \dot{E}_x, \quad \text{(IIa)} \quad \frac{\partial}{\partial y} \dot{E}_x + i\vec{r}\dot{E}_y = -i\omega\mu_a \dot{H}_x, \\ \text{(Ib)} \quad -i\vec{r}\dot{H}_x - \frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_z &= i\omega\epsilon_a \dot{E}_y, \quad \text{(IIb)} \quad -i\vec{r}\dot{E}_x - \frac{\partial}{\partial x} \dot{E}_z = -i\omega\mu_a \dot{H}_y, \\ \text{(Iв)} \quad \frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_y - \frac{\partial}{\partial y} \dot{H}_x &= i\omega\epsilon_a \dot{E}_z, \quad \text{(IIв)} \quad \frac{\partial}{\partial x} \dot{E}_y - \frac{\partial}{\partial y} \dot{E}_x = -i\omega\mu_a \dot{H}_z. \end{aligned} \right\}$$

Из уравнений (Ia) и (IIb) с учетом (1.9) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -i\frac{\vec{r}}{g^2} \frac{\partial}{\partial x} \dot{E}_x - i\frac{\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial}{\partial y} \dot{H}_x; \\ \dot{H}_y &= -i\frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} - i\frac{\vec{r}}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из уравнений (IIa) и (Ib):

$$\begin{aligned} \dot{E}_y &= -i\frac{\vec{r}}{g^2} \frac{\partial}{\partial y} \dot{E}_x + i\frac{\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_x; \\ \dot{H}_x &= i\frac{\omega\epsilon_a}{g^2} \frac{\partial}{\partial y} \dot{E}_x - i\frac{\vec{r}}{g^2} \frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_z. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Представим векторы \vec{E} и \vec{H} в виде суммы поперечного и продольного векторов:

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{x}_0 \dot{E}_x, \quad \vec{H} = \vec{H}_\perp + \vec{x}_0 \dot{H}_x, \quad (1.16)$$

где в прямоугольной системе координат: $\vec{E}_\perp = \vec{x}_0 \dot{E}_x + \vec{y}_0 \dot{E}_y$, $\vec{H}_\perp = \vec{x}_0 \dot{H}_x + \vec{y}_0 \dot{H}_y$ (\vec{E}_\perp и \vec{H}_\perp — поперечные векторы).

Тогда связь между поперечными векторами и продольными составляющими полей в векторной форме принимает вид

^x Для упрощения записи здесь при выводе и далее индекс m спущен.

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp &= -i\frac{\vec{r}}{g^2} \text{grad}_\perp \dot{E}_x - i\frac{\omega\mu_a}{g^2} [\text{grad}_\perp \dot{H}_x \cdot \vec{x}_0]; \\ \vec{H}_\perp &= -i\frac{\vec{r}}{g^2} \text{grad}_\perp \dot{H}_x + i\frac{\omega\epsilon_a}{g^2} [\text{grad}_\perp \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

При выводе (1.17) учтено, что в прямоугольной системе координат

$$\text{grad}_\perp \dot{E}_x = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} \dot{E}_x + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} \dot{E}_x; \quad \text{grad}_\perp \dot{H}_x = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_x + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} \dot{H}_x.$$

Соотношения (1.14), (1.15), (1.17) справедливы для любой регулярной направляющей системы и выражают поперечные составляющие векторов поля через продольные. Таким образом, для нахождения структуры электромагнитного поля необходимо решить с учетом граничных условий только два уравнения (1.12) и (1.13) и воспользоваться равенствами (1.17) для определения поперечных составляющих.

1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ И СВОЙСТВА НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

Из выражений (1.17) следует, что поперечные составляющие направляемых волн можно рассматривать как сумму поперечных составляющих двух волн, образующих два класса направляемых волн.

Первый класс направляемых волн называют электрическими волнами, или Е-волнами. Е-волна характеризуется тем, что у нее отсутствует продольная составляющая магнитного поля: $\dot{H}_x = 0$.

Второй класс направляемых волн называют магнитными, или Н-волнами. Н-волна характерна тем, что у нее отсутствует продольная составляющая электрического поля: $\dot{E}_x = 0$.

Существует третий класс направляемых волн, которые называют поперечными электромагнитными волнами, или Т-волнами (от слова *transversal* — поперечный). Этот класс волн характеризуется тем, что вдоль направления распространения отсутствуют составляющие электрического и магнитного полей. Подставляя в (1.17) $\dot{E}_x = 0$, $\dot{H}_x = 0$, получаем: $g^2 \vec{E}_\perp = 0$ и $g^2 \vec{H}_\perp = 0$, что удовлетворяется при $\vec{E}_\perp \neq 0$ и $\vec{H}_\perp \neq 0$, если только $g^2 = 0$. При этом из (1.9) следует, что $\vec{r} = \vec{k}$.

Остановимся подробнее на основных свойствах Е-и Н-волн, которые могут распространяться в полых металлических трубах (волноводах), в диэлектрических волноводах, линиях поверхностной волны.

Поперечные векторы \vec{E} и \vec{H} -волн в соответствии с (1.17) выражаются через $\dot{\vec{E}}_x$ и $\dot{\vec{H}}_x$ следующим образом:

$$\begin{array}{c} \text{E-волна} \\ \dot{\vec{E}}_1 = -i \frac{\dot{\vec{r}}}{g^2} \text{grad}_1 \dot{\vec{E}}_x \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{H-волна} \\ \dot{\vec{H}}_1 = -i \frac{\dot{\vec{r}}}{g^2} \text{grad}_1 \dot{\vec{H}}_x \end{array} \quad (1.18)$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = i \frac{\omega \dot{\vec{e}}_a}{g^2} [\text{grad}_1 \dot{\vec{E}}_x \vec{z}_0] \quad \dot{\vec{E}}_1 = -i \frac{\omega \dot{\vec{h}}_a}{g^2} [\text{grad}_1 \dot{\vec{H}}_x \vec{z}_0] \quad (1.19)$$

Выразив $\text{grad}_1 \dot{\vec{E}}_x$, $\text{grad}_1 \dot{\vec{H}}_x$ через $\dot{\vec{E}}_1$, $\dot{\vec{H}}_1$ соответственно и подставив в соотношения (1.19) и (1.19a), получим

$$\dot{\vec{H}}_1 = \frac{\omega \dot{\vec{e}}_a}{\dot{\vec{r}}} [\vec{z}_0 \cdot \dot{\vec{E}}_1] \quad \dot{\vec{E}}_1 = \frac{\omega \dot{\vec{h}}_a}{\dot{\vec{r}}} [\dot{\vec{H}}_1 \cdot \vec{z}_0] \quad (1.20)$$

Из соотношений (1.20) и (1.20a) следует, что поперечные векторы электрического и магнитного полей взаимно ортогональны, т.е. $\dot{\vec{E}}_1 \perp \dot{\vec{H}}_1$.

Поскольку тройка вектора $\dot{\vec{E}}_1$, $\dot{\vec{H}}_1$ и \vec{z}_0 взаимно перпендикулярны и \vec{z}_0 — единичный вектор, то комплексные модули поперечных векторов связаны между собой соотношениями

$$\dot{\vec{H}}_1 = \frac{\omega \dot{\vec{e}}_a}{\dot{\vec{r}}} \dot{\vec{E}}_1, \quad \dot{\vec{E}}_1 = \frac{\omega \dot{\vec{h}}_a}{\dot{\vec{r}}} \dot{\vec{H}}_1 \quad (1.21)$$

Характеристическим сопротивлением \vec{E} - и \vec{H} -волн ($Z_{E,H}$) называют отношение поперечной составляющей электрического поля к поперечной составляющей магнитного поля:

$$Z_{E,H} = \frac{\dot{\vec{E}}_1}{\dot{\vec{H}}_1} \quad (1.22)$$

С учетом (1.21) и (1.21a)

$$Z_E = \frac{\dot{\vec{r}}}{\omega \dot{\vec{e}}_a} = Z_c \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{\vec{k}}}; \quad Z_H = \frac{\omega \dot{\vec{h}}_a}{\dot{\vec{r}}} = Z_c \frac{\dot{\vec{k}}}{\dot{\vec{r}}}, \quad (1.23)$$

где $Z_c = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a}}$ — волновое сопротивление среды, заполняющей направляющую систему. Как следует из (1.23), характеристическое сопротивление \vec{E} - и \vec{H} -волн не зависит от поперечных координат.

Направляемые \vec{E} - и \vec{H} -волны могут быть быстрыми (если фазовая скорость волны V_ϕ больше скорости плоской однородной волны в среде V) и медленными, если $V_\phi < V$. Быстрые \vec{E} - и \vec{H} -волны распространяются в волноводах. Медленные волны распространяются в линиях поверхностных волн.

1.5. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЫСТРЫХ \vec{E} - И \vec{H} -ВОЛН

Определение полей \vec{E} - и \vec{H} -волн в направляющей системе является краевой задачей электродинамики. В общем виде краевую задачу можно сформулировать следующим образом: требуется определить продольную составляющую электрического поля $\dot{\vec{E}}_x$ для волны типа \vec{E} или продольную составляющую магнитного поля $\dot{\vec{H}}_x$ для волны типа \vec{H} , которые бы удовлетворяли в поперечном сечении направляющей системы волновым уравнениям, а на контуре поперечного сечения — граничным условиям электродинамики.

Определив из решения соответствующей краевой задачи $\dot{\vec{E}}_x$ или $\dot{\vec{H}}_x$, поперечные составляющие векторов $\dot{\vec{E}}_1$ и $\dot{\vec{H}}_1$ направляемой волны найдем, воспользовавшись (1.17).

Будем считать, что \vec{E} - и \vec{H} -волны распространяются в направляющей системе, выполненной из идеального проводника и заполненной реальным диэлектриком. Обозначим S_1 — поперечное сечение направляющей системы, L_1 — контур поперечного сечения. Продольные составляющие поля являются касательными к стенкам направляющей системы. На поверхности идеального проводника касательные составляющие удовлетворяют следующим граничным условиям электродинамики:

$$\dot{\vec{E}}_t = 0; \quad (1.24)$$

$$\dot{\vec{H}}_t = [\dot{\vec{J}}_S \cdot \vec{n}], \quad (1.25)$$

где $\dot{\vec{J}}_S$ — поверхностная плотность тока; \vec{n} — вектор внутренней нормали к направляющей поверхности. Первое условие является граничным условием для волны типа \vec{E} и может быть записано так:

$$\dot{\vec{E}}_x = 0 \text{ на } L_1. \quad (1.26)$$

Граничное условие для $\dot{\vec{H}}_x$ не может быть использовано в виде (1.25), так как выражает $\dot{\vec{H}}_x$ через неизвестный поверхностный ток. Получим граничное условие для $\dot{\vec{H}}_x$ из первого уравнения Максвелла. Предварительно построим в произвольной точке на внутренней поверхности направляющей системы прямоугольную систему координат так, чтобы ось z была параллельна оси направляющей системы, ось x — перпендикулярна направляющей поверхности. Тогда ось y будет касательной к направляющей поверхности в данной точке. Проекция первого уравнения Максвелла на ось y будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{\vec{H}}_x - \frac{\partial}{\partial x} \dot{\vec{H}}_x = i\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\vec{E}}_y. \quad (1.27)$$

На направляющей поверхности $\dot{\vec{E}}_y$ является касательной составляющей и поэтому равна нулю. Составляющая $\dot{\vec{H}}_x$ является

нормальной составляющей и в силу граничных условий электродинамики равна нулю. Тогда из уравнения (1.27) следует, что $\frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_x = 0$. Учтем, что ось x совпадает с направлением внутренней нормали n , тогда граничное условие для продольной составляющей магнитного поля в общем виде можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial n} \dot{H}_x = 0 \quad \text{на } L_1, \quad (1.28)$$

где n — нормаль к внутренней поверхности направляющей системы.

Краевая задача для Е-волн формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \nabla_1^2 \dot{E}_x + q^2 \dot{E}_x = 0 & \text{на } S_1; \\ \dot{E}_x = 0 & \text{на } L_1. \end{cases} \quad (1.29)$$

Аналитическая формулировка краевой задачи для Н-волн имеет вид

$$\begin{cases} \nabla_1^2 \dot{H}_x + q^2 \dot{H}_x = 0 & \text{на } S_1; \\ \frac{\partial}{\partial n} \dot{H}_x = 0 & \text{на } L_1. \end{cases} \quad (1.30)$$

Задачи (1.29), (1.30) называются задачами на собственные значения. В этих задачах неизвестными являются \dot{E}_x , \dot{H}_x и q — поперечное волновое число. Подобные краевые задачи для Е и Н-волн имеют бесконечное множество решений, существующих при строго определенных действительных значениях поперечного волнового числа q , которые называют собственными числами задачи. Сами решения называются собственными функциями задачи, а соответствующие им направляемые волны — собственными волнами направляющей системы.

Собственные числа образуют бесконечную дискретную последовательность:

$$q_1 < q_2 < \dots < q_i < \dots$$

Каждому собственному числу q_i соответствует собственная функция \dot{E}_{xi} или \dot{H}_{xi} и соответствующая собственная волна. Это означает, что существует бесконечное множество Е- и Н-волн, которые при определенных условиях могут распространяться в направляющей системе с постоянными распространения

$$\dot{E}_i = \sqrt{k^2 - q_i^2} \quad \text{где } 1 \leq i < \infty. \quad (1.31)$$

1.6. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

Прямоугольный волновод (рис. 12, а) — один из наиболее простых типов волноводов, нашедший широкое практическое применение.

Рассмотрим волновод прямоугольного сечения, выполненный из идеального проводника и заполненный реальным диэлектриком с параметрами ϵ_a , μ_a . Размер широкой стенки волновода прием равным a , размер узкой стенки — b .

Электрические волны

Для определения структуры электромагнитного поля Е-волны в прямоугольном волноводе необходимо решить краевую задачу, которая в рассматриваемом случае имеет следующую аналитическую формулировку:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \dot{E}_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \dot{E}_x + q^2 \dot{E}_x = 0 \quad \text{при } \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq b, \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\dot{E}_x = 0 \quad \text{при } \begin{cases} x = 0, x = a, 0 \leq y \leq b, \\ y = 0, y = b, 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (1.32a)$$

Уравнение (1.32) является дифференциальным уравнением в частных производных и решается методом разделения переменных, т.е. решение представляется в виде произведения:

$$\dot{E}_x = X(x) \cdot Y(y) \cdot e^{-i\Gamma z}, \quad (1.33)$$

где $X(x)$ — функция только координаты x , а $Y(y)$ — функция только координаты y . Подставляя (1.33) в (1.32), получаем после почленного деления на $X \cdot Y \cdot e^{-i\Gamma z}$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -q^2, \quad (1.34)$$

где x и y — независимые переменные. Поэтому удовлетворение равенства (1.34) при произвольных значениях этих переменных возможно, если только

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (1.35)$$

где константы k_x и k_y согласно (1.34) связаны соотношением

$$k_x^2 + k_y^2 = q^2. \quad (1.36)$$

Решения уравнений (1.35), которые могут быть записаны в форме $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$ и $Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0$, как известно, имеют вид:

$$X(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x; \quad (1.37)$$

$$Y(y) = C \sin k_y y + D \cos k_y y.$$

На стенках волновода искомая функция $E_x(x, y)$ должна удовлетворять граничным условиям, используя которые определим k_x , k_y и другие постоянные интегрирования.

На вертикальных стенках волновода при $x = 0$, $x = a$ и $0 \leq y \leq b$ E_x обратится в нуль в том случае, если $X(0) = X(a) = 0$. Из условия $X(0) = 0$ следует, что $B = 0$. Из условия $X(a) = 0$ следует, что $\sin k_x a = 0$, или $k_x a = m\pi$, где m — целое положительное число.

На горизонтальных стенках при $y = 0$, $y = b$ и $0 \leq x \leq a$ E_x обратится в нуль в том случае, если $Y(0) = Y(b) = 0$. Из условия $Y(0) = 0$ следует, что $D = 0$. Из условия $Y(b) = 0$ следует, что $\sin k_y b = 0$ или $k_y b = n\pi$, где n — целое положительное число. Таким образом, определили:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$g_{mn}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2; \quad (1.38)$$

$$\dot{r}_{mn} = \sqrt{k^2 - g_{mn}^2}; \quad (1.39)$$

Подставляя значения $B = 0$, $D = 0$, $k_x = \frac{m\pi}{a}$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$ в (1.37), а затем в (1.33), получаем решение для E_x :

$$\dot{E}_x = E_{0x} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\dot{r}_{mn} z}, \quad (1.40)$$

где через E_{0x} обозначено произведение $A \cdot C$, имеющее смысл амплитуды продольной составляющей напряженности электрического поля. Эта величина не может быть определена из граничных условий, так как амплитуда поля зависит от мощности источника, возбуждающего электромагнитную волну в волноводе. Подставляя в (1.18) и (1.19) вместо E_x его значение из (1.40), запишем выражения для составляющих векторов \vec{E}_1 и \vec{H}_1 электрических волн прямоугольного волновода:

$$\dot{E}_x = -i \frac{\dot{r}_{mn}}{g^2} \frac{m\pi}{a} E_{0x} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\dot{r}_{mn} z};$$

$$\dot{E}_y = -i \frac{\dot{r}_{mn}}{g^2} \frac{n\pi}{b} E_{0x} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\dot{r}_{mn} z};$$

$$\dot{H}_x = i \frac{\omega \epsilon_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} E_{0x} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\dot{r}_{mn} z};$$

$$\dot{H}_y = -i \frac{\omega \epsilon_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} E_{0x} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\dot{r}_{mn} z}, \quad (1.41)$$

при этом $H_z = 0$.

Как следует из выражений (1.40) и (1.41), структура поля в плоскости поперечного сечения соответствует структуре стоячих волн, причем m равно числу полувольт, укладывающихся вдоль стенки длиной a ; n равно числу полувольт, укладывающихся вдоль стенки длиной b . Ни одно из чисел m и n для E -волн не может быть равно нулю, так как при этом на основании (1.40) и (1.41) обращаются в нуль все составляющие электромагнитного поля.

Согласно выражениям (1.40) и (1.41) каждой паре целых чисел m и n соответствует определенная структура электромагнитного поля, обозначаемая E_{mn} . Например, E_{11} — это волна, у которой $m = 1$ и $n = 1$. Изменение всех составляющих вдоль продольной оси описывается множителем $e^{-i\dot{r}_{mn} z}$. Таким образом, в прямоугольном волноводе может существовать бесконечное множество E -волн с различной структурой, которая определяется значениями индексов m и n .

Магнитные волны

Краевая задача для H -волн прямоугольного волновода сводится к решению двумерного волнового уравнения (1.30), аналогичного уравнению (1.29) при выполнении граничных условий:

$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_x = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b, \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \dot{H}_x = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Общее решение волнового уравнения для H_x имеет вид, аналогичный решению уравнения (1.29), т.е.

$$\dot{H}_x = [A \sin k_x x + B \cos k_x x] \cdot [C \sin k_y y + D \cos k_y y], \quad (1.43)$$

где $k_x^2 + k_y^2 = g^2$. Удовлетворяя граничным условиям (1.42), получим $A = 0$, $C = 0$, $k_x = \frac{m\pi}{a}$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$, $g_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. Подставляя значения A , C , k_x и k_y в (1.43), получаем

$$\dot{H}_x = H_{0x} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\dot{r}_{mn} z}, \quad (1.44)$$

где $H_{0x} = \frac{\beta \cdot D}{\sqrt{k^2 - \epsilon^2}}$ — амплитуда продольной составляющей магнитного поля, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Поперечные составляющие определяем из (1.18a) и (1.19a) с учетом (1.44):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= i \frac{\omega \mu_0}{\epsilon^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_{0x} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\Gamma x}, \\ \dot{E}_y &= -i \frac{\omega \mu_0}{\epsilon^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_{0x} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\Gamma x}, \\ \dot{H}_x &= i \frac{\Gamma}{\epsilon^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_{0x} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\Gamma x}, \\ \dot{H}_y &= i \frac{\Gamma}{\epsilon^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_{0x} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\Gamma x}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

при этом $\dot{E}_z = 0$.

Из (1.44) и (1.45) следует, что у волн H , как и у волн E , структура поля в плоскости поперечного сечения соответствует структуре стоячих волн. Волны H , как и волны E , являются вырожденными, когда они имеют различную структуру (различное сочетание индексов m и n), но одинаковые значения поперечного волнового числа ϵ , т.е.

$$\left(\frac{m_1\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_1\pi}{b} \right)^2 = \left(\frac{m_2\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b} \right)^2. \quad (1.46)$$

Согласно выражениям (1.44) и (1.45) каждой паре чисел m и n соответствует определенная структура электромагнитного поля, обозначаемая H_{mn} . В прямоугольном волноводе возможно существование волн H_{m0} , H_{0n} . Волна типа H_{00} существовать не может, так как независимость H_x от поперечных координат x и y приводит к противоречию с тем фактом, что силовые линии магнитного поля — замкнутые линии.

Изменение всех составляющих вдоль продольной оси описывается множителем $e^{-i\Gamma x}$. Таким образом, в прямоугольном волноводе может существовать бесконечное множество H -волн с различной структурой, которая определяется значениями индексов m и n .

Системы уравнений (1.40), (1.41) и (1.44), (1.45) описывают бесконечное множество волн типа E_{mn} и H_{mn} , которые представляют собой систему собственных волн прямоугольного волновода. Электромагнитное поле в волноводе, возбуждаемое произвольными источниками, является суммой полей электрических и магнитных волн. В векторной форме электромагнитное поле в прямоугольном волноводе может быть записано так:

$$\dot{\vec{E}} = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\dot{C}_{mnq} \dot{\vec{E}}_{mnq} + \dot{C}_{mnq}^* \dot{\vec{E}}_{mnq}^*); \quad (1.47)$$

$$\dot{\vec{H}} = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\dot{C}_{mnq} \dot{\vec{H}}_{mnq} + \dot{C}_{mnq}^* \dot{\vec{H}}_{mnq}^*), \quad (1.48)$$

где индекс q означает принадлежность к электрической волне ($q=1$) или магнитной волне ($q=2$). Вторые слагаемые в суммах с индексом $-m$ и q соответствуют волнам, распространяющимся в отрицательном направлении оси x . В (1.47) и (1.48) составляющие векторов $\dot{\vec{E}}_{mn1}$, $\dot{\vec{H}}_{mn1}$ определяются из (1.40) и (1.41) при условии, что $E_{0x} = 1$, а составляющие векторов $\dot{\vec{E}}_{mn2}$, $\dot{\vec{H}}_{mn2}$ — соотношениями (1.44), (1.45) при условии, что $H_{0x} = 1$. Коэффициенты \dot{C}_{mnq} представляют собой амплитудные множители продольных компонент электрического или магнитного полей и определяются из условия возбуждения волновода.

1.7. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим волновод, внутренняя поверхность которого образует круговой цилиндр радиуса R (рис. 1.2,6). Волновод выполнен из идеального проводника и заполнен диэлектриком. Решение краевой задачи проведем в цилиндрической системе координат (r, φ, x) , совместив ось x с осью волновода.

Электрические волны в круглом волноводе находятся из решения краевой задачи для E -волн, которая в данном случае формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \dot{E}_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \dot{E}_x + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \dot{E}_x + \epsilon^2 \dot{E}_x = 0 \quad (1.49)$$

$$\dot{E}_x = 0, \text{ при } 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (1.49a)$$

Решение волнового уравнения (1.49) проводится методом разделения переменных. Положим, что

$$\dot{E}_x(r, \varphi, x) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) e^{-i\Gamma x}, \quad (1.50)$$

где $R(r)$ зависит только от координаты r ; $\Phi(\varphi)$ — зависит только от угла φ .

Подставив \dot{E}_x в виде (1.50) в (1.49) и почленно умножив на $\frac{r^2}{R\Phi} e^{+i\Gamma x}$, получим

* Амплитудные множители E_{0x} и H_{0x} могут быть любыми. Для простоты они приняты равными единице.

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 g^2 = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Поскольку левая часть уравнения зависит только от r , а правая только от координаты φ , равенство возможно, если левая и правая части равны одной и той же постоянной величине. Положим ее равной m . Тогда волновое уравнение распадается на два дифференциальных уравнения:

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

и

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + (g^2 - \frac{m^2}{r^2}) R(r) = 0.$$

Первое уравнение имеет решение

$$\Phi(\varphi) = A \cdot \cos(m\varphi + \varphi_0).$$

Величина φ_0 определяет только лишь поворот всей картины поля относительно оси x . Для упрощения можно положить $\varphi_0 = 0$. Однозначность поля в каждой точке требует, чтобы при изменении угла φ на 2π функция $\Phi(\varphi)$ была периодической с периодом 2π , т.е.:

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

или

$$\cos m\varphi = \cos m(\varphi + 2\pi).$$

Это возможно, если m — целое число, включая и нулевое значение, т.е. $m = 0, 1, 2, \dots$.

