

Министерство науки, высшей школы и технической политики  
Российской Федерации  
КОМИТЕТ ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

---

Ю.В. КУЗНЕЦОВ, Ю.В. ТРОНИН

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ  
ЦЕПЕЙ

(Частотный анализ)

Учебное пособие

Утверждено  
на заседании редсовета  
24 октября 1991 г.

Москва  
Издательство МАИ  
1992

621.396 (075)

К- 891

УДК: 621.372.011.71 (075.8)

Кузнецов Д.В., Тронин Ю.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (Частотный анализ): Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1992. - 64 с., ил.

Рассмотрены некоторые вопросы теории линейных радиоэлектронных цепей, дающие необходимую основу для частотного анализа и расчета типичных радиоэлектронных устройств.

Теоретические методы иллюстрируются примерами практических приемов анализа и расчета воздействия сигналов на радиоэлектронные цепи.

Для студентов факультета радиоэлектроники ЛА дневной и вечерней формы обучения, изучающих дисциплины "Основы радиоэлектроники", "Радиотехнические цепи и сигналы".

Рецензенты: И.И. Литвак, О.Е. Антонов

## 4. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### 4.1. Постановка вопроса

Анализ цепи при гармоническом воздействии играет особую роль как в теории, так и в инженерной практике. Отметим некоторые причины этого.

1. Гармонические сигналы, а также сигналы, близкие к ним, чрезвычайно широко используются в радиоэлектронике.

2. Теоретический анализ линейных цепей при гармоническом воздействии значительно проще, чем для общего случая – произвольного сигнала. Вместе с тем, получаемые в результате анализа характеристики цепи – так называемые частотные характеристики – очень информативны. Часто само назначение той или иной цепи или устройства дается в терминах именно их частотных характеристик (усилитель нижних частот, усилитель промежуточных частот, частотный корректор, полосовой фильтр и т.п.).

3. По известным частотным характеристикам цепи можно проанализировать ее работу и при других воздействующих сигналах, резко отличных от гармонических (например одиночных импульсов). Этой цели служит спектральный анализ.

4. Частотные характеристики цепей легко контролировать экспериментально. Радиоэлектронные лаборатории оснащены генераторами гармонических сигналов и другой измерительной аппаратурой, предназначенной как раз для снятия частотных характеристик цепей.

Простота и удобство теоретического анализа линейных цепей при гармоническом воздействии являются следствием того, что функции вида

$$S(t) = A \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\omega t + \varphi) \quad (4.1)$$

есть собственные функции любой линейной цепи. Это означает, что при воздействии на цепь сигнала (4.1) частным решением динамических уравнений для любого напряжения или тока в цепи будет функция

того же вида, с той же частотой  $\omega$  и лишь другими амплитудами  $A_{\text{Вых}}$  и начальными фазами  $\varphi_{\text{Вых}}$ :

$$i_{\text{Вх}}(t) = A_{\text{Вх}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{Вх}}) \rightarrow i_{\text{Вых}}(t) = A_{\text{Вых}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{Вых}}). \quad (4.2)$$

В силу линейности цепи амплитуда  $A_{\text{Вых}}$  пропорциональна  $A_{\text{Вх}}$ , а вследствие инвариантности цепи во времени изменение фазы входного сигнала вызывает такое же изменение фазы выходного гармонического сигнала, поэтому разность фаз  $\varphi_{\text{Вых}} - \varphi_{\text{Вх}}$ , определяемая цепью, остается неизменной.

Итак, отыскание реакции цепи на входной гармонический сигнал сводится к определению двух величин: коэффициента передачи цепи по амплитуде и сдвига фазы в цепи:

$$K_{\text{ц}} = \frac{A_{\text{Вых}}}{A_{\text{Вх}}}, \quad \varphi_{\text{ц}} = \varphi_{\text{Вых}} - \varphi_{\text{Вх}}. \quad (4.3)$$

Как правило, оба эти параметра цепи зависят от частоты гармонического воздействия. Это и есть частотные характеристики цепи: амплитудно-частотная (АЧХ) и фазо-частотная (ФЧХ):

$$\text{АЧХ} = K_{\text{ц}}(\omega) = \frac{A_{\text{Вых}}}{A_{\text{Вх}}}; \quad (4.4)$$

$$\text{ФЧХ} = \varphi_{\text{ц}}(\omega) = \varphi_{\text{Вых}} - \varphi_{\text{Вх}}. \quad (4.5)$$

Следует еще раз подчеркнуть, что частотные характеристики описывают реакцию цепи только на гармоническое воздействие и только частное решение динамических уравнений. Предполагается, что включение сигнала произошло давно (теоретически при  $-\infty$ ) и собственная реакция на включение (т.е. решение однородного динамического уравнения) давно-давно закончилась. В цепи наблюдается установившийся режим.

Для нахождения частотных характеристик цепи нет необходимости описывать связь между токами и напряжениями в форме динамических интегродифференциальных уравнений. Можно воспользоваться специально разработанным для этой цели методом комплексных амплитуд, позволяющим описывать законы токораспределения в цепях, содержащих  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементы, так же как для чисто резистивных цепей, т.е. системой алгебраических уравнений.