Второе уравнение является уравнением Бесселя, общее решение которого имеет вид

$$R(r) = \hat{B} J_m(g r) + \hat{C} N_m(g r),$$

где J_m — функция Бесселя m -го порядка; N_m — функция Неймана m -го порядка; \hat{B}, \hat{C} — постоянные интегрирования.

Функции Неймана при $r = 0$ (на оси волновода) стремятся к бесконечности. Электромагнитное поле в волноводе должно быть конечным, поэтому необходимо положить $\hat{C} = 0$.

Функции Бесселя конечны при любом аргументе. Решение для $R(r)$, таким образом, принимает вид $R(r) = \hat{B} J_m(g r)$.

Объединяя частные решения, для \vec{E}_x получим

$$\vec{E}_x = E_{0x} J_m(g r) \cos m\varphi e^{-i\Gamma x}, \quad (1.51)$$

где $E_{0x} = A \cdot \hat{B}$.

В решении (1.51) неизвестной величиной является поперечное волновое число g . Для его определения воспользуемся граничным условием (1.49а): $E_x = 0$ при $r = R$ и любом угле φ , или $E_{0x} J_m(g R) \cos m\varphi = 0$. Отсюда получаем, что $J_m(g R) = 0$.

Значение аргумента, которое обращает функцию Бесселя в нуль, называют корнем функции Бесселя. Функция Бесселя имеет бесконечное множество корней. Корни функции Бесселя табулированы^х. Обозначим n -й корень функции Бесселя m -го порядка через γ_{mn} , тогда $g_{mn} R = \gamma_{mn}$, а

$$g_{mn} = \frac{\gamma_{mn}}{R}, \quad (1.52)$$

причем $n = 1, 2, 3, \dots$.

Таким образом, решение краевой задачи имеет вид

$$\vec{E}_x = E_{0x} J_m\left(\frac{\gamma_{mn}}{R} r\right) \cos m\varphi e^{-i\Gamma x}, \quad (1.53)$$

где константа E_{0x} определяется из дополнительных условий; $\Gamma^2 = k^2 - g^2$. В цилиндрической системе координат поперечные составляющие векторов поля определяются соотношениями

$$\vec{E}_\perp = \vec{r}_0 \vec{E}_r + \vec{\varphi}_0 E_\varphi, \quad \vec{H}_\perp = \vec{r}_0 H_r + \vec{\varphi}_0 H_\varphi, \quad (1.54)$$

а выражение для \vec{grad}_\perp имеет вид

$$\vec{grad}_\perp = \vec{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.55)$$

Выражения для поперечных составляющих векторов электромагнитного поля E -волн в круглом волноводе получим из (1.18) и (1.19) с учетом (1.54) и (1.55), если подставим значение \vec{E}_x в виде (1.53):

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= -i \frac{\Gamma}{g} E_{0x} J'_m(g r) \cos m\varphi e^{-i\Gamma x}; \\ \vec{E}_\varphi &= i \frac{\Gamma}{g^2} \frac{m}{r} E_{0x} J_m(g r) \sin m\varphi e^{-i\Gamma x}; \\ \vec{H}_r &= -i \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \frac{m}{r} E_{0x} J_m(g r) \sin m\varphi e^{-i\Gamma x}; \\ \vec{H}_\varphi &= -i \frac{\omega \epsilon_a}{g} E_{0x} J'_m(g r) \cos m\varphi e^{-i\Gamma x}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

при этом $H_x = 0$.

Таблица 1.1

тип волны	H_{11}	E_{01}	H_{21}	H_{01}, E_{11}	H_{31}	E_{21}	H_{12}
$\lambda_{кр}/R$	3,41	2,613	2,06	1,64	1,48	1,22	1,18
γ_{mn}	—	2,405	—	3,832	—	5,136	—
μ_{mn}	1,84	—	3,054	3,832	4,2	—	5,33

^хНесколько первых корней γ_{mn} представлены в табл. 1.1.

Каждой паре чисел m и n соответствует определенная структура поля, или тип волны, обозначаемый E_{mn} . Таким образом, в круглом волноводе может существовать бесконечное множество волн, характеризующихся значениями индексов m и n . Число m определяет количество периодов изменения поля при изменении угла φ от 0 до 2π . Число n равно числу максимумов поля, имеющих место при изменении координаты r от 0 до R .

Магнитные волны в круглом волноводе

Краевая задача для Н-волн в круглом волноводе заключается в решении двумерного волнового уравнения относительно \dot{H}_x , аналогичного уравнению (1.49), при выполнении граничного условия

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{H}_x = 0 \text{ при } r=R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (1.57)$$

Общее решение волнового уравнения для \dot{H}_x будет аналогично (1.51), т.е.

$$\dot{H}_x = H_{0x} J_m(qr) \cos m\varphi \cdot e^{-i\dot{r}x}. \quad (1.58)$$

В (1.58) поперечное волновое число q определяем из граничного условия (1.57), которое с учетом (1.58) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{H}_x = H_{0x} q J'_m(qr) \cos m\varphi \cdot e^{-i\dot{r}x} = 0 \text{ при } r=R.$$

Отсюда следует, что должно выполняться равенство

$$J'_m(q \cdot R) = 0. \quad (1.59)$$

Полученное уравнение позволяет определить поперечное число q . Обозначив корни уравнения (1.59), число которых бесконечно, через μ_{mn} , находим поперечное волновое число для волн H_{mn} :

$$q_{mn} = \frac{\mu_{mn}}{R}. \quad (1.60)$$

Нумерация волн H_{mn} аналогична нумерации волн E_{mn} . Несколько первых корней μ_{mn} в порядке их возрастания представлены в табл. 1.1. Решение краевой задачи для Н-волн в круглом волноводе, таким образом, имеет вид

$$\dot{H}_x = H_{0x} J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{R} r\right) \cos m\varphi \cdot e^{-i\dot{r}x}, \quad (1.61)$$

где H_{0x} — амплитудный множитель, определяемый из дополнительных условий, а коэффициент распространения

$$\dot{r}_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_{mn}}{R}\right)^2}. \quad (1.62)$$

Выражения для поперечных составляющих электромагнитного поля Н-волн в круглом волноводе запишем с учетом (1.18а), (1.19а), (1.55) и (1.61) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= i \frac{\omega \mu_0}{q^2} \frac{m}{r} H_{0x} J_m(qr) \sin m\varphi \cdot e^{-i\dot{r}x}; \\ \dot{E}_\varphi &= i \frac{\omega \mu_0}{q^2} H_{0x} J'_m(qr) \cos m\varphi \cdot e^{-i\dot{r}x}; \\ \dot{H}_r &= -i \frac{\dot{r}}{q} H_{0x} J'_m(qr) \cos m\varphi \cdot e^{-i\dot{r}x}; \\ \dot{H}_\varphi &= i \frac{\dot{r}}{q^2} \frac{m}{r} H_{0x} J_m(qr) \sin m\varphi \cdot e^{-i\dot{r}x}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

при этом $E_x = 0$.

Каждой паре чисел m и n соответствует определенная структура поля или тип волны — H_{mn} . Физический смысл индексов m и n такой же, как для Е-волн в круглом волноводе.

Системы уравнений (1.53), (1.56), (1.61) и (1.63) описывают бесконечное множество волн типа H_{mn} и E_{mn} и представляют собой систему собственных волн круглого волновода. Так же, как в прямоугольном волноводе, в случае произвольного источника поле в круглом волноводе является суммой полей электрических и магнитных волн. Электромагнитное поле круглого волновода в векторной форме определяется выражениями (1.47) и (1.48), в которых векторы \vec{E}_{mn1} , \vec{H}_{mn1} описываются соотношениями (1.53) и (1.56), а векторы \vec{E}_{mn2} , \vec{H}_{mn2} — выражениями (1.61) и (1.63) при условии, что $E_{0x} = 1$, $H_{0x} = 1$.

1.8. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим бесконечно протяженную периодическую структуру, лежащую в плоскости xoy (рис. 1.3,а). Период структуры по оси x равен b , по оси y — d . Будем считать, что в верхнем полупространстве существует электромагнитное поле, возбуждаемое системой источников, расположенных в нижнем полупространстве.

Всю плоскость xoy можно разбить на ячейки системой линий, параллельных осям x и y и отстоящих друг от друга на расстояния d и b соответственно. Рассмотрим случай, когда все ячейки плоскости xoy возбуждены так, что между двумя любыми соседними ячейками существует сдвиг по фазе φ_x и φ_y по осям x и y соответственно, а амплитуда поля всех ячеек одинакова. Все ячейки будут находиться в одинаковых условиях

по отношению к соседним ячейкам. Благодаря этому поле над периодической структурой будет также почти периодическим, т.е. на периоде структуры b и d фаза поля будет изменяться в направлении оси x на ψ_x , а в направлении по оси y — на ψ_y . Мысленно можно выделить область в виде прямоугольного параллелепипеда, как показано на рис. 1.3, б, в которой поле однозначно определяет поле над периодической структурой. Эту область принято называть пространственным волноводом, или ячейкой Флоке. Поясним идею пространственного волновода на простом примере. Рассмотрим прямоугольный металлический волновод с размерами b и d (рис. 1.4). Волновод закорочен на одном конце при $x = 0$ и возбуждается штырем, помещенным в центре короткозамыкающей стенки. Этот штырь создает в волновод электромагнитное поле, распространяющееся вдоль оси x . Идеально проводящие стенки волновода можно заменить периодической системой штырей, являющихся зеркальным изображением возбуждающего штыря в стенках волновода. При этом приходим к периодической бесконечной плоской структуре, в которой на расстояниях b и d друг от друга расположены штыри. Фазы тока в двух соседних штырях различаются на 180° . При этом поле, созданное бесконечной периодической структурой в области $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq d$, $0 \leq z \leq \infty$, полностью идентично полю в реально существующем металлическом волновод.

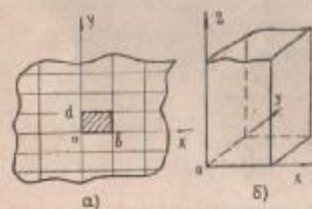


Рис. 1.3

Для изучения поля над бесконечной периодической структурой достаточно определить поле пространственного волновода. Понятие пространственного волновода широко используется при рассмотрении поля излучения больших антенных решеток.

Электромагнитное поле пространственного волновода определяется из решения краевой задачи.

Будем считать, что в направлении оси z в пространственном волновод существует бегущая волна с постоянной распространения Γ , кроме того, будем считать, что фаза поля повторяется на противоположных стенках волновода с точностью до

фазы ψ_x и ψ_y соответственно. Любая компонента поля при этом может быть записана в виде

$$\xi(x, y, z) = \xi(x, y) e^{-i\Gamma z}$$

и

$$\xi(x+b, y+d) = \xi(x, y) e^{-i\psi_x - i\psi_y}$$

Краевая задача для Е-волн в пространственном волновод формулируется как

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_x + \sigma^2 \dot{E}_x = 0 \quad (\text{на } S_{\perp}), \quad (1.64)$$

$$\dot{E}_x(x+b, y+d) = \dot{E}_x(x, y) e^{-i(\psi_x + \psi_y)} \quad (\text{на } L_{\perp}). \quad (1.64a)$$

Здесь S_{\perp} , L_{\perp} — площадь поперечного сечения и контур поперечного сечения пространственного волновода.

Решение проведем методом разделения переменных, полагая, что

$$\dot{E}_x = f(x) \psi(y) e^{-i\Gamma z}. \quad (1.65)$$

После подстановки в волновое уравнение (1.64) \dot{E}_x в виде (1.65) переменные разделяются, а уравнение (1.64) распадается на два независимых дифференциальных уравнения:

$$f''(x) + k_x^2 f(x) = 0; \quad (1.66)$$

$$\psi''(y) + k_y^2 \psi(y) = 0, \quad (1.67)$$

где

$$k_x^2 + k_y^2 = \sigma^2.$$

Решение каждого из этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям, т.е.:

$$f(x+b) = f(x) e^{-i\psi_x}; \quad (1.68)$$

$$\psi(y+d) = \psi(y) e^{-i\psi_y}. \quad (1.69)$$

Рассмотрим решение уравнения (1.66) для $f(x)$. Решение предполагаем в виде $f(x) = e^{i\Gamma x}$. Подставляя последнее в (1.66), получим характеристическое уравнение $-\Gamma^2 + k_x^2 = 0$, из которого определим $\Gamma = \pm k_x$. Запишем решение уравнения (1.66) в общем виде:

$$f(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}.$$

Для определения k_x и постоянных интегрирования обратимся к граничным условиям.

$$\text{При } x=0 \quad f(0) = A_1 + A_2.$$

При $x=b$ с учетом общего вида решения для $f(x)$ получим

$$A_1 \cdot e^{ik_x b} + A_2 \cdot e^{-ik_x b} = (A_1 + A_2) e^{-i\varphi_x}$$

или

$$(A_1 + A_2) \cos k_x b + i(A_1 \sin k_x b - A_2 \sin k_x b) = (A_1 + A_2) \cos \varphi_x - i(A_1 - A_2) \sin \varphi_x.$$

Приравнявая действительные части, получим

$$\cos k_x b - \cos \varphi_x = 0,$$

или

$$-2 \sin \frac{k_x b + \varphi_x}{2} \cdot \sin \frac{k_x b - \varphi_x}{2} = 0.$$

Последнее условие будет выполняться, если $\sin \frac{k_x b + \varphi_x}{2} = 0$,

или $\sin \frac{k_x b - \varphi_x}{2} = 0$, что возможно при

$$\frac{k_x b + \varphi_x}{2} = m\pi \quad \text{и} \quad \frac{k_x b - \varphi_x}{2} = m\pi,$$

где m — целое число.

Обоим значениям k_x для чисел m , которые могут принимать как отрицательные, так и положительные значения, с учетом (1.68) соответствует решение

$$f(x) = A \cdot e^{ik_x x} = A \cdot e^{i \frac{2\pi m - \varphi_x}{b} x}. \quad (1.70)$$

Здесь $-\infty < m < +\infty$; амплитудный множитель A определяется из дополнительных условий;

$$k_x = \frac{2\pi m - \varphi_x}{b} \quad (1.71)$$

при $-\infty < m < +\infty$.

Проводя аналогичным образом решение уравнения (1.67), для $\psi(y)$ имеем

$$\psi(y) = B \cdot e^{ik_y y} \quad (1.72)$$

Здесь

$$k_y = \frac{2\pi n - \varphi_y}{d}, \quad (1.72a)$$

где n — целое число, которое может меняться от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, для пространственного волновода

$$g_{mn}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{2\pi m - \varphi_x}{b} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n - \varphi_y}{d} \right)^2; \quad (1.73)$$

$$\Gamma_{mn}^2 = k^2 - g_{mn}^2 = k^2 - \left(\frac{2\pi m - \varphi_x}{b} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n - \varphi_y}{d} \right)^2. \quad (1.74)$$

Окончательно решение краевой задачи для Е-волн пространственного волновода с учетом (1.65), (1.70) и (1.72) запишем в виде

24

$$\vec{E}_x = E_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}, \quad (1.75)$$

но k_x и k_y вычисляются по (1.71) и (1.72a) соответственно; константа E_{0x} определяется из дополнительных условий, например, из условия возбуждения.

Поперечные составляющие полей определяются через \vec{E}_x в соответствии с (1.18) и (1.19):

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= \frac{\Gamma \cdot k_x}{g^2} E_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}; \\ \vec{E}_y &= \frac{\Gamma \cdot k_y}{g^2} E_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}; \\ \vec{H}_x &= -\frac{\omega \epsilon_a k_y}{g^2} E_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}; \\ \vec{H}_y &= \frac{\omega \epsilon_a k_x}{g^2} E_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

и этом $H_x = 0$.

Краевая задача для Н-волн пространственного волновода формулируется аналогично краевой задаче для Е-волн и имеет аналогичное решение:

$$\vec{H}_x = H_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}, \quad (1.77)$$

но k_x , k_y , Γ_{mn} также определяются выражениями (1.71), (1.72a), (1.74). Поперечные составляющие полей в соответствии с (1.18a), (1.19a) и (1.77) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= \frac{\omega \mu_a k_y}{g^2} H_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}; \\ \vec{E}_y &= -\frac{\omega \mu_a k_x}{g^2} H_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}; \\ \vec{H}_x &= \frac{\Gamma_{mn} \cdot k_x}{g^2} H_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}; \\ \vec{H}_y &= -\frac{\Gamma_{mn} k_y}{g^2} H_{0x} \cdot e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot e^{-i\Gamma_{mn} x}, \end{aligned} \quad (1.78)$$

и этом $E_x = 0$.

Таким образом, в пространственном волноводе существует бесчисленное множество электрических и магнитных волн, представляющих собой систему собственных волн пространственного волновода. Его электромагнитное поле, возбужденное произвольной системой источников, является бесконечной суммой собственных электрических и маг-

нитных волн. В векторной форме электромагнитное поле может быть записано следующим образом:

$$\vec{E} = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_{mnq} \vec{E}_{mnq}; \quad (1.79)$$

$$\vec{H} = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_{mnq} \vec{H}_{mnq}. \quad (1.80)$$

Здесь индекс q определяет принадлежность к электрической ($q=1$) или магнитной ($q=2$) волне.

В (1.79) и (1.80) составляющие векторов \vec{E}_{mn1} , \vec{H}_{mn1} определяются системой (1.75) и (1.76), а составляющие векторов \vec{E}_{mn2} , \vec{H}_{mn2} — соотношениями (1.77) и (1.78) при условии, что $E_{0x} = 1$, $H_{0x} = 1$. Коэффициенты \dot{A}_{mnq} определяются условиями возбуждения волновода.

1.9. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ВОЛНОВОДА

Рассмотрим волноводы, выполненные из идеального проводника и заполненные идеальным диэлектриком. Коэффициент распространения в волноводе определяется величиной коэффициента распространения в среде $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ и величиной поперечного волнового числа g :

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - g^2}. \quad (1.81)$$

Поперечное волновое число g зависит от формы и размеров волновода и от типа волны. Для прямоугольного волновода g определяется соотношением (1.38); для круглого — соотношениями (1.52) или (1.60) для Е- и Н-волн соответственно; для пространственного волновода — выражением (1.73). Из (1.81) следует, что соотношение между k и g может быть любым, коэффициент распространения в волноводе может принимать различные значения как действительные, так и мнимые. Соответственно различают два режима работы волноводов: докритический и закритический. Если частота генератора или размеры волновода подобраны так, что $k > g$, то коэффициент распространения Γ — действительная величина и поле в волноводе существует в виде бегущей волны. Энергия переносится вдоль волновода. Такой режим работы волновода называют режимом прозрачности, или докритическим режимом. Закритический режим работы, или режим отсечки, наступает, если $k < g$. При этом коэффициент распространения Γ — мнимая величина, поле вдоль волновода уменьшается по экспоненциальному закону. Переноса энергии вдоль волновода нет.

26

Частотной границей между режимом прозрачности и режимом отсечки является частота или длина волны в свободном пространстве, при которых постоянная распространения обращается в нуль. Из (1.81) получаем, что $\Gamma = 0$ при $k = g$. Длину волны, для которой это условие выполняется, называют критической длиной волны, а частоту — критической частотой. Из равенства k и g следует:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g}; \quad (1.82)$$

$$f_{кр} = \frac{V}{\lambda_{кр}}, \quad (1.83)$$

где V — скорость света в среде с параметрами ϵ_a , μ_a .

Понятия критической длины волны и критической частоты являются очень важными в теории волноводов. Как следует из (1.82), критическая длина волны зависит только от формы, размеров волновода и типа волны (индексов m и n).

Для прямоугольного волновода с поперечными размерами a , b

$$\lambda_{крЕ,Н} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (1.84)$$

для круглого волновода радиуса R

для Е-волн

$$\lambda_{крЕ} = \frac{2\pi}{\gamma_{mn}} R, \quad (1.85)$$

для Н-волн

$$\lambda_{крН} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} R. \quad (1.86)$$

Здесь γ_{mn} , β_{mn} — корни функции Бесселя и производной функции Бесселя m -го порядка.

После введения понятий критической длины волны и критической частоты условие докритического режима работы волновода можно записать как $\lambda < \lambda_{кр}$ или $f > f_{кр}$, где f — рабочая частота; $\lambda = \frac{V}{f}$ — рабочая длина волны.

В докритическом режиме коэффициент фазы Γ , длина волны в волноводе λ и фазовая скорость V_p выражаются следующими зависимостями от рабочей длины волны:

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - g^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}; \quad (1.87)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Gamma} = \frac{\lambda_{кр}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}};$$

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\Gamma} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} \quad (1.88)$$

Скорость переноса энергии в волноводе характеризуется скоростью движения группы волн с близкими частотами, которую называют групповой скоростью. Можно показать, что групповая скорость в волноводе

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\frac{d\Gamma}{d\omega}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{v^2}{v_{\phi}} \quad (1.89)$$

Характеристическое сопротивление волны в докритическом режиме — действительная величина. Для Е-волн $Z_E = Z_c \times \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$, для Н-волн $Z_H = Z_c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$.

При $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ наступает режим отсечки. При этом электромагнитное поле вдоль оси волновода Z уменьшается по экспоненциальному закону

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{-|\Gamma|z} \cdot e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_m e^{-|\Gamma|z} \cdot e^{i\omega t}$$

Экспоненциальный закон изменения поля вдоль волновода в закритическом режиме обусловлен не потерями в волноводе (так как рассматриваем волноводы, выполненные из идеального проводника и заполненные идеальным диэлектриком), а отражением и интерференцией волн. Волноводы в закритическом режиме для передачи энергии не могут быть использованы, но находят практическое применение в качестве делителей мощности (аттенуаторов). Если $\lambda \gg \lambda_{\text{кр}}$, делитель мощности широкополосный.

Как было показано в параграфах 1.6 + 1.8, любой волновод имеет бесконечный ряд собственных волн. Каждый тип волны имеет свою критическую длину волны. Критические длины волн можно расположить в убывающей последовательности:

$$\lambda_{\text{кр}1} > \lambda_{\text{кр}2} > \dots > \lambda_{\text{кр}i} > \lambda_{\text{кр}i+1} > \dots$$

Если, например, длина волны λ , возбуждаемая генератором в среде, заполняющей волновод, находится в следующем соотношении с рядом критических длин волн: $\lambda_{\text{кр}i} > \lambda > \lambda_{\text{кр}i+1}$, то все волны от 1 до i находятся в докритическом режиме и распространяются в волноводе. Скорость и длина волны в волноводе для разных типов волн различны, поэтому поле в волноводе будет иметь очень сложную структуру, а согласование и настройка такой волноводной линии передачи нарушаются. Все волны с номерами больше i находятся в закритическом режиме и распространяться не будут. Для обеспечения нормальной работы волновода, как направляющей системы, подбирают такое соотношение между длиной волны генератора и размерами волновода, чтобы

28

волновод был прозрачен только для одного типа волны, а все другие типы волн находились бы в закритическом режиме. Этому условию будет удовлетворять так называемый основной тип волны, имеющий наибольшую критическую длину волны. Волновод, в котором распространяется только один основной тип волны, называют одноволновым. Условие обеспечения одноволнового режима имеет вид

$$\lambda_{\text{кр}1} > \lambda > \lambda_{\text{кр}2}$$

На практике в ряде случаев применяют волноводы, в которых одновременно на рабочей длине волны распространяется несколько типов волн. Такой волновод называют многоволновым.

1.10. ВЫБОР РАЗМЕРОВ ВОЛНОВОДА

Рассмотрим выбор размеров прямоугольного волновода, работающего в одноволновом режиме на рабочей длине волны λ . Критические длины волн прямоугольного волновода для различных типов волн на основании (1.84) при условии $a > b$ располагаются в убывающей последовательности:

$$\lambda_{\text{кр}H_{10}} > \lambda_{\text{кр}H_{20}} > \lambda_{\text{кр}H_{01}} > \lambda_{\text{кр}H_{11}} > \lambda_{\text{кр}H_{21}} > \dots$$

где $\lambda_{\text{кр}H_{10}} = 2a$, $\lambda_{\text{кр}H_{20}} = a$ и т.д. Основным типом волны в прямоугольном волноводе является волна H_{10} . Для того чтобы волновод работал в одноволновом режиме, необходимо иметь $\lambda_{\text{кр}H_{10}} > \lambda > \lambda_{\text{кр}H_{20}}$ или $2a > \lambda > a$. Если задан диапазон рабочих длин волн $\lambda_{\text{мин}} - \lambda_{\text{макс}}$, то размер a должен быть выбран из условий

$$0,5 \lambda_{\text{макс}} < a < \lambda_{\text{мин}}$$

Выбор узкой стенки волновода осуществляется из условия нераспространения волны H_{01} , для которой критическая длина волны равна $2b$, т.е. $\lambda_{\text{мин}} > 2b$. Отсюда получаем условие для выбора размера узкой стенки b :

$$b < \frac{\lambda_{\text{мин}}}{2}$$

Со стороны меньших значений размер узкой стенки ограничивается величиной мощности, которую необходимо передать по волноводу и которая пропорциональна площади поперечного сечения волновода. Размер b , кроме того, влияет на потери мощности в волноводе.

Для круглого волновода радиусом R критические длины волн определяются по (1.85), (1.86). В табл. 1.1 приведены значения нескольких критических длин волн, расположенных в убывающей последовательности.

Основной волной круглого волновода является волна H_{11} , для которой $\lambda_{кр H_{11}} = 3,41 R$. Следующим высшим типом является E_{01} . Выбор размера круглого волновода, работающего на основном типе волны H_{11} , производится из неравенства

$\lambda_{кр H_{11}} > \lambda > \lambda_{кр E_{01}}$
или $3,41 R > \lambda > 2,613 R$. Отсюда неравенство для выбора R при работе волновода в диапазоне $(\lambda_{min} - \lambda_{max})$ принимает вид

$$\frac{\lambda_{max}}{3,41} < R < \frac{\lambda_{min}}{2,613}.$$

Волна E_{01} в круглом волноводе часто используется на практике, так как поле обладает осевой симметрией. Выбор радиуса волновода для работы на волне E_{01} должен быть осуществлен из неравенства

$\lambda_{кр E_{01}} > (\lambda_{min} \div \lambda_{max}) > \lambda_{кр H_{21}}$
или $2,613 R > (\lambda_{min} \div \lambda_{max}) > 2,06 R$.

Отсюда получаем условия для выбора радиуса волновода, работающего на волне E_{01} :

$$\frac{\lambda_{max}}{2,613} < R < \frac{\lambda_{min}}{2,06}.$$

При этом основной тип H_{11} будет распространяться, и чтобы его ослабить, применяют специальные меры.

1.11. КАРТИНЫ ПОЛЕЙ И ТОКОВ В ВОЛНОВОДАХ

Картины полей и токов представляют интерес при решении широкого круга практических задач, например: выбор типа возбуждающего устройства и его расположения в волноводе; выбор ориентации щели на поверхности волновода; конструирование различных устройств на основе волноводов (фильтров, аттенуаторов, фазовращателей и т.д.).

Ранее были получены соотношения, описывающие собственные волны в регулярных волноводах. Из этих соотношений видно, что зависимость полей E и H от поперечных координат и от координаты x существенно различны. Какое бы сечение x мы не взяли, в поперечном сечении волновода характер зависимости полей от поперечных координат всегда сохраняется.

Картина полей в волноводах зависит от режима работы волновода. Дальнейшее рассмотрение картины полей проведем для докритического режима, в котором электромагнитное поле существует в виде бегущих волн и который применяют для передачи энергии по волноводу.

Картины полей в волноводе изображаются силовыми линиями электрического и магнитного полей и могут быть построены на основании соотношений (1.40), (1.41), (1.44), (1.45) — в прямоугольном волноводе и по (1.53), (1.56), (1.61) и (1.63) — в круглом.

Однако картину силовых линий в волноводе можно построить, зная только E_x и H_x из решения краевых задач, а также учитывая следующее:

векторы \vec{E}_1 и \vec{H}_1 — ортогональны;
силовые линии \vec{E}_1 совпадают с линиями постоянного уровня функции H_x от поперечных координат;
силовые линии \vec{H}_1 совпадают с линиями постоянного уровня функции E_x от поперечных координат.

Поясним построение картины поля основной волны H_{10} в прямоугольном волноводе. Для этого типа волны $n = 0$ и поле не зависит от координаты y . В соответствии с (1.44) при $x = 0$

$$H_z(x, y) = H_{0z} \cos \frac{\pi}{a} x.$$

Построим над плоскостью поперечного сечения волновода поверхность $H_x(x, y)$ и линии равного уровня, как показано на рис. 1.5, а. Линии равного уровня представляют собой систему прямых линий, параллельных оси y . Пресекая эти линии на поперечное сечение волновода, получим картину силовых линий электрического поля \vec{E}_1 . На рис. 1.5, б силовые линии вектора \vec{E}_1 изображены сплошными линиями. Наибольшая густота силовых линий, а следовательно, и наибольшая напряженность электрического поля будет при $x = \frac{a}{2}$. Силовые линии вектора \vec{H}_1 ортогональны \vec{E}_1 (показаны на рисунке пунктиром). Картина поля в продольных сечениях волновода дана на рис. 1.5, в и г. Силовые линии магнитного поля лежат в плоскостях, параллельных плоскости xOx и в соответствии с уравнениями Максвелла замыкаются вокруг тока смещения, текущего между широкими стенками волновода параллельно оси y . В распространяющейся волне плотность тока смещения максимальна в центре замыкнутых силовых линий магнитного поля, где напряженность электрического поля равна нулю. Это следует из того, что плотность тока смещения равна $i\omega\epsilon_0 \vec{E}$ и сдвинута по фазе относительно \vec{E} на $\pi/2$. Картины силовых линий поля, показанные на рис. 1.5, б, в и г, представляют собой как бы мгновенную фотографию. Во времени эти картины перемещаются вдоль оси волновода с фазовой скоростью.

Из соотношений (1.44) и (1.45), положив $m = 1$ и $n = 0$, получим выражения для составляющих векторов поля: $E_x = 0$, $H_y = 0$; $E_z = 0$;

$$H_z = H_{0z} \cdot \cos \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\Gamma z}$$

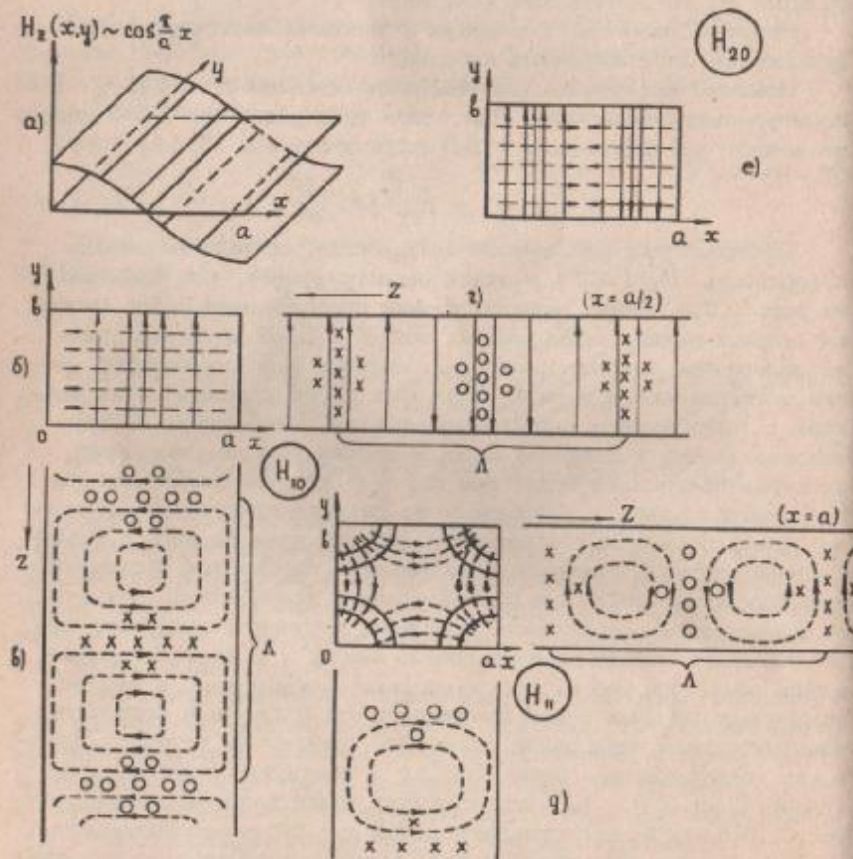


Рис. 1.5

Структуры полей волн E_{01} ($\beta_{kp} = 2.62\beta$) и H_{01} ($\beta_{kp} = 1.64\beta$) показаны на рис. 1.7. Поля обоих типов

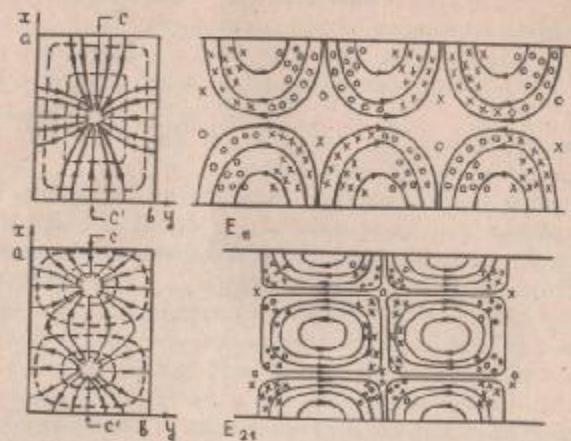


Рис. 1.6

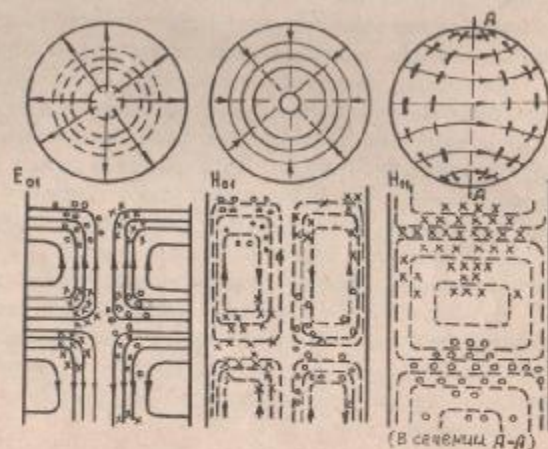


Рис. 1.7

они обладают осевой симметрией, так как $\nabla n = 0$ и имеет один максимум поля на радиусе волновода. Волна E_{01} широко используется в антенной технике для передачи электромагнитной энергии, например, от неподвижного передатчика к вращающейся антенне.

Каждой структуре поля в волноводе соответствует определенная система токов проводимости на его стенках. Предположим, что стенки волновода идеально проводящие. В этом случае токи проводимости текут по поверхности. Плотность поверхностного тока проводимости \vec{j}_s определяется тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности

$$\vec{j}_s = [\vec{n} \cdot \vec{H}_t] \quad (1.91)$$

где \vec{n} — единичный вектор внутренней нормали.

Пользуясь этим граничным условием электродинамики и соотношениями, описывающими структуру поля в волноводе, можно определить токи на стенках волновода.

Рассмотрим токи на стенках прямоугольного волновода для волны H_{10} . У поверхности широких стенок (по оси x) имеются составляющие H_x и H_z , соответственно на этих стенках — составляющие поверхностного тока j_{sx} и j_{sz} . Согласно (1.90) и (1.91) плотность продольного тока на широкой стенке

$$j_{sz} = -i \frac{\Gamma a}{\pi} H_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\Gamma z} \quad (1.92)$$

Плотность поперечного тока в соответствии с (1.90) и (1.91) выражается формулой

$$j_{sx} = H_{0x} \cos \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\Gamma z} \quad (1.93)$$

и равна нулю посредине широкой стенки при $x = \frac{a}{2}$. Модуль комплексной плотности тока в любой точке на широкой стенке $|j_s| = \sqrt{|j_{sz}|^2 + |j_{sx}|^2}$. На узких стенках, параллельных оси y , поверхностный ток определяется составляющей H_x магнитного поля и имеет только составляющую j_{sy} . В соответствии с (1.90) и (1.91)

$$j_{sy} = H_{0x} e^{-i\Gamma z} \quad (1.94)$$

Силовые линии поверхностного тока, построенные в соответствии с (1.92), (1.93), (1.94), показаны на рис. 1.8.

Структура поля основной волны H_{11} в круглом волноводе изображена рис. 1.7. У поверхности волновода имеются две отличные от нуля составляющие магнитного поля H_ϕ и H_z , которым на основании (1.91) соответствуют составляющие тока $j_{\phi z}$ и j_{sz} . Силовые линии тока показаны на рис. 1.9. Токи

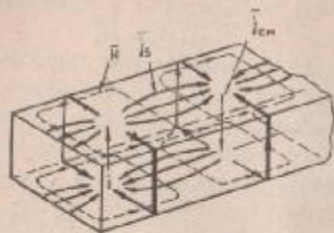


Рис. 1.8

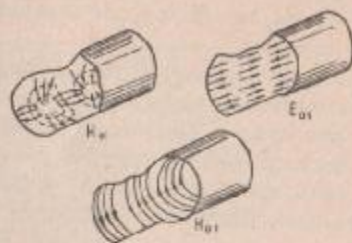


Рис. 1.9

на стенках волновода для волны E_{01} изображены на рис. 1.9 и имеют только продольную составляющую j_{sx} , так как магнитное поле (рис. 1.7) имеет при $r=R$ только составляющую H_φ . При распространении в круглом волноводе волны H_{01} на стенках волновода имеют место только кольцевые токи $j_{s\varphi}$, показанные на рис. 1.9. Знание токов на стенках волновода позволяет прорезать на стенках волновода щели, излучающие электромагнитную энергию нужным образом. Известно, что щель, прорезанная вдоль линий тока, не излучает, а щель, прорезанная поперек линий тока, дает наибольшее излучение, так как линии тока проводимости прерываются, возникает ток смещения, который возбуждает электромагнитное поле в окружающем пространстве.

1.12. МОЩНОСТЬ, ПЕРЕДАВАЕМАЯ ПО ВОЛНОВОДУ

Электромагнитное поле в волноводах в случае возбуждения произвольными источниками существует в виде суперпозиции бесконечного множества собственных волн. Комплексная мощность, переносимая этим полем,

$$\dot{P} = \int_{S_1} \dot{\vec{H}} d\vec{s} = \frac{1}{2} \int_{S_1} [\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}}] d\vec{s},$$

где S_1 — поперечное сечение волновода.

Основываясь на лемме Лоренца (2.8) и условии ортогональности собственных волн в волноводе (2.17) и (2.18), можно показать, что переносимая электромагнитным полем комплексная мощность равна сумме мощностей, переносимых каждой волной в отдельности, т.е.

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\dot{c}_{mnq}|^2 \int_{S_1} [\dot{\vec{E}}_{mnq} \cdot \dot{\vec{H}}_{mnq}] d\vec{s}.$$

Здесь составляющие векторов E -и H -волн для прямоугольного волновода даются соотношениями (1.40), (1.41) и (1.44), (1.45), а для круглого волновода — соотношениями (1.53), (1.56) и (1.61), (1.63).

Реактивная часть комплексной мощности обусловлена затухающими волнами, активная мощность — бегущими волнами, а «взаимная» мощности двух волн с разными индексами m, n, q равны нулю.

Рассмотрим среднюю за период мощность, переносимую отдельной собственной волной вдоль оси волновода x :

$$\dot{P} = \operatorname{Re} \int_{S_1} \dot{\vec{H}} d\vec{s} = \operatorname{Re} \int_{S_1} \dot{H}_x ds,$$

где $\dot{H}_x = \vec{x}_0 \cdot \dot{\vec{H}} = \frac{1}{2} \vec{x}_0 [\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}}] = \frac{1}{2} \vec{x}_0 [\dot{\vec{E}}_1 \cdot \dot{\vec{H}}_1]$.
Учтем связь между $\dot{\vec{E}}_1$ и $\dot{\vec{H}}_1$, которая следует из (1.20), (1.20a), (1.22), (1.23), в виде

$$\dot{\vec{H}}_1 = \frac{1}{Z_{E,H}} [\vec{x}_0 \cdot \dot{\vec{E}}_1]. \quad (1.95)$$

Тогда получим

$$\dot{H}_x = \frac{|\dot{\vec{E}}_1|^2}{2 Z_{E,H}} \quad \text{или} \quad \dot{H}_x = \frac{Z_{E,H}}{2} |\dot{\vec{H}}_1|^2.$$

Соответственно, средняя мощность

$$\dot{P} = \frac{1}{2 Z_{E,H}} \int_{S_1} |\dot{\vec{E}}_1|^2 ds, \quad (1.96)$$

или

$$\dot{P} = \frac{Z_{E,H}}{2} \int_{S_1} |\dot{\vec{H}}_1|^2 ds. \quad (1.97)$$

При выводе (1.96) и (1.97) учтено, что в режиме бегущих волн Z_E и Z_H — действительные величины.

Преобразуем (1.96) и (1.97) так, чтобы под интеграл входили не поперечные, а продольные составляющие поля. Это существенно упростит вычисление интегралов.

Воспользуемся векторным тождеством:

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}_1 \varphi) = \operatorname{grad}_1 \varphi \operatorname{grad}_1 \varphi + \varphi \nabla_1^2 \varphi.$$

Положив $\varphi = \dot{\vec{E}}_x$ и $\varphi = \dot{\vec{E}}_z$, получаем

$$|\operatorname{grad}_1 \dot{\vec{E}}_x|^2 = \operatorname{div}(\dot{\vec{E}}_x \operatorname{grad}_1 \dot{\vec{E}}_x) - \dot{\vec{E}}_x \nabla_1^2 \dot{\vec{E}}_x.$$

Для волн E , согласно (1.5) и (1.1a):

$$|\operatorname{grad}_1 \dot{\vec{E}}_x|^2 = \frac{g^4}{r^2} |\dot{\vec{E}}_1|^2;$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_x = -g^2 \dot{E}_x.$$

Подставляя эти выражения в тождество, для $|\dot{E}_x|$ имеем

$$|\dot{E}_x| = \frac{r^2}{g^4} \operatorname{div}(\dot{E}_x \cdot \operatorname{grad}_{\perp} \dot{E}_x) + \frac{r^2}{g^2} \dot{E}_x \cdot \dot{E}_x.$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства по площади поперечного сечения волновода и учтем, что по теореме Остроградского-Гаусса

$$\int_{S_{\perp}} \operatorname{div}(\dot{E}_x \cdot \operatorname{grad}_{\perp} \dot{E}_x) ds = \oint_{L_{\perp}} \dot{E}_x \cdot \operatorname{grad}_{\perp} \dot{E}_x d\bar{l},$$

L_{\perp} — контур поперечного сечения.

Тогда для средней мощности, переносимой E-волной, получим

$$\tilde{P} = \frac{1}{2Z_g} \frac{r^2}{g^2} \int_{S_{\perp}} |\dot{E}_x|^2 ds + \frac{1}{2Z_g} \frac{r^2}{g^4} \oint_{L_{\perp}} \dot{E}_x \cdot \operatorname{grad}_{\perp} \dot{E}_x d\bar{l}.$$

В металлических трубках $\dot{E}_x = 0$ на контуре поперечного сечения трубы, поэтому второй интеграл равен нулю. Окончательно получаем

$$\tilde{P} = \frac{1}{2Z_g} \frac{r^2}{g^2} \int_{S_{\perp}} |\dot{E}_x|^2 ds. \quad (1.98)$$

Аналогично доказывается равенство

$$\tilde{P} = \frac{Z_H}{2} \frac{r^2}{g^2} \int_{S_{\perp}} |\dot{H}_z|^2 ds. \quad (1.99)$$

справедливое для H-волн в металлических волноводах. При доказательстве (1.99) учтено граничное условие для H-волн

$$\left(\frac{dH_z}{dn} = 0 \text{ на } L_{\perp} \right).$$

Выражения для средней передаваемой мощности, рассчитанные для E-и H-волн по (1.98) и (1.99), в прямоугольном и круглом волноводах приведены в табл. 1.2^x.

Важным параметром волновода является предельная мощность волновода $P_{пред}$. Определим $P_{пред}$ для основного типа

^x Расчет \tilde{P} для круглого волновода сводится к табличным интегралам:

$$1) \int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{при } m=0 \\ \pi & \text{при } m \geq 1 \end{cases}$$

$$2) \int_0^R J_m^2(gR) r dr = \frac{R^2}{2} [J_m'(gR)]^2 + \frac{1}{2} (R^2 - m/g^2) J_m^2(gR).$$

Для определения J_m' удобно воспользоваться рекуррентным соотношением для бesselовых функций:

$$J_m'(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x).$$

Мощность, передаваемая по волноводу	
прямоугольному	круглому
E_{mn} - волны: $\tilde{P} = \frac{a \cdot b}{g Z_c} \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \cdot E_{0z} ^2$	E_{mn} - волны: $\tilde{P} = (1 + \delta_m) \frac{\pi R^2}{4 Z_c} \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} [J_m'(g_{mn} R)]^2 E_{0z} ^2$
H_{mn} - волны: $\tilde{P} = (1 + \delta_m) \frac{Z_c \cdot a \cdot b}{g} \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \cdot H_{0z} ^2$	H_{mn} - волны: $\tilde{P} = (1 + \delta_m) \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \cdot \left(1 - \frac{m}{\mu_{mn}} \right) \left[\frac{J_m(\mu_{mn})}{\mu_{mn}} \right]^2 H_{0z} ^2$
$\delta_m = 1$ при $m=0, n \geq 1$, $\delta_m = 0$ при $m \geq 1, n \geq 1$.	$\delta_m = 1$ при $m=0, n \geq 1$, $\delta_m = 0$ при $m \geq 1, n \geq 1$.

волны H_{10} в прямоугольном волноводе. На основании (1.99) и табл. 1.2

$$\tilde{P} = \frac{ab}{4} \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} Z_c |\dot{H}_{0z}|^2$$

Выразим H_{0z} для волны H_{10} из (1.90) через максимальное значение E_y при $x = a/2$:

$$|\dot{H}_{0z}|^2 = \frac{g^2}{(\omega \mu_a)^2} |\dot{E}_{y_{max}}|^2$$

Учтем полученное соотношение и то, что $\omega \mu_a = k Z_c$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

$$g = \frac{x}{a}, \quad \lambda_{кр} = 2a,$$

тогда

$$\tilde{P} = \frac{ab}{4Z_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} |\dot{E}_{y_{max}}|^2$$

Значение предельной мощности, которая может быть передана по волноводу волной H_{10} , получим, приравняв значение напряженности электрического поля в волноводе ($E_{y_{max}}$) предельному значению напряженности электрического поля в диэлектрике, заполняющем волновод ($E_{пред}$), при превышении которого происходит электрический разряд:

$$P_{пред} = \frac{ab}{4Z_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} E_{пред}^2$$

Для воздуха при нормальном атмосферном давлении $E_{пред} = 30$ кВ/см. Допустимая мощность $P_{доп}$ обычно в несколько раз меньше $P_{пред}$, поскольку наличие неоднородностей в волноводе, присутствие отраженной волны и некоторые другие факторы во многих случаях приводят к повышению напряженности электрического поля в отдельных сечениях волновода, что может вызвать пробой при мощностях, существенно меньших $P_{пред}$. Обычно полагают $P_{доп} = (0.2 + 0.3) P_{пред}$.

1.13. ЗАТУХАНИЕ В ВОЛНОВОДАХ

Приведенный в предыдущих параграфах анализ полей в волноводах сделан в предположении, что металлические стенки являются идеально проводящими, а среда, заполняющая волновод, — идеальный диэлектрик. При этом в докритическом режиме работы волновода коэффициент распространения Γ является действительной величиной. Можно предположить, что в волноводе с потерями зависимость полей от координаты x имеет тот же вид, что и в волноводе без потерь, т.е. $e^{i\Gamma_{mn}x}$, но в этом случае $\Gamma_{mn} = \beta_{mn} - i\alpha_{mn}$ — комплексная величина. Поэтому любая составляющая поля будет изменяться по закону $e^{i\Gamma_{mn}x} = e^{-\alpha_{mn}x} e^{i\beta_{mn}x}$, где $e^{-\alpha_{mn}x}$ характеризует изменение абсолютной ве-

личины любой составляющей электромагнитного поля вдоль оси x . Так как мощность пропорциональна квадрату амплитуды поля, то

$$\tilde{P} = \tilde{P}_0 e^{-2\alpha_{mn}x}$$

Здесь \tilde{P}_0 — средняя мощность в сечении $x = 0$. Разность между мощностями в сечении x и в сечении $x + \Delta x$ равна мощности потерь на отрезке волновода длиной Δx :

$$\tilde{P}_0 - \tilde{P}(x) - \tilde{P}(x + \Delta x)$$

Разделив обе части равенства на Δx и устремив Δx к нулю, найдем величину мощности тепловых потерь, приходящуюся на единицу длины:

$$\tilde{P}'_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tilde{P}(x) - \tilde{P}(x + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} = 2\alpha_{mn} \tilde{P}$$

Отсюда коэффициент затухания

$$\alpha_{mn} = \frac{\tilde{P}'_n}{2\tilde{P}}, \quad \text{м}^{-1}. \quad (1.100)$$

Определим коэффициент затухания, связанный с потерями в металлических стенках волновода. За счет потерь в стенках волновода структура электромагнитного поля несколько изменяется. Однако при высокой удельной проводимости материала стенок эти изменения невелики и можно считать, что электромагнитное поле в металлических реальных волноводах такое же, как в идеальных. Различие полей проявляется только вблизи стенок волновода: появляется касательная составляющая электрического поля, которая вместе с касательной составляющей магнитного поля обуславливает поток электромагнитной энергии вглубь металлических стенок волновода. Эта энергия переходит в тепловые потери.