## 4.2. Некоторые сведения из алгебры комплексных чисел

Напомним некоторые положения алгебры комплексных чисел. Комплексное число  $\dot{Z} = x + jy$  мыслится как точка комплексной плоскости (рис. 4.1), заданная декартовыми координатами  $(x, y)$ .  $x$  - называется действительной (вещественной) частью  $\dot{z}$ ,  $y$  - мнимой,  $x = \text{Re } \dot{Z}$ ,  $y = \text{Im } \dot{Z}$ . Та же точка (конец вектора  $\dot{Z}$ ) может быть задана в полярных координатах - модулем  $|\dot{Z}|$  и аргументом  $\varphi$ . Очевидны выражения:

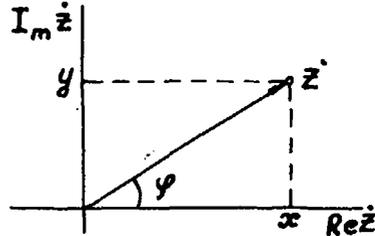


Рис. 4.1

$$|\dot{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}; \quad (4.6)$$

$$x = |\dot{Z}| \cos \varphi, \quad y = |\dot{Z}| \sin \varphi. \quad (4.7)$$

Известная формула Эйлера устанавливает связь между тригонометрическими функциями и экспонентой с мнимым показателем:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi. \quad (4.8)$$

Выражая  $x$  и  $y$  из (4.7), имеем

$$\dot{Z} = x + jy = |\dot{Z}| (\cos \varphi + j \sin \varphi) = |\dot{Z}| e^{j\varphi}. \quad (4.9)$$

Итак, имеются две основные формы записи комплексного числа: алгебраическая (через проекции  $x$  и  $y$ ) и показательная (через модуль и аргумент):

$$\dot{Z} = x + jy = |\dot{Z}| e^{j\varphi}. \quad (4.10)$$

Множитель  $e^{j\varphi}$  представляет собой вектор единичной длины, расположенный под углом  $\varphi$ . При выполнении операций с комплексными числами могут быть использованы обе формы записи, однако удобнее операции сложения и вычитания выполнять в проекциях

$$\dot{Z}_\Sigma = \dot{Z}_1 \pm \dot{Z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2), \quad (4.11)$$

а операций умножения, деления, возведения в степень - в показательной форме:

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = |\dot{Z}_1| |\dot{Z}_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}; \\ \dot{Z} &= \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{|\dot{Z}_1|}{|\dot{Z}_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}; \\ \dot{Z} &= \dot{Z}_1^n = |\dot{Z}_1|^n e^{jn\varphi_1}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Действия (4.11) и (4.12) иллюстрируются рис. 4.2. Обратим внимание на то, что умножение  $\dot{Z}$  на  $e^{j\varphi}$  есть не что иное, как поворот вектора  $\dot{Z}$  на угол  $\varphi^*$ . Полезно запомнить следующие частные случаи:

$$e^{j0} = 1, \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j, \quad e^{\pm j\pi} = -1.$$

т.е. умножения на  $j$ ,  $-j$ ,  $-1$  — это тоже операции поворота вектора на  $\frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $\pm\pi$ .

В практических приложениях к расчету цепей часто результат получается в форме дроби  $\dot{Z} = \frac{a+jb}{c+jd}$ , а желательно иметь его в показательной форме или форме действительной и мнимой частей. Можно рекомендовать действия, проиллюстрированные следующим примером:

Пример 4.1.

$$\dot{Z} = \frac{5+j3}{7-j2}$$

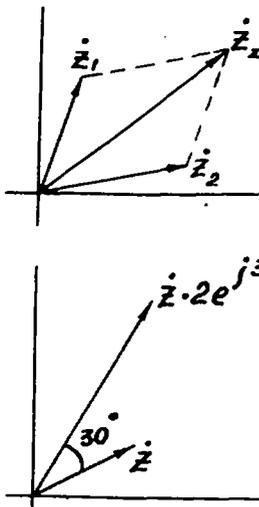


Рис. 4.2

\*Во избежание ошибок заметим, что речь идет об умножении на экспоненту именно с мнимым показателем. Умножение на экспоненту с действительным показателем — это изменение модуля. Например:

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z} \cdot e^{0,5+j0,5} = \dot{Z} e^{0,5} e^{j0,5} = 1,65 |\dot{Z}| e^{j(\varphi+0,5)}$$

Приведем числитель и знаменатель к показательной форме:

$$\dot{Z}_1 = 5 + j3 = |\dot{Z}_1| e^{j\varphi_1}, \quad |\dot{Z}_1| = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{3}{5} = 34,4^\circ;$$

$$\dot{Z}_2 = 7 - j2 = |\dot{Z}_2| e^{j\varphi_2}, \quad |\dot{Z}_2| = \sqrt{7^2 + 2^2} = 7,28, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{-2}{7} = -17,7^\circ.$$