Как известно, средняя мощность тепловых потерь в металлическом теле, находящемся в электромагнитном поле, определяется соотношением

$$\tilde{P}'_n = \frac{R_s}{2} \oint_S |\dot{H}_t|^2 ds, \quad (1.101)$$

где \oint_S — поверхность металлического тела; \dot{H}_t — амплитуда касательной составляющей магнитного поля на металлической поверхности; $R_s = \frac{1}{\sigma \delta}$ — удельное поверхностное сопротивление;

σ — проводимость; $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}}$ — глубина проникновения. Для всех металлов, кроме ферромагнитных, $\mu_a = \mu_0$ и $R_s = 1.987 \times \sqrt{\frac{f(\Gamma_a)}{6(\text{Ом} \cdot \text{м}^{-1})}} \cdot 10^{-3}$, Ом.

Рассмотрим потери мощности на отрезке волновода длиной Δx , столь малом, что изменением поля на Δx можно прене-

Таблица 1.3

Затухание в волноводах в H_n/M	
прямоугольных	круглых
E_{mn} - волны: $\alpha = \frac{2R_s}{Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \cdot a \cdot b \cdot q^2$	E_{mn} - волны: $\alpha = \frac{R_s}{R \cdot Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$
H_{10} - волна: $\alpha = \frac{R_s \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]}{b \cdot Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$	H_{mn} - волны: $\alpha = \frac{R_s \left[\frac{m^2}{(M_{mn})^2 - m^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 \right]}{R \cdot Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$
a, b - размеры поперечного сечения	$R_s = \frac{1}{\sigma \cdot \delta}$, $Z_c = \sqrt{\frac{\mu a}{\epsilon a}}$, R - радиус волновода.

$$\tilde{P}_n = \frac{R_s}{2} \int_0^{Lx} \oint_{L_1} |\dot{H}_t|^2 dt dx = \frac{R_s \cdot \Delta x}{2} \oint_{L_1} |\dot{H}_t|^2 dt.$$

Отсюда мощность потерь на единице длины

$$\tilde{P}_n' = \frac{R_s}{2} \oint_{L_1} |\dot{H}_t|^2 dt. \quad (1.101a)$$

Подставляя \tilde{P}_n' в (1.50) для \mathcal{L}_{mn} получим

$$\mathcal{L}_{mn} = \frac{R_s \oint_{L_1} |\dot{H}_t|^2 dt}{4\beta}. \quad (1.102)$$

Соотношение (1.102) является общим и справедливо для любой направляющей системы. Коэффициенты \mathcal{L}_{mn} для Е- и Н-волн прямоугольного и круглого волноводов, рассчитанные по (1.102), приведены в табл. 1.3.

Приведем пример расчета \mathcal{L}_{mn} для Е-волн прямоугольного волновода. Согласно (1.13) на широких стенках волновода (при $y = 0, y = b$)

$$|\dot{H}_t|^2 = |\dot{H}_x|^2 = \left(\frac{\omega \epsilon a}{q^2}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 |\dot{E}_{ox}|^2 \sin^2 \frac{n\pi}{a} x, \quad (1.103)$$

на узких стенках волновода (при $x = 0, x = a$):

$$|\dot{H}_t|^2 = |\dot{H}_y|^2 = \left(\frac{\omega \epsilon a}{q^2}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 |\dot{E}_{ox}|^2 \sin^2 \frac{m\pi}{b} y. \quad (1.104)$$

Подставляя (1.103) и (1.104) в (1.101a) и учитывая, что потери на всех стенках суммируются, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n' &= R_s \left(\frac{\omega \epsilon a}{q^4}\right)^2 |\dot{E}_{ox}|^2 \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi}{a} x dx + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi}{b} y dy \right] = \frac{R_s}{2} \left(\frac{k}{q}\right)^2 \frac{[k_y^2 a + k_x^2 b]}{q^2 Z_c^2} |\dot{E}_{ox}|^2. \end{aligned} \quad (1.105)$$

После подстановки \tilde{P} (из табл. 1.2) и \tilde{P}_n' из (1.105) в (1.102) и несложных преобразований имеем

$$\mathcal{L}_{mn} = \frac{2R_s \left[a \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 b \right]}{Z_c \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}.$$

Анализ формул для \mathcal{L}_{mn} (см. табл. 1.3) показывает, что для всех типов волн, независимо от геометрии волновода, коэффициент затухания становится бесконечно большим при стремлении длины волны к критической (т.е. при $\lambda \rightarrow \lambda_{кр}$, $\mathcal{L}_{mn} \rightarrow \infty$) и имеет в зависимости от длины волны минимум, ха-

ракти и положение которого зависит от геометрии волновода и типа волны. Увеличение \mathcal{L}_{mn} при $\lambda \rightarrow 0$ связано с ростом потерь из-за поверхностного эффекта. Исключение представляет волна H_{01} в круглом волноводе, для которой коэффициент затухания уменьшается при укорочении длины волны. Это объясняется тем, что волна H_{01} наводит на внутренней поверхности только поперечные токи, так как у поверхности волновода отлична от нуля только продольная составляющая магнитного поля H_x . С укорочением длины волны структура электромагнитного поля приближается к структуре поперечной электромагнитной волны, для которой $H_x = 0$. Уменьшение же H_x приводит к уменьшению поверхностных токов и потерь.

Наименьшими потерями в прямоугольном волноводе обладает волна H_{10} , в круглом — H_{01} .

Рассмотрим затухание, вызванное только потерями в среде, заполняющей волновод. Будем считать, что среда имеет параметры $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$ (σ — проводимость среды). Тогда постоянная распространения в этой среде есть комплексная величина, равная $k = \beta - i\alpha = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}} = k_0 \sqrt{1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}}$. Здесь $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ — постоянная распространения в той же среде, но в отсутствии потерь ($\sigma = 0, \mathcal{L} = 0$), $\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}$ — тангенс угла диэлектрических потерь. Отметим, что $\beta^2 - \alpha^2 = k_0^2$, $2\alpha\beta = k_0^2 \tan \delta$. Эти соотношения понадобятся далее при расчетах.

Постоянная распространения в волноводе, очевидно, также является комплексной величиной $\tilde{\Gamma}_{mn} = \beta_{mn} - i\alpha_{mn}$, определяемой соотношением $\tilde{\Gamma}_{mn}^2 = k^2 - g_{mn}^2$, где g_{mn} — поперечное волновое число. Следовательно,

$$\beta_{mn} - i\alpha_{mn} = \sqrt{k_0^2 - g_{mn}^2 - i k_0^2 \tan \delta}.$$

Возводя в квадрат и приравнявая действительные части, а затем приравнявая их модули, приходим к соотношениям:

$$\beta_{mn}^2 - \alpha_{mn}^2 = k_0^2 - g_{mn}^2,$$

$$\beta_{mn}^2 + \alpha_{mn}^2 = \sqrt{(k_0^2 - g_{mn}^2)^2 + k_0^4 \tan^2 \delta}.$$

Отсюда для β_{mn} и α_{mn} получим

$$\beta_{mn} = \sqrt{\frac{k_0^2 - g_{mn}^2 + \sqrt{(k_0^2 - g_{mn}^2)^2 + k_0^4 \tan^2 \delta}}{2}}; \quad (1.106)$$

$$\alpha_{mn} = \sqrt{\frac{\sqrt{(k_0^2 - g_{mn}^2)^2 + k_0^4 \tan^2 \delta} - (k_0^2 - g_{mn}^2)}{2}} \quad (1.107)$$

Из (1.106) и (1.107) следует, что в результате действия поглощающей среды постоянная распространения в волноводе комплексна на всех длинах волн (на всех частотах), причем $\beta_{mn} \neq 0$. Следовательно, в волноводе, заполненном поглощающей средой, не существует режима отсечки. Волны распространяются и при условии, что $\lambda > \lambda_{kp}$ (или $f > f_{kp}$). Но при этом происходит резкое увеличение затухания.

Выражения для β_{mn} и α_{mn} существенно упрощаются, если предположить, что $\tan \delta \ll 1$ и $\lambda \ll \lambda_{kp}$. Тогда

$$\beta_{mn} \approx \sqrt{k_0^2 - g_{mn}^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2} = \frac{2\pi \sqrt{\epsilon}}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon} \lambda_{kp}}\right)^2};$$

$$\alpha_{mn} \approx \frac{\pi \tan \delta}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2}} = \frac{\pi \sqrt{\epsilon} \tan \delta}{\lambda_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon} \lambda_{kp}}\right)^2}},$$

где λ — длина волны в диэлектрике; λ_0 — длина волны в вакууме; ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость.

Глава 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

2.1. ЛЕММА ЛОРЕНЦА

Лемма Лоренца есть вспомогательное математическое соотношение, связывающее комплексные амплитуды двух электромагнитных полей. С помощью этой леммы устанавливают математическую связь между первой группой сторонних электрических и магнитных токов и создаваемым ими полем, с одной стороны, и второй группой сторонних электрических и магнитных токов и создаваемым ими полем — с другой.

Пусть поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 возбуждается сторонними токами \vec{j}_1^g , и удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{H}_1 = i\omega \epsilon_a \vec{E}_1 + \vec{j}_1^g \quad (2.1)$$

и поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 возбуждается сторонними токами \vec{j}_2^g, \vec{j}_2^M , и, следовательно, удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{E}_2 = -i\omega \mu_a \vec{H}_2 - \vec{j}_2^M, \quad (2.2)$$

и поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 возбуждается сторонними токами \vec{j}_2^g, \vec{j}_2^M и, следовательно, удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_2 = i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_2 + \dot{\vec{j}}_2^3; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_2 = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^M. \quad (2.4)$$

Оба электромагнитных процесса имеют одну и ту же частоту и происходят в одном и том же пространстве.

Умножим скалярно уравнение (2.1) на $\dot{\vec{E}}_2$, уравнение (2.4) — на $\dot{\vec{H}}_1$ и вычтем из второго произведения первое:

$$\dot{\vec{H}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{E}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_1 = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{j}}_1^3 \dot{\vec{E}}_2. \quad (2.5)$$

Далее умножим скалярно уравнение (2.2) на $\dot{\vec{H}}_2$, уравнение (2.3) — на $\dot{\vec{E}}_1$ и вычтем из первого произведения второе:

$$\dot{\vec{H}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{E}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_2 = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 - i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^3 \dot{\vec{E}}_1. \quad (2.6)$$

Вычтем из выражения (2.6) выражение (2.5), преобразовав предварительно левые части их в соответствии с векторным тождеством $\operatorname{div}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}$. В результате получим

$$\operatorname{div}[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1] - \operatorname{div}[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2] = -\dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{j}}_1^3 \dot{\vec{E}}_2 + \dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 + \dot{\vec{j}}_2^3 \dot{\vec{E}}_1. \quad (2.7)$$

Полученное соотношение представляет собой лемму Лоренца в дифференциальной форме.

Интегрируя по объему V , включающему в себя все сторонние токи, и пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса, получим лемму Лоренца в интегральной форме:

$$\oint_S \{[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1] - [\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2]\} d\vec{S} = \int_V (\dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 + \dot{\vec{j}}_2^3 \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{j}}_1^3 \dot{\vec{E}}_2) dV. \quad (2.8)$$

При неограниченном расширении объема V ограничивающая его поверхность S находится на бесконечно большом расстоянии R от источников поля. В этом случае при условии, что все источники — электрические и магнитные токи — находятся в конечной области пространства и на бесконечности поля из-за потерь убывают быстрее, чем $1/R$, левая часть выражения (2.8) стремится к нулю. Поэтому лемма Лоренца для безграничного пространства, имеющего в каждой точке некоторые потери, принимает вид

$$\int_V (\dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 + \dot{\vec{j}}_2^3 \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{j}}_1^3 \dot{\vec{E}}_2) dV = 0. \quad (2.9)$$

В пределе соотношение (2.11) справедливо и для пространства без потерь.

2.2. УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

При отсутствии сторонних токов $\dot{\vec{j}}^3$ и $\dot{\vec{j}}^M$ лемма Лоренца для ограниченного объема в соответствии с формулой (2.8) будет иметь вид

$$\oint_S \{[\dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'}] - [\dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S]\} d\vec{S} = 0. \quad (2.10)$$

В качестве поля $\dot{\vec{E}}_S, \dot{\vec{H}}_S$ выберем волну какого-либо одного типа, а в качестве поля $\dot{\vec{E}}_{S'}, \dot{\vec{H}}_{S'}$ — другого. Залишем лемму

Лоренца для замкнутой поверхности S' , образованной двумя поперечными сечениями волновода S_{11} и S_{12} и заключенной между этими сечениями боковой поверхностью волновода S_0 (рис. 2.1). Если стенки волновода идеально проводящие, то в силу граничных условий на этих

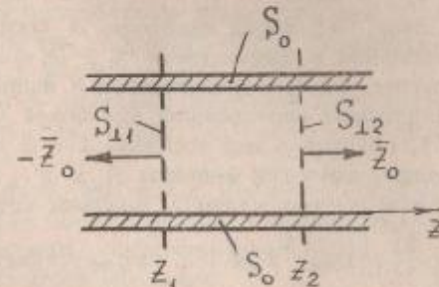


Рис. 2.1

стенках векторы поля $\dot{\vec{E}}_S$ и $\dot{\vec{E}}_{S'}$ ориентированы по нормали, а векторы поля $\dot{\vec{H}}_S$ и $\dot{\vec{H}}_{S'}$ — по касательной к стенкам волновода. Тогда векторы $[\dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'}]$ и $[\dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S]$ будут направлены по касательной к стенкам волновода, и скалярное произведение этих векторов на вектор элемента площади $d\vec{S}$ в лемме Лоренца окажется равным нулю, так как вектор $d\vec{S}$ ориентирован по нормали к стенкам. При этом интеграл по замкнутой поверхности S в лемме Лоренца (2.10) сведется к интегралам по площадям поперечных сечений S_{11} и S_{12} :

$$\oint_S \{[\dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'}] - [\dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S]\} d\vec{S} = \int_{S_{11}} \{[\dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'}] - [\dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S]\} d\vec{S}_1 + \int_{S_{12}} \{[\dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'}] - [\dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S]\} d\vec{S}_2 = 0, \quad (2.11)$$

$$d\vec{S}_1 = -\vec{x}_0 dS; \quad d\vec{S}_2 = \vec{x}_0 dS \quad (2.12)$$

С учетом того, что векторы $d\vec{S}_1$ и $d\vec{S}_2$ направлены в противоположные стороны, получим

$$\int_{S_{11}} \{[\dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'}] - [\dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S]\} d\vec{S} = \int_{S_{12}} \{[\dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'}] - [\dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S]\} d\vec{S}. \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) позволяет сделать вывод о независимости входящих в него интегралов от координаты z , в силу того что

значение этих интегралов в различных сечениях S_1 волновода остается неизменным. Однако поля \vec{E}_S , \vec{H}_S и $\vec{E}_{S'}$, $\vec{H}_{S'}$ зависят от координаты x , так как их можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\pm S} &= \vec{E}_{\pm Sm} e^{\mp i \hat{r}_S x}; & \vec{E}_{\pm S'} &= \vec{E}_{\pm S'm} e^{\mp i \hat{r}_{S'} x}; \\ \vec{H}_{\pm S} &= \vec{H}_{\pm Sm} e^{\mp i \hat{r}_S x}; & \vec{H}_{\pm S'} &= \vec{H}_{\pm S'm} e^{\mp i \hat{r}_{S'} x}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Здесь знак "+" перед индексом S соответствует волне, распространяющейся в направлении $x > 0$, а знак "-" перед индексом S - волне, распространяющейся в направлении $x < 0$.

Подставим соотношения для полей (2.14) в выражение (2.13), опустив в них индексы 1 и 2 при S_1 . Если принять, что волны, имеющие индексы S и S' , распространяются в одном и том же направлении, получим следующее выражение:

$$\int_{S_1} \left\{ [\vec{E}_{\pm Sm} \vec{H}_{\pm S'm}] - [\vec{E}_{\pm S'm} \vec{H}_{\pm Sm}] \right\} d\vec{S} e^{\mp i(\hat{r}_S + \hat{r}_{S'})x}.\quad (2.15)$$

Предположив, что волны, имеющие индексы S и S' , распространяются навстречу друг другу, вместо выражения (2.15) получим

$$\int_{S_1} \left\{ [\vec{E}_{\pm Sm} \vec{H}_{\mp S'm}] - [\vec{E}_{\mp S'm} \vec{H}_{\pm Sm}] \right\} d\vec{S} e^{\mp i(\hat{r}_S - \hat{r}_{S'})x}.\quad (2.16)$$

Из соотношений (2.15) и (2.16) следует, что равенство (2.13), означающее независимость входящих в него интегралов от координаты x , будет справедливо, если выполняются следующие условия:

$$\int_{S_1} \left\{ [\vec{E}_{\pm S} \vec{H}_{\pm S'}] - [\vec{E}_{\pm S'} \vec{H}_{\pm S}] \right\} d\vec{S} = 0;\quad (2.17)$$

$$\int_{S_1} \left\{ [\vec{E}_{\pm S} \vec{H}_{\mp S'}] - [\vec{E}_{\mp S'} \vec{H}_{\pm S}] \right\} d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{r}_S \neq \hat{r}_{S'}; \\ N_S & \text{при } \hat{r}_S = \hat{r}_{S'}. \end{cases}\quad (2.18)$$

Здесь N_S - постоянная величина, называемая нормой. Соотношения (2.17) и (2.18) называют условиями ортогональности собственных волн в волноводах.

2.3. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ВОЛНОВОДАХ ПОЛЯ ЗАДАННОГО ТИПА

Рассмотренные в гл. 1 волновые процессы в регулярных волноводах есть не что иное, как возможные электромагнитные процессы при отсутствии источников. На практике всегда имеют дело с вынужденными волновыми процессами, причем наличие устройства возбуждения нарушает регулярность системы.

Волны в волноводах могут возбуждаться с помощью возбуждающих устройств следующих типов:

- штыревого;
- рамочного или петлевого;
- щелевого.

Общие принципы размещения возбуждающих устройств состоят в следующем:

1) при возбуждении поля устройством штыревого типа штырь (или штыри) следует располагать параллельно составляющим вектора \vec{E} волны, возбуждаемой в волноводе;

2) при возбуждении поля устройством рамочного или петлевого типа необходимо располагать плоскость петли перпендикулярно составляющим вектора \vec{H} возбуждаемой волны;

3) при возбуждении поля в волноводе щелевым возбудителем щель следует располагать так, чтобы она пересекала линии тока на стенках волновода.

Следует иметь также в виду, что выбор положения и ориентации возбуждающего элемента определяет согласование возбудителя с возбуждающим волноводом, обеспечивающее передачу от возбудителя в волновод наибольшей мощности.

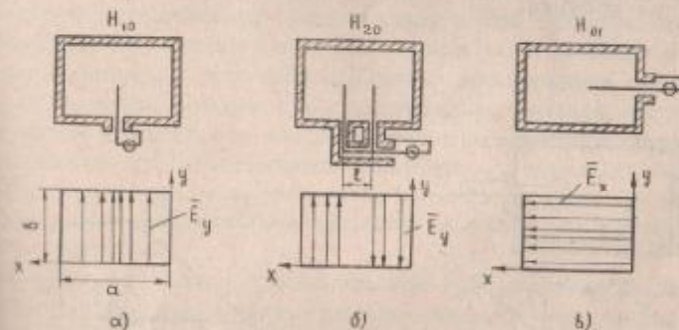


Рис. 2.2

На рис. 2.2 показаны схематично способы возбуждения штыревыми антеннами полей различного типа в прямоугольном волноводе. Как видно из рис. 2.2, а, для возбуждения волны типа H_{10} штырь нужно вводить в волновод параллельно составляющей \vec{E} возбуждаемой волны; силовые линии \vec{E} волны H_{10} показаны на рисунке.

На рис. 2.2, б показан способ возбуждения волны H_{20} с помощью двух противофазных штырей. Противофазность токов на

штырях обеспечивается за счет дополнительного набег фазы на участке l в тракте питания левого штыря по сравнению с правым. На том же рисунке показана картина силовых линий поля \vec{E} возбуждаемой волны H_{10} .

Как видно из рис. 2.2, в,

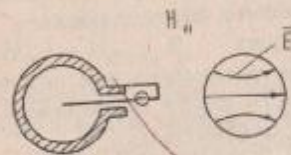


Рис. 2.3

для возбуждения волны типа H_{01} штырь нужно ввести через отверстие в узкой стенке волновода параллельно силовым линиям поля \vec{E} возбуждаемой волны, картина которых показана на рисунке.

На рис. 2.3 изображена схема возбуждения волны H_{10} в круглом волноводе с помощью штыревого возбуждателя, а также приведена картина силовых линий поля \vec{E} возбуждаемой волны.

На рис. 2.4 представлен способ введения петлевого возбуждателя в прямоугольный волновод для возбуждения в нем волны H_{10} . Петля вводится через отверстие в узкой стенке. Плоскость петли расположена перпендикулярно составляющей H_x магнитного поля возбуждаемой волны; силовые линии этого поля показаны на рисунке.

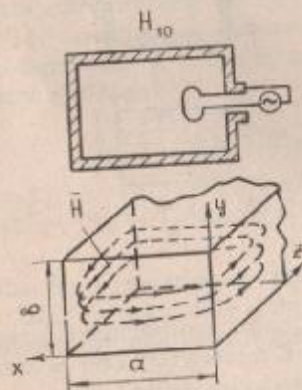


Рис. 2.4

На рис. 2.5 схематично показано возбуждение волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе через щель. Принцип возбуждения волновода через щель заключается в следующем. Пусть в одном из смежных волноводов, имеющих общую стенку, в данном случае узкую, распространяется волна H_{10} . На стенках это

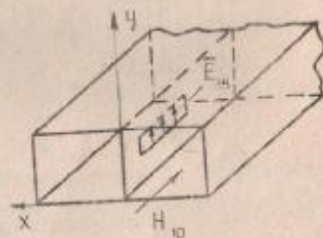


Рис. 2.5

го волновода протекают токи, картина которых представлена на рис. 1.8. Если на какой-либо стенке этого волновода прорезать щель так, чтобы она пересекала линии тока, то на краях щели появляются переменные заряды разного знака, а внутри щели — электрическое поле, силовые линии которого перпендикулярны краям щели. Это поле является источником излучения электромагнитных волн. Если щель прорезана в общей стенке двух волноводов, как показано на рис. 2.5, то, возбуждаясь токами, текущими по стенкам одного волновода, она излучает электромагнитное поле во второй волновод, возбуждая в нем волну H_{10} .

2.4. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ ПО ЗАДАНЫМ ИСТОЧНИКАМ

Пусть в полном волноводе в области между поперечными сечениями S_1 и S_2 (рис. 2.1) находятся все источники поля — электрические и магнитные токи. Определение электромагнитного поля вне этой области сводится к решению системы уравнений Максвелла (2.1) и (2.2) внутри волновода с учетом граничных условий на его стенках.

Поле в неограниченном волноводе слева и справа от области, занятой источниками, представляет собой суперпозицию полей бесчисленного множества собственных волн данного волновода, расходящихся от источников. Однако волноводные линии передачи, как правило, работают в одноволновом режиме, когда основная волна находится в докритическом режиме и распространяется по волноводу, а остальные — высшие — типы волн испытывают режим отсечки, т.е. находятся в закритическом режиме. Амплитуды этих волн экспоненциально затухают по мере удаления от источников.

При решении задачи о возбуждении волновода необходимо определить амплитуды и фазы расходящихся от источников волн. Решение целесообразно искать в виде суммы полей собственных волн данного волновода. Справа от источников (при $x > x_2$) будем иметь волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x ,

$$\vec{E} = \sum_{s=0}^{\infty} \vec{E}_s, \quad \vec{H} = \sum_{s=0}^{\infty} \vec{H}_s, \quad (2.19)$$

а слева от источников (при $x < x_1$) — волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси x ,

$$\vec{E} = \sum_{s=0}^{\infty} \vec{E}_{-s}, \quad \vec{H} = \sum_{s=0}^{\infty} \vec{H}_{-s}, \quad (2.20)$$

где S — индекс типа волны, введенный для упрощения записи вместо индексов q , m и n (см. формулы (1.47), (1.48)).

Комплексные амплитуды C_S и \dot{C}_S в (2.19) и (2.20) можно найти, воспользовавшись леммой Лоренца (2.8), в которой в качестве \vec{E}_1, \vec{H}_1 возьмем сначала поле $\vec{E}_{S'}, \vec{H}_{S'}$ какого-либо известного типа S' , затем поле $\vec{E}_{-S'}, \vec{H}_{-S'}$, а в качестве \vec{E}_2, \vec{H}_2 возьмем искомое поле \vec{E}, \vec{H} . Интегрирование в (2.8) будем проводить по замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V , внутри которого находятся источники поля.

В качестве поверхности S выберем поверхность, образованную двумя поперечными сечениями волновода S_{L1} и S_{L2} и заключенной между этими сечениями боковой поверхностью волновода S_0 (рис. 2.1). В результате получим соотношения

$$\oint_S \{ [\dot{\vec{E}} \vec{H}_{S'}] - [\vec{E}_S \dot{\vec{H}}] \} d\vec{S} = \int_V (\vec{j}^3 \dot{\vec{E}}_{S'} - \vec{j}^M \dot{\vec{H}}_{S'}) dV; \quad (2.21)$$

и

$$\oint_S \{ [\dot{\vec{E}} \vec{H}_{-S'}] - [\vec{E}_{-S} \dot{\vec{H}}] \} d\vec{S} = \int_V (\vec{j}^3 \dot{\vec{E}}_{-S'} - \vec{j}^M \dot{\vec{H}}_{-S'}) dV. \quad (2.22)$$

Можно показать, что в левой части выражений (2.21) и (2.22) нужно учитывать только поперечные составляющие полей $\vec{E}_L, \vec{H}_L, \vec{E}_L \pm \vec{g}', \vec{H}_L \pm \vec{g}'$. Для этого представим каждое поле как сумму поперечной и продольной составляющих и рассмотрим скалярное произведение следующего вида:

$$\begin{aligned} [\dot{\vec{E}} \vec{H}_{S'}] d\vec{S} &= [(\vec{E}_L + \vec{E}_x), (\vec{H}_{LS'} + \vec{H}_{xS'})] d\vec{S} = \\ &= [\vec{E}_L \vec{H}_{LS'}] d\vec{S} + [\vec{E}_L \vec{H}_{xS'}] d\vec{S} + [\vec{E}_x \vec{H}_{LS'}] d\vec{S} + \\ &+ [\vec{E}_x \vec{H}_{xS'}] d\vec{S} = [\vec{E}_L \vec{H}_{LS'}] d\vec{S}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

так как во втором и третьем слагаемых угол между вектором $d\vec{S}$, совпадающим с осью x , и векторами $[\vec{E}_L \vec{H}_{xS'}]$ или $[\vec{E}_x \vec{H}_{LS'}]$, лежащими в плоскости XOY , составляет 90° и, следовательно, скалярные произведения обращаются в нуль; в четвертом слагаемом $[\vec{E}_x \vec{H}_{xS'}] = 0$, так как угол между этими векторами равен нулю.

Как было показано выше (см. п. 2.2), интеграл по поверхности S_0 (рис. 2.1) равен нулю. Кроме того, в сечениях S_{L1} и S_{L2} поперечные составляющие искомого поля \vec{E}_L, \vec{H}_L можно представить в виде рядов (2.19) и (2.20). Подставив выражения (2.19) и (2.20) в (2.21) и (2.22), с учетом (2.23) получим

$$\begin{aligned} &\int_{S_{L1}} \{ [(\sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_{-s} \dot{\vec{E}}_{L,-s}) \vec{H}_{LS'}] - [\vec{E}_{LS'} \sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_s \dot{\vec{H}}_{L,-s}] \} (-\vec{x}_0) dS + \\ &+ \int_{S_{L2}} \{ [(\sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_s \dot{\vec{E}}_{LS}) \vec{H}_{L,-s'}] - [\vec{E}_{L,-s'} \sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_s \dot{\vec{H}}_{LS}] \} \vec{x}_0 dS = \\ &= \int_V (\vec{j}^3 \dot{\vec{E}}_{S'} - \vec{j}^M \dot{\vec{H}}_{S'}) dV; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} &\int_{S_{L1}} \{ [(\sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_{-s} \dot{\vec{E}}_{L,-s}) \vec{H}_{L,-s'}] - [\vec{E}_{L,-s'} \sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_{-s} \dot{\vec{H}}_{L,-s}] \} (-\vec{x}_0) dS + \\ &+ \int_{S_{L2}} \{ [(\sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_s \dot{\vec{E}}_{LS}) \vec{H}_{L,-s'}] - [\vec{E}_{L,-s'} \sum_{s=0}^{\infty} \dot{C}_s \dot{\vec{H}}_{LS}] \} \vec{x}_0 dS = \\ &= \int_V (\vec{j}^3 \dot{\vec{E}}_{-S'} - \vec{j}^M \dot{\vec{H}}_{-S'}) dV, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где в правых частях выражений (2.24) и (2.25) записаны полные поля, в общем случае имеющие как поперечные, так и продольные составляющие, в отличие от выражений слева, где присутствуют только поперечные составляющие полей.

Из условий ортогональности (2.17) и (2.18) следует, что в (2.24) и (2.25) все интегралы обращаются в нуль, кроме тех, в которые входят поля волн одного и того же типа $|s| = |s'|$ ($\Gamma_{|s|} = \Gamma_{|s'|}$), распространяющихся в противоположные стороны:

$$\begin{aligned} &\int_{S_{L1}} \{ [(\dot{C}_{-s'} \dot{\vec{E}}_{L,-s'}) \vec{H}_{LS'}] - [\vec{E}_{LS'} (\dot{C}_{-s'} \vec{H}_{L,-s'})] \} (-\vec{x}_0) dS = \\ &= \int_V (\vec{j}^3 \dot{\vec{E}}_{S'} - \vec{j}^M \dot{\vec{H}}_{S'}) dV; \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} &\int_{S_{L2}} \{ [(\dot{C}_s \dot{\vec{E}}_{LS}) \vec{H}_{L,-s'}] - [\vec{E}_{L,-s'} (\dot{C}_s \vec{H}_{LS})] \} \vec{x}_0 dS = \\ &= \int_V (\vec{j}^3 \dot{\vec{E}}_{-S'} - \vec{j}^M \dot{\vec{H}}_{-S'}) dV. \end{aligned} \quad (2.26)$$

В выражениях (2.25a) и (2.26) вынесем коэффициенты $\dot{C}_{S'}$ и \dot{C}_S за знак интеграла и преобразуем оставшиеся подынтегральные выражения. В этих выражениях присутствуют составляющие полей волн одного типа, распространяющихся навстречу друг другу, поэтому можно принять, что векторы $\vec{E}_{LS'}$ и $\vec{E}_{L,-s'}$ ориентированы одинаково, тогда векторы $\vec{H}_{LS'}$ и $\vec{H}_{L,-s'}$ должны быть

ориентированы противоположно. С учетом этого преобразуем левую часть выражения (2.25а):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{C}}_{-s'} \int_{s_{11}} \{ [\dot{\bar{E}}_{1s'}, \dot{\bar{H}}_{1-s'}] - [\dot{\bar{E}}_{1-s'}, \dot{\bar{H}}_{1s'}] \} \bar{x}_0 ds &= \\ = \dot{\bar{C}}_{-s'} \int_{s_{11}} \{ -[\dot{\bar{E}}_{1s'}, \dot{\bar{H}}_{1s'}] - [\dot{\bar{E}}_{1s'}, \dot{\bar{H}}_{1s'}] \} \bar{x}_0 ds &= \\ = -2 \dot{\bar{C}}_{-s'} \int_{s_{11}} [\dot{\bar{E}}_{1s'}, \dot{\bar{H}}_{1s'}] \bar{x}_0 ds. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Такой же вид будет иметь после преобразований левая часть выражения (2.26). Из соотношений (2.25а) и (2.26) с учетом преобразований (2.27) найдем неизвестные коэффициенты $\dot{\bar{C}}_{-s'} = \dot{\bar{C}}_{-s'}$ и $\dot{\bar{C}}_{s'} = \dot{\bar{C}}_{s'}$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{C}}_{-s'} &= - \frac{\int_V (\dot{j}^z \dot{\bar{E}}_{s'} - \dot{j}^M \dot{\bar{H}}_{s'}) dV}{2 \int_{s_{11}} [\dot{\bar{E}}_{1s'}, \dot{\bar{H}}_{1s'}] \bar{x}_0 ds}; \quad (2.28) \\ \dot{\bar{C}}_{s'} &= - \frac{\int_V (\dot{j}^z \dot{\bar{E}}_{s'} - \dot{j}^M \dot{\bar{H}}_{s'}) dV}{2 \int_{s_{12}} [\dot{\bar{E}}_{1s'}, \dot{\bar{H}}_{1s'}] d\bar{s} \bar{x}_0} = \\ &= \frac{\int_V (\dot{j}^z \dot{\bar{E}}_{-s'} - \dot{j}^M \dot{\bar{H}}_{-s'}) dV}{2 \int_{s_{12}} [\dot{\bar{E}}_{1-s'}, \dot{\bar{H}}_{1-s'}] \bar{x}_0 ds}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для примера используем выражение (2.29) для расчета электромагнитного поля волны H_{10} , возбуждаемой в прямоугольном волноводе бесконечно тонким штырем, введенным в волновод в точке с координатами $x_0 = d$ и $z_0 = 0$ и имеющим высоту l (рис. 2.6). В этом случае плотность тока проводимости, протекающего по штырю, может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{j}^z = \bar{y}_0 I(y) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0), \quad (2.30)$$

где $I(y)$ — функция распределения тока, протекающего по штырю; $\delta(x - x_0)$ и $\delta(z - z_0)$ — дельта-функция Дирака [1].

Система собственных волн $\dot{\bar{E}}_{1\pm s'}$, $\dot{\bar{H}}_{1\pm s'}$ для поперечных составляющих волны H_{10} в соответствии с (1.45) при $x = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_{1s'} = \dot{\bar{E}}_{1-s'} &= -\bar{y}_0 i \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x; \\ \dot{\bar{H}}_{1\pm s'} &= \pm \bar{x}_0 i \frac{\Gamma_{10}}{g_{10}^2} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Продольная составляющая поля \bar{E} в данном случае отсутствует ($\dot{\bar{E}}_x = 0$).

Интеграл в знаменателе выражения (2.29) при подстановке в него составляющих полей (2.31) с учетом $g_{10} = \frac{\pi}{a}$ примет вид

$$\begin{aligned} 2 \int_{s_{11}} [\dot{\bar{E}}_{1-s'}, \dot{\bar{H}}_{1-s'}] \bar{x}_0 ds &= \\ = 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\omega \mu_a \Gamma_{10}}{g_{10}^4} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx dy &= \\ = \omega \mu_a \Gamma_{10} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \cdot a \cdot b. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Подставляя выражение (2.30) для тока \dot{j}^z в числитель соотношения (2.29) и учитывая свойства дельта-функции

$$\int_0^a f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \delta(x - x_0) dx = 0 \quad \text{при } x_0 = d \text{ и } x_0 = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_V \dot{j}^z \dot{\bar{E}}_{-s'} dV &= \int_0^a \int_0^b \int_{-\Delta x}^{\Delta x} I(y) \dot{\bar{E}}_{-s'}(x) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = \\ &= \dot{\bar{E}}_{-s'}|_{x=d} \cdot \int_0^l I(y) dy. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Введем понятие действующей высоты l_g источника, определяемой из условия

$$I_0 l_g = \int_0^l I(y) dy, \quad (2.34)$$

где I_0 — амплитуда тока в точках возбуждения проводника. Подставляя промежуточные результаты (2.32) — (2.34) в соотношение (2.29), после преобразований получим

$$\dot{\bar{C}}_{s'} = -i \frac{I_0 l_g}{\Gamma_{10} S_0} \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{a} d, \quad (2.35)$$

где $S_0 = ab$.

Можно показать, что в рассматриваемом примере $\dot{\bar{C}}_{-s'} = \dot{\bar{C}}_{s'}$.

2.5. РАСЧЕТ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ШТЫРЕВОГО ВОЗБУДИТЕЛЯ

Одна из возможных схем возбуждения прямоугольного волновода с помощью штыря изображена на рис. 2.6. Как видно из рисунка, штырь одним концом подключен к центральному проводнику коаксиальной линии. Примем длину штыря равной $l = b$.

Под влиянием тока, протекающего по штырю, в волноводе возбуждаются волна типа H_{10} , распространяющаяся в обе стороны от штыря, и волны высших типов, находящиеся в закры-

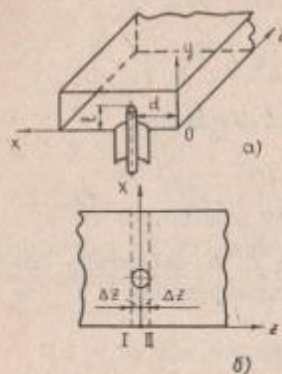


Рис. 2.6

ческом режиме. В общем случае входное сопротивление штыря комплексное: активная часть сопротивления характеризует мощность, передаваемую волне H_{10} в волноводе, а реактивная характеризует реактивную мощность полей высших волн, локализованную вблизи штыря. Чтобы вся энергия из коаксиальной линии, питающей штырь, без отражений передавалась в волновод, входное сопротивление штыря должно быть активным и равным волновому сопротивлению коаксиальной линии.

Определим входное сопротивление штыря в волноводе. Для упрощения анализа предположим, что размер узкой стенки волновода, а следовательно, и длина штыря много меньше длины волны. В этом случае плотность поверхностного тока вдоль штыря можно принять равномерной. Амплитуду тока проводимости на штыре будем считать заданной.

Проведем на расстоянии $\Delta x = r_0$ (r_0 — радиус штыря) две воображаемые плоскости I и II, перпендикулярные оси волновода (рис. 2,6,б). Так как штырь возбуждает в каждом из этих сечений волны равной амплитуды, можно ограничиться определением мощности, проходящей, например, через сечение 1, и удвоить полученный результат. Поток энергии через сечение 1

$$\tilde{P}_I = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \dot{E}_y \dot{H}_x dx dy, \quad (2.36)$$

где величина \dot{E}_y определяется из равенства (3.74) при $x = r_0$, а \dot{H}_x находится из соотношения

$$\dot{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} \Big|_{|x|=r_0} = -\frac{4\dot{I}_y}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-i\dot{\Gamma}_m r_0}. \quad (2.37)$$

Подставляя (3.74) и (2.37) в (2.36), перемножая ряды и учитывая, что

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} a/2, & \text{если } m=n; \\ 0, & \text{если } m \neq n, \end{cases}$$

получаем

$$\tilde{P}_I = \dot{I}_y^2 \frac{4b\omega\mu_0}{a\pi^2\Gamma_1} \sin^2 \frac{\pi d}{a} + \dot{I}_y^2 \frac{4b\omega\mu_0}{a\pi^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi d}{a}}{\dot{\Gamma}_m} e^{-2i\dot{\Gamma}_m r_0}.$$

Так как согласно (1.23) $\frac{\omega\mu_0}{\Gamma_1} = Z_{H_{10}}$ и при стандартных размерах волновода можно принять $\dot{\Gamma}_m \approx -i \frac{m\pi}{a}$ ($m \geq 2$), то

$$\tilde{P}_I \approx \dot{I}_y^2 \frac{4bZ_{H_{10}}}{\pi^2 a} \sin^2 \frac{\pi d}{a} + i\dot{I}_y^2 \frac{4bZ_{H_{10}}\Gamma_1}{\pi^3} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi d}{a}}{m} e^{-\frac{2m\pi}{a}r_0}. \quad (2.38)$$

Бесконечный ряд (2.38) совпадает с рядом (3.78), если в последнем положить $x = d$ и $|x| = 2r_0$. Подставляя (3.78) в (2.38), находим мощность, отдаваемую штырем в волновод:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{P}_I + \tilde{P}_0 = 2\tilde{P}_I = \dot{I}_y^2 \frac{8bZ_{H_{10}}}{\pi^2 a} \sin^2 \frac{\pi d}{a} + \frac{i\dot{I}_y^2 8Z_{H_{10}}\Gamma_1 b}{\pi^3} \times \\ &\times \left[\frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi r_0}{a} - \cos \frac{2\pi d}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi r_0}{a} - 1} - \sin^2 \frac{\pi d}{a} e^{-\frac{2\pi r_0}{a}} \right]. \quad (2.39) \end{aligned}$$

Но, с другой стороны, мощность, отдаваемая штырю питающей его коаксиальной линией,

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \dot{I}_y^2 \dot{Z}_{gx}, \quad (2.40)$$

где \dot{Z}_{gx} — входное сопротивление штыря.

Поскольку мощности, определяемые из равенств (2.39) и (2.40), должны совпадать,

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{gx} = R_{gx} + iX_{gx} &= \frac{16}{\pi^2} Z_{H_{10}} \frac{b}{a} \sin^2 \frac{\pi d}{a} + i \frac{16}{\pi^2} \frac{bZ_{H_{10}}\Gamma_1}{\pi} \times \\ &\times \left[\frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi r_0}{a} - \cos \frac{2\pi d}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi r_0}{a} - 1} - \sin^2 \frac{\pi d}{a} e^{-\frac{2\pi r_0}{a}} \right]. \quad (2.41) \end{aligned}$$

Формула (2.41) применима при $b/\lambda \leq (0,15 \div 0,2)$; $r_0 \ll \lambda$; $r_0 \ll d$ и $r_0 \ll a-d$.

Полученным соотношением (2.41) пользуются и в том случае, когда между торцом штыря и верхней стенкой волновода имеется небольшой зазор. В этом случае торцевая емкость получается весьма большой, в результате чего распределение тока по штырю приближается к равномерному. Параметры такого штыря мало отличаются от параметров штыря, введенного на полную высоту волновода.

Глава 3. НЕОДНОРОДНОСТИ В ВОЛНОВОДНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

3.1. ОБЩИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ВОЛНОВОДНОМ ТРАКТЕ

Неоднородностью является любой элемент или совокупность элементов, введение которых в регулярный волновод приводит к изменению в структуре электромагнитных полей в этом волноводе, т.е. к нарушению регулярности.

К неоднородностям относятся устройства, обеспечивающие возбуждение электромагнитных волн (см. п. 2.3); согласующие устройства в виде диафрагм, штырей, плавных или ступенчатых переходов, предназначенные для устранения отраженной волны в волноводе; разветвления волноводов, скачкообразные изменения размеров поперечного сечения волноводов и другие виды неоднородностей.

Как правило, волноводные линии передачи работают в одно-волновом режиме, когда для основной волны имеет место режим прозрачности, а высшие типы волн испытывают отсечку, т.е. находятся в закритическом режиме.

Под действием основной волны на неоднородностях индуцируются токи, которые также являются источниками электромагнитного поля в волноводе. Указанные токи возбуждают в волноводе основную и высшие типы волн. Основная волна распространяется в обе стороны от неоднородности. Поэтому на участке волновода между генератором и неоднородностью существуют прямая волна, распространяющаяся от генератора, и встречная волна, распространяющаяся к генератору. Последняя представляет собой волну, отраженную от неоднородности. Высшие типы волн, возбужденные неоднородностью, затухают по мере удаления в обе стороны от нее, и на расстояниях порядка длины волны от неоднородности их амплитуда оказывается пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой основной волны.

С учетом вышеизложенного электрическое и магнитное поля в области 1 от генератора до неоднородности представим в соответствии с (1.47) и (1.48) в виде суммы прямой волны единичной амплитуды, волны, отраженной от неоднородности, и бесконечного числа волн высших типов, затухающих по мере удаления от неоднородности в сторону к генератору:

$$\vec{E}^I = \vec{E}_0^I e^{-i\Gamma_0^I x} + \vec{R} \vec{E}_0^I e^{i\Gamma_0^I x} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{a}_{sq}^I \vec{E}_{sq}^I e^{i\Gamma_{sq}^I x}; \quad (3.1)$$

$$\vec{H}^I = \vec{H}_0^I e^{-i\Gamma_0^I x} + \vec{R} \vec{H}_0^I e^{i\Gamma_0^I x} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{a}_{sq}^I \vec{H}_{sq}^I e^{i\Gamma_{sq}^I x}. \quad (3.2)$$

где \vec{E}_0^I , \vec{H}_0^I — векторы электрического и магнитного поля основной волны соответствующего волновода; \vec{R} — коэффициент отражения от неоднородности; \vec{E}_{sq}^I , \vec{H}_{sq}^I — векторы электрического и магнитного поля собственных волн соответствующего волновода, определяемые по формулам (1.45) и (1.63); \dot{a}_{sq}^I — амплитуды собственных волн соответствующего волновода.

В области II за неоднородностью электрическое и магнитное поле запишется в виде

$$\vec{E}^{\bar{I}} = \dot{b}_0^{\bar{I}} \vec{E}_0^{\bar{I}} e^{-i\Gamma_0^{\bar{I}} x} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{b}_{sq}^{\bar{I}} \vec{E}_{sq}^{\bar{I}} e^{-i\Gamma_{sq}^{\bar{I}} x}. \quad (3.3)$$

$$\vec{H}^{\bar{I}} = \dot{b}_0^{\bar{I}} \vec{H}_0^{\bar{I}} e^{-i\Gamma_0^{\bar{I}} x} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{b}_{sq}^{\bar{I}} \vec{H}_{sq}^{\bar{I}} e^{-i\Gamma_{sq}^{\bar{I}} x}, \quad (3.4)$$

где $\dot{b}_0^{\bar{I}}$ и $\dot{b}_{sq}^{\bar{I}}$ — амплитуды собственных волн соответствующего волновода в области II.

Энергия волн высших типов, возникающих на неоднородности и находящихся в закритическом режиме, локализована вблизи неоднородности и не передается ни в нагрузку, ни к генератору, т.е. является реактивной запасенной энергией. В зависимости от типов высших волн вблизи неоднородности может быть сконцентрировано электрическое или магнитное поле, что равносильно появлению в этих сечениях сопротивлений, носящих емкостный или индуктивный характер. Эти сопротивления включаются в линию, эквивалентную волноводу, параллельно, последовательно или в какой-либо комбинации в зависимости от характера неоднородности.

Для определения параметров неоднородности необходимо найти ток, протекающий по этой неоднородности. По найденному току определяются амплитудные коэффициенты \dot{a}_{sq}^I и $\dot{b}_{sq}^{\bar{I}}$ собственных волн, возбужденных этим током, коэффициент отражения и реактивность, вносимая неоднородностью в линию передачи, эквивалентную волноводной.

Одним из наиболее эффективных методов определения параметров неоднородностей является метод интегрального уравнения [9]. Интегральным называют уравнение вида

$$\int_a^b K(x, x') \cdot j(x') dx' = \varphi(x'), \quad (3.5)$$

которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла. В приведенном уравнении неизвестная функция $j(x')$ является функцией одной переменной; $K(x, x')$ и $\varphi(x)$ — заданные функции; функцию $K(x, x')$ называют ядром интегрального уравнения. В общем случае неизвестная функция, стоящая под знаком интеграла, может являться функцией нескольких переменных.

Для перехода к интегральному уравнению в задаче о параметрах волноводных неоднородностей необходимо выразить поле в волноводе через неизвестный ток соответствующего элемента:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_r(\vec{j}), \quad (3.6)$$

$$\dot{\tilde{E}} = \dot{\tilde{E}}_0 + \dot{\tilde{E}}_1(\dot{f}), \quad (3.6)$$

где \vec{E}_0 — поле основной волны, возбуждаемой в волновомде генератором; $\vec{E}_t(\vec{r})$ — поле, возбуждаемое током, текущим по неоднородности. Переход к граничным значениям \vec{E} на поверхности неоднородности приводит к интегральному уравнению для неизвестного тока. Если неоднородностью является металлический элемент конструкции волноводного тракта, то на поверхности этого элемента касательная составляющая поля \vec{E}_t равна нулю:

$$\vec{E}_{0t} + \vec{E}_{tt}(\vec{r}) = 0. \quad (3.7)$$

$$\dot{\vec{E}}_{0t} + \dot{\vec{E}}_{1t}(\dot{f}) = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) представляет собой интегральное уравнение относительно тока \dot{j} .

В практических задачах не всегда удается получить точное решение интегрального уравнения. Поэтому существуют способы приближенного решения, с помощью которых интегральное уравнение может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений, что удобно при проведении численных расчетов на ЭВМ. Среди способов приближенного решения интегрального уравнения широко используется в настоящее время метод моментов [8].

Интегральное уравнение (3.5) можно записать символически в операторной форме

$$Lf = \varphi, \quad (3.8)$$

где L - интегральный оператор; $Lj = \int_a^b K(x, x') j(x') dx'$; j и φ - соответственно неизвестная и известная функции.

Уравнение (3.8) можно свести к матричному путем представления неизвестной функции в виде ряда с конечным числом членов по соответствующим базисным функциям ψ_n , например,

$$j = \sum_{n=1}^N c_n \psi_n, \quad (3.9)$$

C_n - неизвестные коэффициенты разложения.

Тогда интегральное уравнение (3.8) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^N C_n (L\varphi_n) = \varphi. \quad (3.10)$$

Согласно методу моментов введем в правую и левую части выражения (3.10) некоторую так называемую весовую или пробную функцию Φ_K . Тогда получим следующее матричное уравнение:

$$\sum_{n=1}^N C_n \langle \Phi_k, L \psi_n \rangle = \langle \Phi_k, \psi \rangle, \quad (3.11)$$

где $\langle \Phi_k, L \Psi_n \rangle = \int_V \Phi_k L \Psi_n dV$ называется скалярным произведением функций Φ_k и $L \Psi_n$, определенных в объеме V . Вместо объема V может фигурировать поверхность S или линия L .

Полученное матричное уравнение (3.11) можно записать в виде системы, состоящей из N линейных алгебраических уравнений:

[illegible]

Таким образом, применение метода моментов позволяет свести интегральное уравнение (3.8) к системе алгебраических уравнений (3.12), из решения которой определяются коэффициенты C_n . Количество уравнений в системе (3.12) определяется требуемой точностью решения.

Для рассматриваемых задач о неоднородностях в волноводах в качестве базисных и весовых функций удобно использовать собственные функции соответствующих волноводов, поскольку в этом случае удастся вычислить интегралы аналитически.

Для случая, когда весовые функции совпадают с базисными, метод моментов носит название метода Галеркина.

3.2. ДИАФРАГМЫ В ВОЛНОВОДАХ

Диафрагмами называют тонкие поперечные проводящие перегородки, частично перекрывающие сечение волновода. Наиболее широкое применение диафрагмы получили в качестве согласующих устройств. Устанавливаемая в определенном сечении, диафрагма вызывает в волноводе отраженную волну, определяя ее амплитуду и фазу. Амплитуду и фазу подбирают так, чтобы компенсировать волну, отраженную от нагрузки.

Согласно правилам разложения в ряд Фурье [1], из (3.16) получаем соотношения

$$1 + \tilde{R} = \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_t(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{10}^I(S_1) dS_1, \quad (3.18)$$

$$\dot{a}_{sq}^I = \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_t(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{1sq}^I(S_1) dS_1, \quad (3.19)$$

$$\dot{b}_{sq}^{\bar{I}} = \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_t(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}}(S_1) dS_1. \quad (3.20)$$

Выражение для $\dot{b}_0^{\bar{I}}$ получается из (3.20) при $s = 0$ и $q = 2$.

Подставим найденные коэффициенты (3.18) – (3.20) в выражение (3.17). После преобразований получим соотношение

$$2Y_0^I \dot{\tilde{E}}_{10}^I = \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \dot{Y}_{sq}^I \dot{\tilde{E}}_{1sq}^I \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_t(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{1sq}^I(S_1) dS_1 + \\ + \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \dot{Y}_{sq}^{\bar{I}} \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}} \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_t(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}}(S_1) dS_1, \quad (3.21)$$

которое представляет собой интегральное уравнение для электрического поля $\dot{\tilde{E}}_t(S_1)$ в отверстии S_1 .

Если в области II волновод имеет такие же параметры, что и в области I, то в уравнении (3.21) $\dot{Y}_{sq}^I = \dot{Y}_{sq}^{\bar{I}} = \dot{Y}_{sq}$; $\dot{\tilde{E}}_{1sq}^I = \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}} = \dot{\tilde{E}}_{1sq}$. С учетом этих соотношений получим интегральное уравнение вида

$$Y_0 \dot{\tilde{E}}_{10} = \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \dot{Y}_{sq} \dot{\tilde{E}}_{1sq} \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_t(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{1sq}(S_1) dS_1. \quad (3.22)$$

Для численного решения интегрального уравнения (3.22) воспользуемся методом моментов (см. п. 3.1). Представим неизвестное поле $\dot{\tilde{E}}_t(S_1)$ в отверстии S_1 в виде разложения по собственным функциям соответствующего волновода, имеющего размеры, равные размерам отверстия диафрагмы:

$$\dot{\tilde{E}}_t(S_1) = \sum_{p=1}^2 \sum_{\nu=1}^{N_p} \dot{c}_{\nu p} \cdot \dot{\tilde{E}}_{1\nu p}(S_1), \quad (3.23)$$

где N_p ($p = 1, 2$) – число собственных волн каждого типа, учитываемых в разложении. Подставив выражение (3.23) в интегральное уравнение (3.22), получим

$$Y_0 \dot{\tilde{E}}_{10} = \left\{ \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \dot{Y}_{sq} \dot{\tilde{E}}_{1sq} \left[\sum_{p=1}^2 \sum_{\nu=1}^{N_p} \dot{c}_{\nu p} \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_{1\nu p}(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{1sq}(S_1) dS_1 \right] \right\}. \quad (3.24)$$

В качестве весовой функции выберем собственную функцию $\dot{\tilde{E}}_{1kp}(S_1)$ волновода, имеющего размеры, равные размерам отверстия S_1 . Вводя выбранную весовую функцию в уравнение (3.24), приведем интегральное уравнение (3.24) к матричному типу (3.11):

$$\langle \dot{\tilde{E}}_{1kp}(S_1), Y_0 \dot{\tilde{E}}_{10} \rangle = \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^{N_p} \dot{c}_{kp} \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \dot{Y}_{sq} \langle \dot{\tilde{E}}_{1kp}(S_1), \dot{\tilde{E}}_{1sq}(S_1) \rangle,$$

$$\dot{\tilde{E}}_{1sq} \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_{1\nu p}(S_1) \dot{\tilde{E}}_{1sq}(S_1) dS_1 \rangle. \quad (3.25)$$

В этом уравнении справа и слева присутствуют скалярные произведения функций, определенных в отверстии S_1 .

Матричное уравнение (3.25) представляет собой систему $(N_1 + N_2)$ линейных алгебраических уравнений вида (3.12), решая которую, находят коэффициенты $\dot{c}_{\nu p}$ – разложения (3.23) и, следовательно, определяют поле в отверстии S_1 , а затем по формулам (3.18) – (3.20) находят коэффициент отражения от диафрагмы и коэффициенты \dot{a}_{sq} и \dot{b}_{sq} собственных волн соответствующего волновода.

Кроме указанных параметров диафрагмы, определяют также эквивалентную проводимость диафрагмы, для чего используют формулу (3.64).

Эквивалентные схемы диафрагм в волноводе представлены на рис. 3.1,б – 3.3,б. В соответствии с эквивалентными схемами различают диафрагмы индуктивные (рис. 3.1,б), емкостные (рис. 3.2,б) и резонансные (рис. 3.3,б). Реактивная проводимость резонансной диафрагмы на той частоте, где реактивная запасенная энергия электрического поля равна реактивной энергии магнитного поля, обращается в нуль.

Рассмотрим в качестве примера особенности расчета основных параметров неоднородности в виде индуктивной диафрагмы, изображенной на рис. 3.1,а, помещенной в прямоугольный волновод, в котором волна H_{10} единичной амплитуды распространяется в направлении возрастания координаты x . У волны H_{10} составляющие электрического и магнитного полей не зависят от координаты y . Введение индуктивной диафрагмы не нарушает регулярности волновода вдоль этой оси. Поэтому все составляющие электромагнитного поля, образующиеся в результате дифракции волны H_{10} на диафрагме, не зависят от координаты y , т.е. ближнее поле описывается суперпозицией волн типа H_{m0} . Отсутствие вариаций поля по координате y предопределяет невозможность возбуждения волн E_{mn} .

Интегральное уравнение относительно неизвестного распределения поля в отверстии индуктивной диафрагмы будет иметь вид

$$Y_0 \sin \frac{\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^{(d_2-d_1)} E_t(x') \sin \frac{m\pi(x'+d_1)}{a} dx', \quad (3.26)$$

где $x' = x - d_1$ — координата, отсчитываемая в отверстии диафрагмы вдоль оси x ($x' = 0$ при $x = d_1$).

В соответствии с (3.23) поле в отверстии диафрагмы целесообразно представить в виде ряда

$$E_t(x') = \sum_{\nu=1}^N C_{\nu} \sin \frac{\nu\pi x'}{d_2-d_1},$$

а в качестве весовой выбрать функцию

$$P_k = \sin \frac{k\pi x'}{d_2-d_1}.$$

3.3. СКАЧКООБРАЗНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ВОЛНОВОДА

Рассмотрим задачу о сочленении двух волноводов с разными размерами поперечного сечения, изображенных на рис. 3.4. Неоднородности такого типа используются в согласующих устройствах и трансформаторах типов волн.

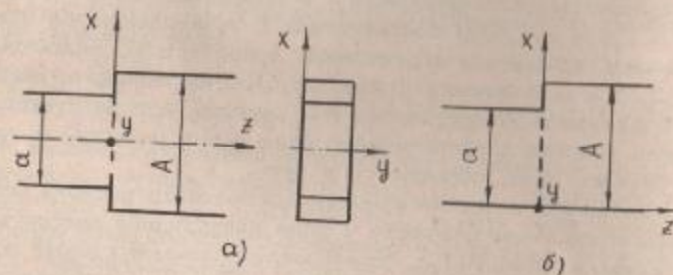


Рис. 3.4

В соответствии с общими соображениями о влиянии неоднородности в волноводе на волновые процессы в нем, изложенными в параграфе 3.1, и при условии одноволнового режима в волноводе электромагнитные поля в области I до стыка волноводов и в области II за стыком будут описываться выражениями (3.1)–(3.4), в которых $\vec{E}_{sq}^I, \vec{H}_{sq}^I$ — собственные волны волновода, имеющего поперечный размер a ; $\vec{E}_{sq}^II, \vec{H}_{sq}^II$ — собственные волны волновода, имеющего поперечный размер A .

Для сечения $x = 0$ волновода, где происходит скачкообразное изменение размера, запишем граничные условия электродинамики, отражающие непрерывность касательных составляющих полей на общем отверстии S_1 двух волноводов, имеющем в плоскости xOx на рис. 3.4 размер a :

$$\vec{E}_t^I = \vec{E}_t^{II} = \vec{E}_t(S_1); \quad (3.27)$$

$$\vec{H}_t^I = \vec{H}_t^{II} = \vec{H}_t(S_1), \quad (3.28)$$

где $\vec{E}_t(S_1), \vec{H}_t(S_1)$ — функции, описывающие неизвестное распределение электрического и магнитного полей в сечении, где происходит изменение размера волновода.

Подставим в выражения (3.27) и (3.28) значения касательных составляющих полей \vec{E} и \vec{H} , полученные из (3.1) – (3.4) при $x = 0$. Тогда граничные условия на общем отверстии S_1 стыка двух волноводов будут записаны в виде выражений (3.16) и (3.17), полученных для диафрагмы в волноводе. Коэффициент отражения R от неоднородности в виде стыка двух волноводов и амплитудные коэффициенты собственных волн \vec{a}_{sq}^I и \vec{b}_{sq}^{II} в узком и широком волноводах будут описываться формулами (3.18), (3.19) и (3.20). Подставив вместо коэффициентов \vec{R}, \vec{a}_{sq}^I и \vec{b}_{sq}^{II} их выражения (3.18) – (3.20) в граничное условие (3.17) для касательных составляющих магнитного поля в отверстии S_1 , получим интегральное уравнение, в котором неизвестной функцией под знаком интеграла является электрическое поле $\vec{E}_t(S_1)$ в сечении стыка волноводов:

$$2Y_0^I E_{10}^I = \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} Y_{sq}^I \vec{E}_{1sq}^I \iint_{S_1} \vec{E}_t(S_1) \cdot \vec{E}_{1sq}^I dS_1 + \\ + \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} Y_{sq}^{II} \vec{E}_{1sq}^{II} \iint_{S_1} \vec{E}_t(S_1) \cdot \vec{E}_{1sq}^{II} dS_1. \quad (3.29)$$

Воспользуемся методом моментов (см. п. 3.1) для приведения полученного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого представим неизвестное поле $\vec{E}_t(S_1)$ в отверстии S_1 в виде разложения по собственным функциям волновода, из двух соединяемых имеющего меньший поперечный размер

$$\vec{E}_t(S_1) = \sum_{p=1}^2 \sum_{\nu=1}^{N_p} \vec{c}_{\nu p} \vec{E}_{1\nu p}^I(S_1) \quad (3.30)$$

(где N_p ($p = 1, 2$) — число собственных волн каждого типа, учитываемых в разложении), и подставим выражение (3.30) для неизвестного поля в интегральное уравнение (3.29):

$$2Y_0^I \dot{\tilde{E}}_{10}^I = \sum_{q=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[\dot{Y}_{sq}^I \dot{\tilde{E}}_{1sq}^I \sum_{p=1}^2 \sum_{\nu=1}^{N_p} \dot{C}_{\nu p} \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_{1\nu p}^I(S_1) \dot{\tilde{E}}_{1sq}^I(S_1) dS_1 + \right. \\ \left. + \dot{Y}_{sq}^{\bar{I}} \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}} \sum_{p=1}^2 \sum_{\nu=1}^{N_p} \dot{C}_{\nu p} \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_{1\nu p}^I(S_1) \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}}(S_1) dS_1 \right]. \quad (3.31)$$

В качестве весовой функции выберем собственную функцию $\Phi_k = \dot{\tilde{E}}_{1kp}^I(S_1)$ волновода, имеющего размер a в плоскости xOx (рис. 3.4). Вводя выбранную весовую функцию в уравнение (3.31), приведем интегральное уравнение (3.31) к матричному уравнению типа (3.11)

$$\langle \dot{\tilde{E}}_{1kp}^I, 2Y_0^I \dot{\tilde{E}}_{10}^I \rangle = \sum_{q=1}^2 \sum_{\nu=1}^{N_p} \dot{C}_{\nu p} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\dot{Y}_{sq}^I \langle \dot{\tilde{E}}_{1kp}^I(S_1), \dot{\tilde{E}}_{1sq}^I \times \right. \\ \left. \times \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_{1\nu p}^I(S_1) \cdot \dot{\tilde{E}}_{1sq}^I(S_1) dS_1 \rangle + \dot{Y}_{sq}^{\bar{I}} \langle \dot{\tilde{E}}_{1kp}^I(S_1), \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}} \iint_{S_1} \dot{\tilde{E}}_{1\nu p}^I(S_1) \dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}}(S_1) dS_1 \rangle \right], \quad (3.32)$$

где $\dot{\tilde{E}}_{1kp}^I$, $\dot{\tilde{E}}_{10}^I$, $\dot{\tilde{E}}_{1sq}^I$, $\dot{\tilde{E}}_{1\nu p}^I$ — собственные функции волновода меньшего размера поперечного сечения, функции $\dot{\tilde{E}}_{1sq}^{\bar{I}}$ — собственные функции волновода, имеющего больший размер поперечного сечения.

Матричное уравнение (3.32) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений, аналогичной (3.12), решая которую, находим коэффициенты $\dot{C}_{\nu p}$ разложения поля (3.30) в сечении стыка волноводов и, следовательно, определяем с заданной точностью поле $\dot{\tilde{E}}_t(S_1)$ в сечении стыка. По найденному полю $\dot{\tilde{E}}_t(S_1)$, используя соотношения (3.18)–(3.20), определяем далее неизвестные амплитуды волн \dot{a}_{sq}^I , \dot{b}_{sq}^I и коэффициент отражения \dot{R} , а затем по формуле (3.26) — эквивалентную проводимость неоднородности в виде скачкообразного изменения сечения волновода.

Рассмотрим некоторые особенности влияния скачкообразного изменения сечения волновода, показанного на рис. 3.4,а, на волновой процесс. Пусть из волновода меньшего размера на соотнесение падает волна основного типа соответствующего волновода (одноволновый режим). Если соединяемые волноводы круглые, то, в силу осевой симметрии, поле, возбужденное неоднородностью, по обе стороны от нее состоит из волн, имеющих ту же зависимость от азимутального угла φ , что и у падающей волны, т.е. в волноводах справа и слева от неоднородности возбуждаются волны типа H_{1n} и E_{1n} .

Рассмотрим влияние изменения сечения прямоугольного волновода в плоскости H (две различные ширины волновода a и A показаны на рис. 3.4,а) на волновой процесс. В этом случае удобно выбрать начало координат в середине широкой стенки, как показано на рис. 3.4,а. Так как рассматриваемая картина будет симметрична относительно оси y , то вид волнового процесса в точках, симметричных относительно оси y , должен быть одинаков, т.е. в волноводах будут возникать лишь нечетные гармоники. Это значит, что слева и справа от неоднородности будут возбуждаться волны типа $H_{m'0}$, где $m' = 1, 3, 5, \dots, (2m+1)$ при $m = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть волна H_{10} единичной амплитуды падает на неоднородность со стороны узкого волновода (рис. 3.4,а). В этом случае электрическое поле в области I до неоднородности и в области II после неоднородности может быть выражено следующими рядами:

$$\dot{\tilde{E}}^I = (e^{-i\Gamma_{10}^I x} + \dot{R} e^{i\Gamma_{10}^I x}) \cos \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_m \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{a}] e^{i\Gamma_{m'}^I x}; \quad (3.33)$$

$$\dot{\tilde{E}}^{\bar{I}} = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{b}_m \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{A}] e^{-i\Gamma_{m'}^{\bar{I}} x}.$$

Согласно правилам разложения в ряд Фурье четных функций из (3.33) получаем соотношения

$$1 + \dot{R} = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \dot{\tilde{E}}_t(x) \cos \frac{\pi x}{a} dx;$$

$$\dot{a}_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \dot{\tilde{E}}_t(x) \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{a}] dx;$$

$$\dot{b}_m = \frac{2}{A} \int_{-a/2}^{a/2} \dot{\tilde{E}}_t(x) \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{A}] dx.$$

Интегральное уравнение (3.29) в данном случае будет иметь следующий вид:

$$2Y_{10}^I \cos \frac{\pi x}{a} = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{Y}_m^I \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{a}] \int_{-a/2}^{a/2} \dot{\tilde{E}}_t(x) \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{a}] dx + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{Y}_m^{\bar{I}} \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{A}] \int_{-a/2}^{a/2} \dot{\tilde{E}}_t(x) \cos[(2m+1) \frac{\pi x}{A}] dx.$$

Далее по описанному выше алгоритму определяется поле $\vec{E}_t(x)$ и коэффициенты $\vec{R}, \vec{a}_m, \vec{b}_m$.

Если изменение размера широкой стенки волновода произошло так, как показано на рис. 3.4, б, а размер узкой стенки не изменился, то справа и слева от неоднородности будут возбуждаться волны типа H_{m0} , где $m = 1, 2, 3 \dots$.

3.4. ДИЭЛЕКТРИК В ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим распространение электромагнитной волны основного типа (одноволновый режим) в волноводе, заполненном по всему сечению слоистым диэлектриком (рис. 3.5). Наличие границ раздела между разнородными областями оказывает существенное влияние на распространение электромагнитных волн. Электромагнитная волна, падая на плоскую границу раздела двух диэлектрических сред с различными параметрами, частично проходит через нее, частично отражается от этой границы. Таким образом, на участке волновода от генератора до границы раздела поле представляет собой суперпозицию прямой (или падающей) волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , и отраженной волны того же типа, что и падающая, распространяющейся к генератору.

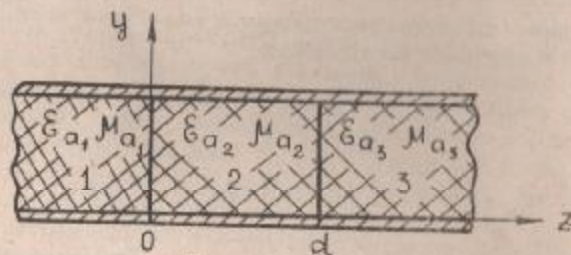


Рис. 3.5

Связь между падающей волной, отраженной и волной, прошедшей через границу раздела во вторую среду, устанавливается с помощью коэффициента отражения \vec{R} и коэффициента прохождения \vec{P} .

Коэффициентом отражения называется отношение комплексной амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей волны на поверхности раздела сред:

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}_{отр}}{\vec{E}_{пад}} \quad (3.34)$$

Коэффициентом прохождения (или преломления) называется отношение амплитуды волны, прошедшей во вторую среду, к амплитуде падающей волны на границе раздела двух сред:

$$\vec{P} = \frac{\vec{E}_{пр}}{\vec{E}_{пад}} \quad (3.35)$$

Предположим, что волновод, показанный на рис. 3.5, заполнен трехслойным диэлектриком, который на участке волновода от генератора до сечения с координатой $x = 0$ (область 1) имеет параметры ϵ_{a1}, μ_{a1} , где ϵ_a и μ_a — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика; на участке $0 \leq x \leq d$ (область 2) диэлектрик имеет параметры ϵ_{a2}, μ_{a2} , а на участке $x \geq d$ (область 3) — параметры ϵ_{a3}, μ_{a3} .

Электромагнитная волна, распространяясь в области 1 волновода, падает на плоскую границу раздела областей 1 и 2. В области 1 наряду с падающей волной возникает волна отраженная. В области 2 ($0 \leq x \leq d$), кроме волны, прошедшей через границу раздела областей 1-2 и распространяющейся в положительном направлении оси x , появляется волна, отраженная от границы раздела областей 2 и 3 (при $x = d$) и распространяющаяся в обратном направлении. В области 3 будет существовать прошедшая волна.

Необходимо определить электромагнитное поле во всех областях и рассчитать коэффициенты отражения и прохождения.

Для решения поставленной задачи запишем граничные условия электродинамики для касательных составляющих электрического и магнитного полей в волноводе на границах раздела областей 1-2 и 2-3. Касательные составляющие полей при переходе из одного диэлектрика в другой остаются непрерывными, поэтому можно записать на границе раздела первой и второй областей (при $x = 0$):

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}, \quad \vec{H}_{t1} = \vec{H}_{t2} \quad (3.36)$$

на границе раздела второй и третьей областей (при $x = d$)

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t3}, \quad \vec{H}_{t2} = \vec{H}_{t3} \quad (3.37)$$

Запишем поперечную составляющую поля E волны, распространяющейся в области 1 в положительном направлении оси x , в следующем виде:

$$\vec{E}_{1пад}^{(1)} = \vec{E}_{1л} e^{-i\Gamma_1 x} \quad (3.38)$$

где $\vec{E}_{1л}$ — заданная амплитуда падающей волны. Тогда с учетом (3.34) и (3.35) можно записать выражение для поперечных со-

ставляющих суммарного электрического и магнитного полей в каждой из трех выделенных областей:

поле в области 1 ($x \leq 0$):

$$\dot{E}_1^{(1)} = \dot{E}_{11} e^{-i\Gamma_1 x} + \dot{R}_{12} \dot{E}_{11} e^{i\Gamma_1 x}; \quad (3.39)$$

$$\dot{H}_1^{(1)} = \frac{1}{Z_1} (\dot{E}_{11} e^{-i\Gamma_1 x} - \dot{R}_{12} \dot{E}_{11} e^{i\Gamma_1 x}); \quad (3.40)$$

поле в области 2 ($0 \leq x \leq d$):

$$\dot{E}_1^{(2)} = \dot{r}_{12} \dot{E}_{11} e^{-i\Gamma_2 x} + \dot{r}_{12} \dot{R}_{23} \dot{E}_{11} e^{i\Gamma_2 x}; \quad (3.41)$$

$$\dot{H}_1^{(2)} = \frac{1}{Z_2} (\dot{r}_{12} \dot{E}_{11} e^{-i\Gamma_2 x} - \dot{r}_{12} \dot{R}_{23} \dot{E}_{11} e^{i\Gamma_2 x}); \quad (3.42)$$

поле в области 3 ($x \geq d$):

$$\dot{E}_1^{(3)} = \dot{r}_{12} \dot{r}_{23} \dot{E}_{11} e^{-i\Gamma_3 x}; \quad (3.43)$$

$$\dot{H}_1^{(3)} = \frac{1}{Z_3} \dot{r}_{12} \dot{r}_{23} \dot{E}_{11} e^{-i\Gamma_3 x}; \quad (3.44)$$

В выражениях (3.39) - (3.44): \dot{R}_{12} и \dot{R}_{23} - коэффициенты отражения от границ раздела областей 1-2 и 2-3 соответственно; \dot{r}_{12} , \dot{r}_{23} - коэффициенты прохождения через указанные границы областей; Z_1 , Z_2 и Z_3 - характеристические сопротивления волны в соответствующих областях волновода, описываемые выражением (1.23). В выражениях (3.39) - (3.44) учтена связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей (1.21) и (1.21a).

С учетом выражений (3.39) - (3.44) запишем граничные условия (3.36), (3.37):

$$\text{на границе раздела первой и второй областей (при } Z=0) \\ 1 + \dot{R}_{12} = \dot{r}_{12} (1 + \dot{R}_{23}); \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{Z_1} (1 - \dot{R}_{12}) = \frac{\dot{r}_{12}}{Z_2} (1 - \dot{R}_{23}), \quad (3.46)$$

и на границе раздела второй и третьей областей (при $x=d$)

$$e^{-i\Gamma_2 d} + \dot{R}_{23} e^{i\Gamma_2 d} = \dot{r}_{23} e^{-i\Gamma_3 d}; \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{Z_2} (e^{-i\Gamma_2 d} - \dot{R}_{23} e^{i\Gamma_2 d}) = \frac{1}{Z_3} \dot{r}_{23} e^{-i\Gamma_3 d}. \quad (3.48)$$

Из соотношений (3.45) - (3.48) определим коэффициенты отражения и коэффициенты прохождения волны в волноводе:

$$\dot{R}_{12} = \frac{(1 + Z_{32})(1 - Z_{12}) - (1 - Z_{32})(1 + Z_{12}) e^{-i2\Gamma_2 d}}{F}; \quad (3.49)$$

$$\dot{r}_{12} = \frac{2(1 + Z_{32})}{F}; \quad (3.50)$$

$$\dot{R}_{23} = \frac{(Z_{32} - 1) e^{-i2\Gamma_2 d}}{1 + Z_{32}}; \quad (3.51)$$

$$\dot{r}_{23} = \frac{2Z_{32} e^{-i(\Gamma_2 - \Gamma_3)d}}{1 + Z_{32}}, \quad (3.52)$$

где для удобства записи введены обозначения: $Z_{12} = \frac{Z_1}{Z_2}$;

$$Z_{32} = \frac{Z_3}{Z_2}; \quad F = (1 + Z_{12})(1 + Z_{32}) - (1 - Z_{12})(1 - Z_{32}) e^{-i2\Gamma_2 d}.$$

Если волновод в 1 и 3 областях заполнен диэлектриком с одинаковыми параметрами, например, воздухом, то выражения (3.49) - (3.52) упростятся, поскольку будет выполняться равенство $Z_{12} = Z_{32}$.

С помощью соотношений (3.49) - (3.52) по заданной амплитуде падающей в области 1 волны легко определить амплитуды волн во всех областях.

Используя соотношения (3.49) - (3.52), можно также найти коэффициенты отражения и коэффициенты прохождения, а также определить комплексные амплитуды полей в случае, когда толщина слоя d неограниченно возрастает, т.е. падающая волна проходит только через одну границу раздела областей 1 и 2. В этом случае из выражений (3.49) - (3.52) получаем соотношения

$$\dot{R}_{12} = \dot{R} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}; \quad (3.53)$$

и

$$\dot{r}_{12} = \dot{r} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (3.54)$$

известные из теории длинных линий, в которых вместо волновых сопротивлений линий ρ_1 и ρ_2 входят характеристические сопротивления волны соответствующего волновода.

На практике для решения рассмотренной задачи часто используют другой метод расчета, который основан на применении теории длинных линий к волноводам, работающим в одноволновом режиме. Под длинной линией подразумевается работающая в одноволновом режиме двухпроводная линия конечной длины,

большей длины волны. Как и в волноводах, процесс передачи энергии в длинной линии имеет волновой характер.

Теория длинных линий основывается на концепции падающих и отраженных волн тока и напряжения. Напряжение и ток в длинной линии рассматриваются как алгебраическая сумма напряжений и токов падающей и отраженной волн. Точно так же определяется напряженность электрического и магнитного полей в поперечном сечении волновода, причем коэффициент распространения в длинной линии может быть принят равным коэффициенту распространения волны в волноводе. Значительное сходство основных процессов в длинной линии и в волноводе, работающем в одноволновом режиме, позволяет использовать при анализе волноводов конечной длины основные положения теории длинных линий, которые приводятся ниже.

В произвольном сечении длинной линии отношение напряжения \dot{U} к току \dot{I} равно входному сопротивлению линии в этом сечении:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}} + I_{\text{отр}}} = \rho \frac{1 + \dot{R}_u}{1 - \dot{R}_u}, \quad (3.55)$$

где ρ — волновое сопротивление длинной линии, равное отношению $U_{\text{пад}} / I_{\text{пад}}$; \dot{R}_u — коэффициент отражения напряжения.

Разделив обе части равенства (3.55) на ρ , получим нормированное входное сопротивление длинной линии:

$$\dot{Z}'_{\text{вх}} = \frac{\dot{Z}_{\text{вх}}}{\rho} = \frac{1 + \dot{R}_u}{1 - \dot{R}_u}. \quad (3.56)$$

В волноводной линии передачи коэффициенту \dot{R}_u соответствует \dot{R}_E — коэффициент отражения по напряженности электрического поля:

$$\dot{Z}'_{\text{вх}} = \frac{1 + \dot{R}_E}{1 - \dot{R}_E}. \quad (3.56a)$$

В режиме бегущей волны ($\dot{R}_E = 0$) нормированное входное сопротивление волноводной линии передачи, как следует из формулы (3.56), равно единице.

При наличии отражения распределение амплитуды поля вдоль волновода за счет интерференции падающей и отраженной волн характеризуется чередованием минимумов и максимумов.

Отношение минимального значения амплитуды электрического (или магнитного) поля к максимальному значению амплитуды того же поля в линии передачи называют коэффициентом бегущей волны:

$$K_{\text{БВ}} = \frac{1 - |\dot{R}|}{1 + |\dot{R}|}, \quad (3.57)$$

где обозначено $\dot{R} = \dot{R}_E$.

На практике часто пользуются понятием коэффициента стоячей волны:

$$K_{\text{СВ}} = \frac{1}{K_{\text{БВ}}} = \frac{1 + |\dot{R}|}{1 - |\dot{R}|}. \quad (3.58)$$

В режиме бегущей волны $K_{\text{БВ}} = K_{\text{СВ}} = 1$. При полном отражении амплитуды отраженной и падающей волн равны, поэтому $|\dot{R}| = 1$, $K_{\text{БВ}} = 0$, $K_{\text{СВ}} = \infty$.

Во всех сечениях волновода, где амплитуда напряженности электрического поля максимальна или минимальна, входное сопротивление будет чисто активным и равным

$$R'_{\text{вх min}} = \frac{1 - |\dot{R}|}{1 + |\dot{R}|} \leq 1; \quad (3.59)$$

$$R'_{\text{вх max}} = \frac{1 + |\dot{R}|}{1 - |\dot{R}|} = \frac{1}{R'_{\text{вх min}}} \geq 1 \quad (3.60)$$

Сравнивая (3.59) и (3.60) с (3.57) и (3.58), замечаем, что $R'_{\text{вх max}} = K_{\text{СВ}}$, а $R'_{\text{вх min}} = K_{\text{БВ}}$.

Совместим начало системы координат ($x = 0$) с тем сечением волновода, где имеется неоднородность, полагая, что положительным значениям x соответствует перемещение от конца линии к генератору. Если принять фазу падающей волны нулевой в точке $x = 0$, можно записать выражение:

$$\dot{E}_{\text{пад}} = \dot{E}_{\text{с пад}} e^{i\Gamma x}; \quad \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{с отр}} e^{-i\Gamma x}, \quad (3.61)$$

где индекс s означает, что рассматриваемая величина зависит только от поперечных координат.

Из соотношений (3.61) находим

$$\dot{R} = \dot{R}_N \cdot e^{-2i\Gamma x}. \quad (3.61a)$$

Здесь

$$\dot{R}_N = |\dot{R}_N| \cdot e^{i\varphi} \quad (3.61b)$$

представляет собой коэффициент отражения, измеренный в сечении $x = 0$, где находится нагрузка. Величина \dot{R}_N называется коэффициентом отражения от нагрузки.

Нормированное сопротивление нагрузки \dot{Z}'_N можно определить, если известен коэффициент отражения от нагрузки,

$$\dot{Z}'_N = \frac{1 + \dot{R}'_N}{1 - \dot{R}'_N}. \quad (3.62)$$

Подставляя в (3.56a) выражение (3.61a) и (3.62), после преобразований получим формулу

$$\dot{Z}'_{\text{вх}} = \frac{\dot{Z}'_H + i \operatorname{tg} \Gamma x}{1 + i \dot{Z}'_H \operatorname{tg} \Gamma x}, \quad (3.63)$$

которая позволяет по известному нормированному сопротивлению нагрузки, включенной в сечении $x = 0$, определять нормированное входное сопротивление линии передачи в сечении на расстоянии x от нагрузки, т.е. осуществлять пересчет входных сопротивлений линии из одного сечения в другое.

Величина, обратная нормированному входному сопротивлению линии, называется нормированной входной проводимостью:

$$\dot{Y}'_{\text{вх}} = \frac{1}{\dot{Z}'_{\text{вх}}} = \frac{1 - \dot{R}}{1 + \dot{R}}; \quad \dot{Y}'_H = \frac{1}{\dot{Z}'_H} = \frac{1 - \dot{R}_H}{1 + \dot{R}_H}. \quad (3.64)$$

Для решения задачи о неоднородности в волновом регулярный волновод заменяем эквивалентной двухпроводной линией. Различные неоднородности представляем в виде сосредоточенных параметров, включенных в эту линию. Для определения параметров двухпроводной линии, эквивалентной волноводу, проведем математическую аналогию между ними.

Прежде всего нужно ввести понятие волнового сопротивления как отношение напряжения к току в линии в режиме бегущих волн. У волн E и H электрические и магнитные поля имеют вихревой характер. При этом величина контурного интеграла от напряженности электрического поля, который равен напряжению, или контурного интеграла от напряженности магнитного поля, который равен току, зависит не только от положения начальной и конечной точек контура интегрирования, но и от формы контура, что не позволяет установить однозначное соответствие между напряжением и током и напряженностью полей в линии. В двухпроводной линии, в которой энергия переносится волной типа T , такая неоднозначность отсутствует, что объясняется потенциальным характером поля этой волны.

В соответствии с этим волновое сопротивление ρ эквивалентной двухпроводной линии, которой заменили волновод, имеет вид

$$\rho = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = A \cdot Z_{\text{сн}}, \quad (3.65)$$

где $Z_{\text{сн}}$ — характеристическое сопротивление, вычисляемое по формулам (1.23); A — числовой коэффициент, зависящий от способа вычисления величин \dot{U} и \dot{I} в волновом. Неопределенность в выборе этого коэффициента существенного значения не имеет, так как в ряде задач, например, важно знать не сами волновые сопротивления, а отношение их.

В дальнейших рассуждениях примем $A = 1$ и будем считать, что волновое сопротивление эквивалентной длинной линии, которой мы заменяем волновод, равно характеристическому сопротивлению волны в волновом. Коэффициент распространения волны в эквивалентной линии принимается равным коэффициенту распространения Γ волны в волновом.

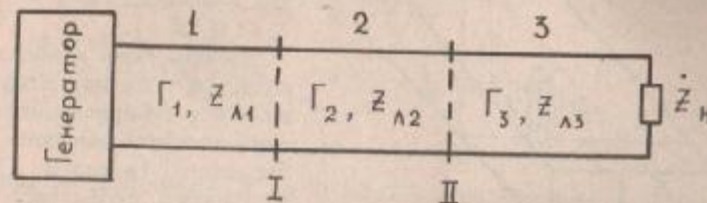


Рис. 3.6

С учетом вышесказанного задача о многослойном диэлектрике в волновом решается следующим образом. Волновод с трехслойным диэлектриком заменяется эквивалентной длинной линией, в которой выделяются три соответствующие области (рис. 3.6). В пределах каждой области линия имеет параметры (Γ и $\rho = Z_{\text{сн}}$), сходные с параметрами волновода в соответствующей области. Эти параметры при переходе от области к области меняются. Далее по заданному сопротивлению Z_H нагрузки на конце линии (волновода) определяется по формуле (3.63) входное сопротивление в сечении II, затем оно пересчитывается по той же формуле, но с учетом других параметров линии в области 2, в сечении I (см. рис. 3.6) и определяется коэффициент отражения и коэффициент прохождения волны в сечении I.

3.5. РЕАКТИВНЫЙ ШТЫРЬ В ВОЛНОВОДЕ

Реактивным штырем называется металлический проводник, введенный в волновод. Рассмотрим тонкий штырь в прямоугольном волновом, ось которого параллельна узкой стенке волновода (рис. 3.7).

Эквивалентная схема тонкого реактивного штыря, как и в случае диафрагмы, — чисто реактивное сопротивление, включенное в линию параллельно.

Будем рассматривать штырь, равный по высоте размеру b узкой стенки волновода, так как при высоте штыря $l < b$ электродинамический анализ его представляет значительные трудности.

При высоте штыря $l = b$ введение его в волновод не нарушает регулярности волновода вдоль оси y , поэтому ближе

поле полностью описывается волнами типа H_{m0} . Для упрощения анализа примем, что штырь выполнен из идеального проводника, его радиус много меньше длины волны ($r_0 \ll \lambda$), размера широкой стенки волновода ($r_0 \ll a$) и расстояния до любой из боковых стенок волновода ($r_0 \ll d$; $r_0 \ll a-d$).

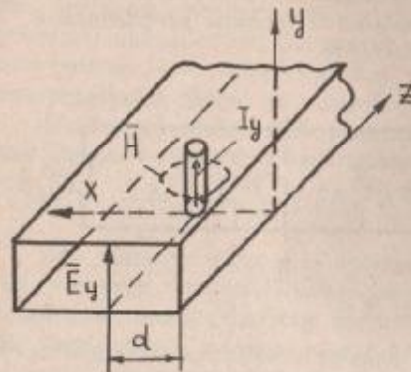


Рис. 3.7

Полное поле в волноводе при наличии штыря является суперпозицией двух полей: первичного падающего (волна H_{10}) и вторичного, созданного токами, наведенными на штырь. Так как силовые линии магнитного поля волны H_{m0} перпендикулярны оси штыря, ток проводимости ориентирован вдоль оси штыря. Ввиду малого диаметра штыря будем пренебрегать изменением амплитуд и фаз магнитного поля по периметру штыря и считать, что токи проводимости по всей поверхности имеют одинаковую амплитуду и фазу.

Введем понятие эквивалентной объемной плотности тока, считая ее одинаковой во всех точках поперечного сечения, $j_y = I_y / \pi r_0^2$, где I_y — полный ток, текущий по штырю. Реально из-за поверхностного эффекта ток течет по тонкому поверхностному слою.

Вне штыря ток равен нулю, поэтому

$$j_y = \begin{cases} \frac{I_y}{\pi r_0^2}, & \text{при } |x| \leq r_0 \\ 0 & \text{и } (d-r_0) \leq x \leq (d+r_0); \\ & \text{во всех остальных точках.} \end{cases} \quad (3.66)$$

Для определения вторичного поля, созданного током, текущим по штырю, воспользуемся неоднородным волновым уравнением Гельмгольца, которое в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_y = i\omega\mu_0 j_y. \quad (3.67)$$

Вторичное поле, как указывалось выше, является суперпозицией бесконечного числа волн H_{m0} , разбегающихся от штыря.

Поэтому при $x > 0$ $\dot{E}_y = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_m \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-i\tilde{\Gamma}_m x}$, а при $x < 0$

$\dot{E}_y = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_m \sin \frac{m\pi x}{a} e^{i\tilde{\Gamma}_m x}$. Эти равенства удобно записать в виде одного выражения:

$$\dot{E}_y = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_m \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-i\tilde{\Gamma}_m |x|}. \quad (3.68)$$

Подставляя (3.68) в (3.67), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{\Gamma}_m^2 \right) e^{-i\tilde{\Gamma}_m |x|} \right\} = i\omega\mu_0 j_y. \quad (3.69)$$

Умножая обе части равенства (3.69) на $\sin \frac{m\pi x}{a}$ и интегрируя по координате x от 0 до a , а по координате x от $-r_0$ до $+r_0$, приходим к выражению

$$\dot{a}_m \int_{-r_0}^{r_0} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{\Gamma}_m^2 \right) e^{-i\tilde{\Gamma}_m |x|} \right\} dx = \frac{2i\omega\mu_0}{a} \int_{-r_0}^{r_0} j_y \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (3.70)$$

Интеграл в левой части (3.70) при малом r_0

$$-2i\tilde{\Gamma}_m e^{-i\tilde{\Gamma}_m r_0} \approx -2i\tilde{\Gamma}_m. \quad (3.71)$$

Следовательно,

$$\dot{a}_m = -\frac{\omega\mu_0}{a\tilde{\Gamma}_m} j_y \int_{-r_0}^{r_0} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \approx \frac{4\omega\mu_0}{a\tilde{\Gamma}_m} r_0^2 j_y \sin \frac{m\pi d}{a}. \quad (3.72)$$

При записи (3.72) было использовано справедливое при малых r_0 равенство

$$\sin \left(\frac{m\pi r_0}{a} \right) / \frac{m\pi}{a} \approx r_0. \quad (3.73)$$

Подставляя (3.72) в (3.68), получаем

$$\dot{E}_y = -\frac{\omega\mu_0}{a} 4r_0^2 j_y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\Gamma}_m} \sin \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-i\tilde{\Gamma}_m |x|}. \quad (3.74)$$

Так как волновод является закрытым для всех волн, начиная с H_{20} , то при $m \geq 2$ можно приближенно принять $\tilde{\Gamma}_m \approx -i\frac{m\pi}{a}$. Поэтому ряд (3.74) можно записать в виде

$$\dot{E}_y = -\frac{\omega\mu_0}{a} 4r_0^2 j_y \left\{ \frac{1}{\tilde{\Gamma}_1} \sin \frac{\pi d}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\tilde{\Gamma}_1 |x|} + i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a}{m\pi} \sin \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-\frac{m\pi}{a} |x|} \right\}. \quad (3.75)$$

Для нахождения суммы ряда в (3.75) почленно продифференцируем этот бесконечный ряд по d .

$$\frac{\partial}{\partial d} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi d}{a} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}}{\frac{m\pi}{a}} e^{-\frac{m\pi}{a}|x|} \right) =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \cos \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-\frac{m\pi}{a}|x|}. \quad (3.76)$$

Если заменить входящие в (3.76) синус и косинус по формуле Эйлера, то каждая из получившихся четырех бесконечных сумм окажется сходящейся геометрической прогрессией со знаменателем $e^{-\frac{m\pi}{a}(|x|+i(x\pm d))}$. Выполняя суммирование по известной формуле для геометрической прогрессии, получаем равенство

$$\sum_{m=2}^{\infty} \cos \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-\frac{m\pi}{a}|x|} = \cos \frac{\pi d}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{\pi}{a}|x|} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{a}(d+x)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a}|x| \cos \frac{\pi}{a}(d+x)} - \frac{\sin \frac{\pi}{a}(d-x)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a}|x| - \cos \frac{\pi}{a}(d-x)} \right]. \quad (3.77)$$

Интегрируя обе части равенства (3.77) по d , находим сумму ряда в (3.75):

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{\frac{m\pi}{a}} e^{-\frac{m\pi}{a}|x|} = -\frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi d}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{\pi}{a}|x|} -$$

$$-\frac{a}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi|x|}{a} - \cos \frac{\pi(d-x)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi|x|}{a} - \cos \frac{\pi(d+x)}{a}}, \quad (3.78)$$

что позволяет с учетом (3.66) записать (3.68) в виде

$$\dot{E}_y = \frac{i\omega\mu_0}{a\pi} 4\dot{I}_y \left\{ -\frac{1}{i\Gamma_1} \sin \frac{\pi d}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{\pi}{a}|x|} + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{\pi} \left[\sin \frac{\pi d}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{\pi}{a}|x|} + \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi|x|}{a} - \cos \frac{\pi(d-x)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi|x|}{a} - \cos \frac{\pi(d+x)}{a}} \right] \right\} \quad (3.79)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках соотношения (3.79) соответствует двум бегущим по волноводу в обе стороны от штыря волнам типа H_{10} : одной, распространяющейся в том же направлении, что и падающая ($e^{-i\Gamma_1 x}$), и второй (отраженной), распространяющейся в направлении, противоположном направле-

нию распространения падающей волны ($e^{i\Gamma_1 x}$). Слагаемое в квадратных скобках описывает структуру ближнего реактивного поля по обеим сторонам от штыря.

Напряженность электрического поля падающей на штырь волны H_{10} единичной амплитуды записывается в виде

$$\dot{E}_{y\text{пад}} = \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\Gamma_1 x}. \quad (3.80)$$

Найденное поле \dot{E}_y (3.79) вместе с падающим на штырь полем (3.80) должно удовлетворять граничным условиям на поверхности штыря, т.е. при $x=r_0$ касательная составляющая электрического поля должна обращаться в нуль:

$$\dot{E}_y + \dot{E}_{y\text{пад}} = 0. \quad (3.81)$$

При условии постоянства полей на поверхности штыря равенство (3.81) можно применить к любой точке на поверхности штыря. Полагая, например, $x=0$ и $x=d-r_0$, получаем

$$\sin \frac{\pi(d-r_0)}{a} + \frac{i\omega\mu_0}{\pi a} 4\dot{I}_y \left\{ \frac{a}{\pi} \left(-\frac{\pi}{ia\Gamma_1} + 1 \right) \sin \frac{\pi d}{a} \sin \frac{\pi(d-r_0)}{a} + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{4\pi} \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi r_0}{a}}{1 - \cos \frac{\pi(2d-r_0)}{a}} \right\} = 0.$$

Это условие дает возможность определить ток \dot{I}_y . Так как $r_0 \ll d$ и $r_0 \ll a$, то $\sin \frac{\pi(d-r_0)}{a} \approx \sin \frac{\pi d}{a}$,

$$\ln \frac{1 - \cos \frac{\pi r_0}{a}}{1 - \cos \frac{\pi(2d-r_0)}{a}} \approx -2 \ln \left| \frac{2a}{\pi r_0} \sin \frac{\pi d}{a} \right|,$$

и поэтому

$$\frac{i\omega\mu_0}{\pi a} 4\dot{I}_y = - \frac{\frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi d}{a}}{\left(-\frac{\pi}{ia\Gamma_1} + 1 \right) \sin^2 \frac{\pi d}{a} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2a}{\pi r_0} \sin \frac{\pi d}{a} \right|}. \quad (3.82)$$

Амплитуда отраженной волны при единичной амплитуде падающей волны совпадает с величиной коэффициента отражения от штыря \tilde{R} и согласно (3.66), (3.73) и (3.82)

$$\tilde{R} = \tilde{a}_1 = - \frac{\frac{\pi}{ia\Gamma_1} \sin^2 \frac{\pi d}{a}}{\left(-\frac{\pi}{ia\Gamma_1} + 1 \right) \sin^2 \frac{\pi d}{a} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2a}{\pi r_0} \sin \frac{\pi d}{a} \right|}. \quad (3.83)$$

Нормированная проводимость в сечении $x=0$, где включен штырь, определяется по формуле (3.64) и равна $\dot{Y}' = 1 + i\tilde{B}'$, где

$$B' = \frac{2A}{a} = \frac{1}{-2 + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi d}{a} \ln \left| \frac{2a}{\pi c_0} \sin \frac{\pi d}{a} \right|} \quad (3.84)$$

Так как $r_0 \ll a$, то введение в волновод штыря, у которого $l = b$, соответствует параллельному включению в эквивалентную длинную линию индуктивности. Поэтому такой штырь называется индуктивным.

Индуктивный характер вносимого сопротивления, как и в случае индуктивной диафрагмы, объясняется тем, что реактивное поле вблизи штыря образуется волнами H_{m0} ($m \geq 2$), у которых $\tilde{W}_M > \tilde{W}_3$.

Когда высота штыря $l < b$, то в зазоре между торцом штыря и широкой стенкой волновода образуется повышенная концентрация энергии электрического тока (рис. 3.8), т.е. штырь нагружен на торцевую емкость, величина которой в случае тонкого штыря невелика. Поэтому распределение тока вдоль штыря близко к синусоидальному, как в линии, работающей в режиме холостого хода (см. рис. 3.8).

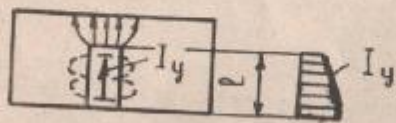


Рис. 3.8

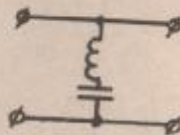


Рис. 3.9

Из теории длинных линий известно, что разомкнутый на конце отрезок линии длиной меньше $\lambda/4$ имеет емкостное, а при длине $\lambda/4 < l < \lambda/2$ — индуктивное входное сопротивление. Следовательно, при $l < \lambda/4$ в ближнем поле штыря $\tilde{W}_3 > \tilde{W}_M$ и введение штыря эквивалентно включению в линию параллельной емкости. При $\lambda/4 < l < \lambda/2$ в ближнем поле $\tilde{W}_M > \tilde{W}_3$ и штырь ведет себя как параллельная индуктивность. При длине $l = \lambda/4$ наступает резонанс, т.е. $\tilde{W}_3 = \tilde{W}_M$. Такая зависимость входного сопротивления от частоты характерна для последовательно-го контура. Поэтому эквивалентная схема тонкого штыря в общем случае имеет вид последовательного контура, включенного в линию параллельно (рис. 3.9). При резонансе входное сопротивление контура равно нулю, и волновод оказывается замкнутым накоротко. Вся энергия падающей волны полностью отражается от штыря. Реально ввиду конечной проводимости металла штыря модуль коэффициента отражения несколько меньше единицы, а коэффициент прохождения отличен от нуля.

При очень малом зазоре между торцом штыря и широкой стенкой волновода торцевая емкость весьма велика. В результате распределение тока вдоль штыря приближается к равномерному. Параметры такого штыря мало отличаются от параметров штыря высотой $l = b$.

Глава 4. ТЕОРИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

4.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В радиотехнике широко применяются колебательные контуры, представляющие собой параллельное соединение сосредоточенных индуктивности и емкости. Колебательный процесс в такой системе возникает в результате непрерывного обмена энергией между электрическим полем, сосредоточенным в конденсаторе, и магнитным полем, сосредоточенным в индуктивности. Величина добротности таких контуров в диапазонах длинных, средних и коротких волн меняется в пределах от нескольких сот до нескольких десятков единиц. Однако с дальнейшим повышением частоты и переходом в диапазон СВЧ добротность контуров с сосредоточенными индуктивностью и емкостью начинает резко уменьшаться по следующим причинам:

- возрастают потери на излучение, так как геометрические размеры контура становятся соизмеримыми с длиной волны;
- увеличивается с повышением частоты активное сопротивление контуров из-за поверхностного эффекта;
- уменьшается величина требуемой индуктивности, что приводит к уменьшению характеристического сопротивления контура и уменьшению добротности.

В сантиметровом диапазоне волн добротность обычных контуров становится такой низкой, что контур теряет свои резонансные свойства и не может быть использован. Поэтому в диапазоне сверхвысоких частот в качестве колебательных контуров применяют объемные резонаторы. Поясним переход к объемному резонатору от обычного колебательного контура.

Для этого рассмотрим несколько колебательных контуров простейшей формы, состоящих из одного витка индуктивности и двух пластин конденсатора (рис. 4.1, а). С целью уменьшения индуктивности увеличим токонесущую поверхность путем параллельного включения нескольких витков одинаковой формы (пунктир). При этом достигается также увеличение добротности системы. Включая все новые и новые витки, мы получим в пределе своего рода "тело вращения", представляющее собой некоторый объем, ограниченный проводящей оболочкой — (рис. 4.1, б).

В образовавшихся объемных резонаторах электромагнитное поле заключено внутри объема, ограниченного металлической поверхностью в виде тороида. Поэтому такие контуры называют тороидальными объемными резонаторами. Излучение у такого резонатора отсутствует, и его добротность очень высокая. Особенностью тороидального резонатора является то, что электрическое и магнитное поля в нем пространственно разделены. Электрическое поле в основном сосредоточено между пластинами конденсатора, а магнитное поле — в трубе. Резонаторы, подобные тороидальным, с

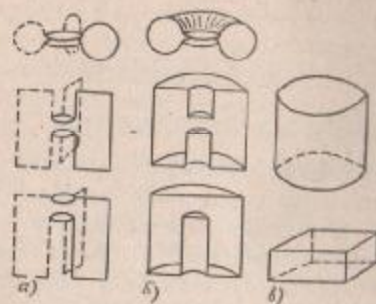


Рис. 4.1

пространственным разделением электрического и магнитного полей называют квазистационарными. Их можно рассчитывать с помощью понятий емкости и индуктивности методами теории цепей.

Для дальнейшего повышения резонансной частоты резонатора необходимо увеличить расстояние между пластинами конденсатора, при этом уменьшается емкость и увеличивается добротность. В итоге получаем две пластины, соединенные прямыми стенками. Полученные резонаторы называют в зависимости от формы пластин (рис. 4.1, в) круглыми или прямоугольными. Электрические и магнитные поля в них находятся в одном объеме, поэтому нельзя применить для их расчета методы теории цепей. Для определения параметров таких резонаторов необходимо решать краевую задачу электродинамики.

Объемные резонаторы имеют очень высокую добротность, которая при хорошем выполнении резонатора и элементов его перестройки может достигать десятков тысяч.

Размеры объемного резонатора соизмеримы с длиной волны, поэтому они находят применение в СВЧ-диапазоне на длинах волн короче одного метра.

Простейшие типы объемных резонаторов представляют собой часть пространства, ограниченного со всех сторон металлической оболочкой. Такие объемные резонаторы называют закрытыми. К ним относятся тороидальный резонатор, резонаторы в виде короткозамкнутых отрезков металлических волноводов (рис. 4.1, в), сферический резонатор и др.

Резонаторы, в которых отсутствует замкнутая металлическая оболочка, называют открытыми. Примером такого резонатора является отрезок диэлектрического волновода, торцы которого металлизированы (рис. 4.2). Из-за явления полного внутреннего отражения излучение такой системы незначительно.



Рис. 4.2

Широкое применение в радиотехнике СВЧ находят резонаторы на отрезках волноводов прямоугольного и круглого поперечного сечений, на отрезках коаксиальных линий, тороидальные резонаторы. Применяют объемные резонаторы в качестве колебательных систем генераторов и усилителей СВЧ, в качестве волномеров, фильтров, а также используют при изучении электрических свойств вещества.

Объемные резонаторы были исследованы и нашли применение в технике СВЧ несколько раньше волноводов. Основы теории их были разработаны в 30-е годы М.С. Нейманом.

Рассмотрим основные характеристики объемных резонаторов.

4.2. ЭНЕРГИЯ РЕЗОНАТОРА

Представим себе некоторый объем, ограниченный бесконечно проводящей замкнутой поверхностью и заполненный средой без потерь (рис. 4.3). В этом случае (так как потери на тепло и на излучение отсутствуют), уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = P_{cr} \quad (4.1)$$

Здесь W — электромагнитная энергия в объеме; P_{cr} — мощность стороннего источника. Под влиянием стороннего источника в объеме возникнут колебания. В некоторый мо-

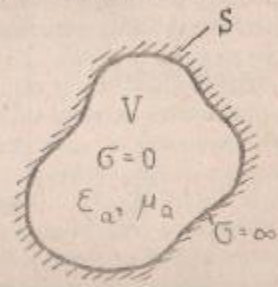


Рис. 4.3

мент времени сторонний источник отключаем. За счет запасенной в резонаторе энергии колебательный процесс будет продолжаться сколь угодно долго и в отсутствие источника. В резонаторе возникнут свободные (т.е. не связанные со сторонним источником) электромагнитные колебания. При $P_{cr} = 0$ равенство (4.1) примет вид

$$\frac{dW}{dt} = 0. \quad (4.2)$$

Это означает, что полная электромагнитная энергия, запасенная в изолированном от внешнего пространства объеме, при отсутствии потерь в любой момент времени остается постоянной. Однако соотношение между электрической и магнитной энергиями в объеме непрерывно меняется, так как происходит обмен энергией между электрическим и магнитным полями. Определим, чему равна полная электромагнитная энергия W в рассматриваемом объеме. Предположим, что поля \vec{E} и \vec{H} меняются во времени по гармоническому закону. Примем зависимость вектора \vec{E} от времени в виде $\vec{E} = \vec{E}_m \sin \omega_0 t$, где ω_0 — угловая частота свободных колебаний. В момент $t = 0$ напряженность электрического поля равна нулю. Равна нулю в этот момент и электрическая энергия поля, так как

$$W_E = \int_V \frac{\epsilon_a |\dot{\vec{E}}_m|^2}{2} dV = \frac{\epsilon_a \sin^2 \omega_0 t}{2} \int_V |\dot{\vec{E}}_m|^2 dV. \quad (4.3)$$

Полная энергия в объеме, как это следует из (4.2), не зависит от времени. Следовательно, в момент $t = 0$ вся энергия свободного колебания сосредоточена в магнитном поле, что при гармонических колебаниях означает сдвиг по фазе между полями \vec{E} и \vec{H} на $\frac{\pi}{2}$, т.е. $\vec{H} = \vec{H}_m \cos \omega_0 t$.

При этом энергия магнитного поля

$$W_H = \int_V \frac{\mu_a |\dot{\vec{H}}|^2}{2} dV = \frac{\mu_a (1 - \sin^2 \omega_0 t)}{2} \int_V |\dot{\vec{H}}_m|^2 dV. \quad (4.4)$$

Учитывая, что энергия электромагнитного поля $W = W_E + W_H$, а также условие (4.2), получим

$$\frac{dW}{dt} = \omega_0 \sin 2\omega_0 t \left[\frac{\epsilon_a}{2} \int_V |\dot{\vec{E}}_m|^2 dV - \frac{\mu_a}{2} \int_V |\dot{\vec{H}}_m|^2 dV \right] = 0.$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени, поэтому

$$\frac{\epsilon_a}{2} \int_V |\dot{\vec{E}}_m|^2 dV = \frac{\mu_a}{2} \int_V |\dot{\vec{H}}_m|^2 dV. \quad (4.5)$$

Это означает, что энергия электромагнитного поля в объемном резонаторе без потерь, оставаясь постоянной во времени, равна максимальному значению электрической или магнитной энергии.

4.3. РЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Основной задачей теории объемных резонаторов является определение частот свободных колебаний (резонансных частот) и определение структуры полей \vec{E} и \vec{H} . Задача определения полей в объеме V , ограниченном идеально проводящей поверхностью S (рис. 4.3), является краевой задачей, которая, например, для вектора \vec{E} формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= 0 & \text{в объеме } V, \\ \vec{E}_t = [\vec{n} \cdot \vec{E}] &= 0 & \text{на } S, \end{aligned}$$

где $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a = \frac{\omega^2}{V}$, решение этой задачи должно также удовлетворять условию $\text{div} \vec{E} = 0$, т.е. рассматриваются лишь соленоидальные решения. Решения краевой задачи образуют систему собственных функций, которым отвечают собственные значения k . Значения k образуют бесконечный дискретный ряд: $k_1, k_2, k_3, \dots, k_i, \dots$. Все k_i играют роль волновых чисел, возникающих в полости колебательных процессов. Каждому из них соответствует определенная собственная резонансная частота $\omega_{pi} = \frac{k_i}{V}$, где $V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ — скорость света в среде заполняющей объем V .

Магнитное поле объемного резонатора в рассматриваемой задаче определяется из второго уравнения Максвелла: $\vec{H} = i \frac{\text{rot} \vec{E}}{\omega \mu_a}$.

Таким образом, объемный резонатор представляет собой колебательную систему с бесконечным рядом резонансных частот, в общем случае не кратных друг другу. Колебание, которому соответствует наименьшая резонансная частота, называется основным. Резонансной частоте соответствует резонансная длина волны $\lambda_{pi} = \frac{V}{f_{pi}}$, где $f_{pi} = \frac{\omega_{pi}}{2\pi}$.

Как в волноводе, в объемном резонаторе могут быть возбуждены резонансные колебания различных видов с характерной для каждого вида конфигурацией электрического и магнитного полей.

Иногда в объемном резонаторе складываются условия, при которых резонансные частоты двух или большего числа колебаний с различной структурой полей совпадают. Такие типы колебаний называют вырожденными.

Отметим, что строгое решение краевой задачи удастся получить лишь для объемных резонаторов в виде прямоугольного параллелепипеда, круглого цилиндра, шара и некоторых других.

Объемные резонаторы сложной формы рассчитываются приближенными методами.

4.4. ДОБРОТНОСТЬ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Для характеристики реальных объемных резонаторов используется очень важный энергетический параметр — добротность объемного резонатора. Добротность резонатора характеризует относительную убыль энергии в процессе колебаний. Добротность объемного резонатора Q определяется отношением энергии W , запасенной в резонаторе, к энергии, затрачиваемой в течение одного периода колебаний T на покрытие потерь энергии W_n :

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_n} \quad (4.6)$$

Если учесть, что $\frac{W_n}{T} = \bar{P}_n$ — средняя мощность потерь; $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$, тогда выражение для добротности примет вид

$$Q = \omega_p \frac{W}{\bar{P}_n} \quad (4.7)$$

Очевидно, каждому виду колебаний объемного резонатора, характеризуемому резонансной частотой ω_{pi} , соответствует определенная мощность потерь и свое значение добротности.

Рассмотрим подробнее величины, входящие в выражение (4.7). Как было показано, энергия W , запасенная в объемном резонаторе, равна максимальной энергии электрического поля или максимальной энергии магнитного поля, т.е.

$$W = \frac{\epsilon_a}{2} \int_V |\dot{E}_m|^2 dV = \frac{\mu_a}{2} \int_V |\dot{H}_m|^2 dV \quad (4.8)$$

Средняя мощность потерь в объемном резонаторе в общем случае будет складываться из мощности потерь в проводящих стенках \bar{P}_{np} , мощности диэлектрических \bar{P}_d и магнитных потерь \bar{P}_m в среде, заполняющей объем V . Напомним, что средняя за период мощность потерь в проводящих стенках определяется выражением (1.101). Средняя мощность диэлектрических потерь

$$\bar{P}_d = \frac{\omega_p \epsilon_a''}{2} \int_V |\dot{E}_m|^2 dV \quad (4.8a)$$

где ϵ_a'' — мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости: $\epsilon_a'' = \epsilon_a \sin \delta$; δ — угол сдвига фазы между векторами \vec{E} и \vec{D} за счет инерционности процесса поляризации. Средняя мощность магнитных потерь дается соотношением

$$\bar{P}_m = \frac{\omega_p \mu_a''}{2} \int_V |\dot{H}_m|^2 dV \quad (4.8b)$$

где μ_a'' — мнимая часть комплексной магнитной проницаемости среды, заполняющей объем V . Учтем, что $\bar{P}_n = \bar{P}_{np} + \bar{P}_d + \bar{P}_m$, тогда выражение (4.7) примет вид

$$Q = \frac{\omega_p W}{\bar{P}_{np} + \bar{P}_d + \bar{P}_m} \quad (4.9)$$

Здесь принято, что добротность, обусловленную потерями в самом резонаторе, обозначают Q_0 и называют собственной добротностью резонатора. Если от резонатора отбирается мощность в нагрузку (\bar{P}_n), то выражение $Q_n = \omega_p \frac{W}{\bar{P}_{np} + \bar{P}_d + \bar{P}_m + \bar{P}_n}$ называют нагруженной добротностью. Иногда вводят понятие внешней добротности

$$Q_{en} = \omega_p \frac{W}{\bar{P}_n} \quad (4.9a)$$

Очевидно, что Q_0 , Q_n и Q_{en} связаны соотношением $1/Q_n = 1/Q_0 + 1/Q_{en}$.

Рассмотрим собственную добротность объемного резонатора с воздушным заполнением. При этом будем полагать, что потери в резонаторе будут обусловлены только потерями в стенках. Собственная добротность такого резонатора может быть выражена, например, через магнитное поле следующим соотношением:

$$Q_0 = \omega_p \frac{W}{\bar{P}_{np}} = \omega_p \mu_0 \int_V |\dot{H}_m|^2 dV / R_s \oint_S |\dot{H}_{mt}|^2 ds \quad (4.10)$$

Соотношение (4.10) справедливо для резонатора любой формы, работающего на любом типе колебаний. Для разных типов колебаний резонансные частоты и распределение полей будут разными, поэтому будут разными и собственные добротности.

При выводе (4.10) считали, что потери в резонаторе малы и конфигурация электрического и магнитного полей такая же, как в резонаторе без потерь.

Обычно стенки объемных резонаторов выполняют из немагнитных материалов (медь, посеребренная латунь), у которых $\mu_{anp} = \mu_0$. Тогда соотношение (4.10) можно записать в виде

$$Q_0 = 2 \int_V |\dot{H}_m|^2 dV / \delta^0 \oint_S |\dot{H}_{mt}|^2 ds \quad (4.11)$$

Если предположить, что магнитное поле внутри объема постоянно, то для оценки величины добротности получим приближенную формулу

$$Q_0 \approx \frac{2V}{\delta^0 S} \quad (4.12)$$

где V , S — объем и площадь внутренней поверхности объемного резонатора; δ^0 — глубина проникновения.

Из полученного выражения следует, что наиболее выгодной формой поверхности резонатора с точки зрения достижения максимальной добротности, является сферическая поверхность, для

которой V/S наибольшее. Выражение (4.12) позволяет также проследить зависимость добротности резонатора от частоты. Действительно, учтем, что линейные размеры резонатора обратно пропорциональны частоте, а глубина проникновения δ^0 обратно пропорциональна корню из частоты. Тогда получим, что добротность резонатора уменьшается с увеличением частоты как $f^{-1/2}$.

4.5. РЕЗОНАТОРЫ В ВИДЕ КОРОТКОЗАМКНУТЫХ ОТРЕЗКОВ РЕГУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

Теоретическое исследование электромагнитных полей в резонаторах сложной формы встречает весьма значительные математические трудности, связанные с необходимостью нахождения решения трехмерного волнового уравнения, удовлетворяющего граничным условиям. Задача определения электромагнитного поля существенно упрощается, если резонатор образован из отрезков линии передачи с известной структурой электромагнитного поля.

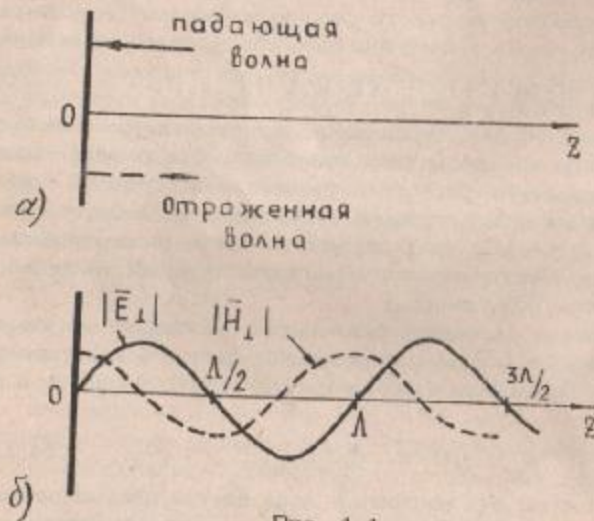


Рис. 4.4

Рассмотрим отрезок произвольной направляющей системы, закороченный на одном конце идеально проводящей пластиной. Закорачивающая пластина перпендикулярна продольной оси направляющей системы — оси z . Начало координат совместим с короткозамыкающей пластиной (рис. 4.4, а). Предположим, что в направляющей системе возбуждена волна одного типа, у которой отличны от нуля поперечные составляющие электрического и магнитного полей. Волна, падающая на поверхность идеально проводящей пластины справа, имеет компоненты:

$$\vec{E}_\perp^{пад} = \vec{E}_\perp^{пад} e^{i\Gamma z}, \quad \vec{H}_\perp^{пад} = \vec{H}_\perp^{пад} e^{i\Gamma z}.$$

За счет отражения от закорачивающей пластины вдоль положительных значений z будет распространяться отраженная волна

$$\vec{E}_\perp^{отр} = \vec{E}_\perp^{отр} e^{-i\Gamma z}, \quad \vec{H}_\perp^{отр} = \vec{H}_\perp^{отр} e^{-i\Gamma z}.$$

Результирующее поле у закорачивающей пластины при $z = 0$ должно удовлетворять граничным условиям электродинамики, т.е.

$$\vec{E}_\perp^{пад}(0) + \vec{E}_\perp^{отр}(0) = 0; \quad \vec{H}_\perp^{пад}(0) + \vec{H}_\perp^{отр}(0) \neq 0.$$

Эти условия будут выполнены, если

$$\vec{E}_\perp^{отр}(0) = -\vec{E}_\perp^{пад}(0) = \vec{E}_\perp(0); \quad \vec{H}_\perp^{отр}(0) = \vec{H}_\perp^{пад}(0) = \vec{H}_\perp(0). \quad (4.13)$$

С учетом условия (4.13) для результирующего поля при любых значениях z получим:

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}_\perp^{пад} + \vec{E}_\perp^{отр} = \vec{E}_\perp(0)(e^{i\Gamma z} - e^{-i\Gamma z}) = i2\vec{E}_\perp(0)\sin\Gamma z; \quad (4.14)$$

$$\vec{H}_\perp = \vec{H}_\perp^{пад} + \vec{H}_\perp^{отр} = \vec{H}_\perp(0)(e^{i\Gamma z} + e^{-i\Gamma z}) = 2\vec{H}_\perp(0)\cos\Gamma z. \quad (4.15)$$

Зависимости $E_\perp(z)$ и $H_\perp(z)$ показаны на рис. 4.4, б. Из соотношений (4.14), (4.15) и рис. 4.4, б можно видеть, что поле представляет собой стоячую волну. Узлы электрического поля совпадают с пучностями магнитного поля. Картина поля не перемещается во времени вдоль оси направляющей системы. Величина поля меняется во времени по гармоническому закону. Из (4.14) и (4.15) следует также, что поля E и H сдвинуты во времени на $\frac{\pi}{2}$, поэтому перенос энергии вдоль оси z отсутствует. На расстояниях от закорачивающей пластины, кратных целому числу полувольт в направляющей системе, поперечная составляющая электрического поля обращается в нуль. Поэтому, не нарушая структуры поля в направляющей системе, в любое из сечений с нулевой напряженностью поперечного электрического поля можно ввести еще одну короткозамыкающую идеально проводящую плоскость, перпендикулярную оси z . Если направляющая система закрытого типа, то отрезок линии между двумя короткозамыкающими пластинами представляет собой объем, окруженный со всех сторон металлической оболочкой, т.е. является закрытым резонатором. Если направляющая система открытого типа, то короткозамкнутый с двух сторон отрезок линии является открытым резонатором. Таким образом, длина объемного резонатора l должна быть равна целому числу полувольт, распространяющихся в линии передачи:

$$l = p \frac{\Lambda}{2}, \quad (4.16)$$

или

$$\lambda = \frac{2l}{p},$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$, $p = 1, 2, 3, \dots$. Условия (4.16) являются условиями резонанса.

Определим резонансную длину волны такого резонатора. Ранее для направляющих систем было получено соотношение

$$k^2 = \gamma^2 + \beta^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2.$$

Если в последнее выражение подставить значение λ , соответствующее резонансу, то из полученного соотношения найдем резонансную длину волны

$$\left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{кр}}\right)^2;$$

откуда

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

Подставив λ из (4.16), получим следующие формулы для резонансной длины волны и частоты:

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (4.17)$$

$$f_p = \frac{v}{\lambda_p} = \frac{1}{\lambda_p \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (4.17a)$$

Классификация колебаний в объемных резонаторах, представляющих собой короткозамкнутый отрезок направляющей системы, осуществляется в соответствии с тем типом волны, стоячая волна которого образуется в объемном резонаторе. Чтобы различить колебания с различным числом полуволн, укладывающихся вдоль оси направляющей системы, к обозначению волн добавляют третий индекс p . Например колебание типа E_{mnp} или H_{mnp} .

Основным типом колебаний в объемном резонаторе называют тот, у которого наибольшая резонансная длина волны.

Приведенный вывод справедлив для направляемых волн, у которых поперечная составляющая электрического поля отлична от нуля. К таким типам волн относятся T , H и E -волны. Исключение составляют E -волны в критическом режиме. Действительно при $\lambda = \lambda_{кр}$, $\gamma = 0$ и $E_z = -i \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial z} E_x = 0$ в любом сечении направляющей системы. Поэтому при $\lambda = \lambda_{кр}$ короткозамыкающие пластины можно вводить в любое сечение волновода с волной E_{mn} . Резонансная длина волны такого резонатора не зависит от его длины, и индекс p у колебания E_{mnp} может принимать нулевые значения ($p = 0, 1, 2, 3, \dots$), в то время как у колебания H_{mnp} индекс p должен быть отличен от нуля ($p = 1, 2, 3, \dots$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Наука, 1978.
2. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. - М.: Связь, 1971.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. - М.: Сов. радио, 1957.
4. Ардабьевский А.И. Теория электромагнитного поля и распространение радиоволн, ч. II. - М.: МАИ, 1970.
5. Филиппов В.С. Электромагнитные волны в неограниченных средах. - М.: МАИ, 1981.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1968.
7. Марков Г.Т., Петров В.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Сов. радио, 1970.
8. Вычислительные методы в электродинамике/Под ред. Р. Митры. - М.: Мир, 1977.
9. Марков Г.Т., Васильев Е.Н. Математические методы прикладной электродинамики. - М.: Сов. радио, 1970.
10. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. - М.: Сов. радио, 1971.
11. Антенны и устройства СВЧ. (Проектирование фазированных антенных решеток)/Под ред. Д.И. Воскресенского. - М.: Радио и связь, 1981.