Отсюда

$$\dot{Z} = \frac{5,83 e^{j34,4^\circ}}{7,28 e^{-j17,7^\circ}} = 0,8 e^{j52,1^\circ};$$

$$\dot{Z} = 0,8 \cos 52,1^\circ + j0,8 \sin 52,1^\circ = 0,547 + j0,583.$$

Другой путь приведения к форме в проекциях - домножение числителя и знаменателя на число, комплексно-сопряженное со знаменателем:

$$\dot{Z} = \frac{5 + j3}{7 - j2} = \frac{(5 + j3)(7 + j2)}{(7 - j2)(7 + j2)} = \frac{5 \cdot 7 - 3 \cdot 2 + j3 \cdot 7 + j2 \cdot 5}{7^2 + 2^2} = 0,547 + j0,583.$$

#### 4.3. Комплексный сигнал, комплексная амплитуда

Сопоставим две функции времени

$$S(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.13)$$

и

$$\dot{S}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (4.14)$$

Это разные математические объекты:  $S(t)$  описывает периодическое изменение некоторой величины во времени;  $\dot{S}(t)$  - изменение во времени положения точки (или вектора) в комплексной плоскости (рис. 4.3).

Вектор  $\dot{S}(t)$  длиной  $A$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ , так что время его оборота равно  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , т.е. - периоду  $S(t)$ . В момент времени  $t = 0$  угол вектора равен начальной фазе  $\varphi$  сигнала  $S(t)$ . Из рассмотрения проекции вращающегося вектора  $\dot{S}(t)$  на вещественную ось  $x$  получаем

$$x(t) = \operatorname{Re} \dot{S}(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = S(t).$$

Итак, в поведении функции  $S(t)$  и  $\dot{s}(t)$  много общего. Можно действительному сигналу  $s(t)$  сопоставить комплексный сигнал  $\dot{s}(t)$  причем такое сопоставление взаимно однозначно:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \dot{s}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (4.14, a)$$

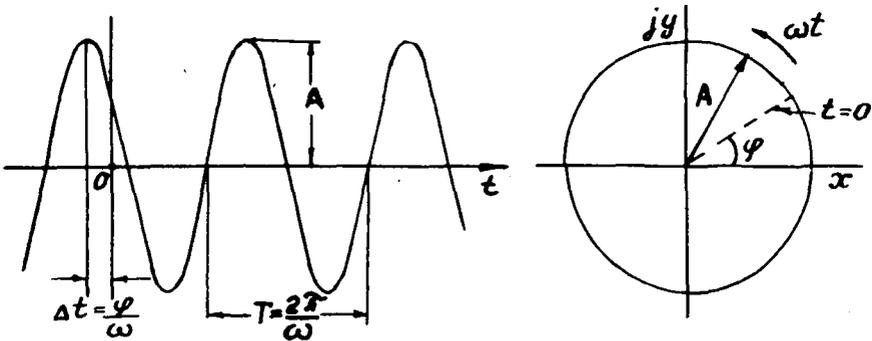


Рис. 4.3

При расчете цепей можно мысленно заменить реальный воздействующий сигнал  $s_{вх}(t)$  его символом  $\dot{s}_{вх}(t)$  с заданной амплитудой, частотой и фазой. При этом, поскольку  $e^{j\omega t}$  — также собственная функция линейной цепи, очень легко найти реакцию цепи — комплексный сигнал на выходе

$$\dot{s}_{вых}(t) = A_{вых} e^{j(\omega t + \varphi_{вых})} \quad (4.15)$$

Очевидно\*,  $\dot{s}_{вых}(t)$  — это символ реального выходного сигнала  $s(t)$  в котором в явной форме присутствуют амплитуда и фаза искомой реакции. Сначала этот метод так и назывался — символический. Запись перехода от действительного сигнала к комплексному и обратно, а

\*Приведем более строгое обоснование: сигнал  $s(t) = \cos \omega t$  можно рассматривать как сумму двух сигналов  $s_1(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t}$  и  $s_2(t) = \frac{1}{2} e^{-j\omega t}$  (используя формулу Эйлера). Поскольку  $\dot{s}_1(t)$  и  $\dot{s}_2(t)$  комплексно-сопряжены, то и реакции цепи на эти воздействия также комплексно-сопряжены. Реакция на сигнал  $s(t)$  является суммой реакций на  $\dot{s}_1(t)$  и  $\dot{s}_2(t)$ .

также и все действия в процессе анализа цепи можно сделать еще более компактными, если ввести понятие комплексной амплитуды  $\dot{A}$  сигнала  $s(t)$ :

$$\dot{s}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A e^{j\varphi}} \cdot e^{j\omega t} = \dot{A} e^{j\omega t} \quad (4.16)$$

Комплексная амплитуда - неподвижный во времени вектор, содержащий информацию и об амплитуде действительного сигнала и о его начальной фазе. Множитель вращения  $e^{j\omega t}$  опущен. Реальный сигнал  $s(t)$  сопоставляется сразу с комплексной амплитудой:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \dot{A} = A e^{j\varphi} \quad (4.17)$$

#### 4.4. Комплексные сопротивления, проводимости

Между напряжениями и токами в элементах  $L$  и  $C$  цепи существуют следующие связи:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

Для случая комплексных сигналов

$$\begin{aligned} \dot{u}_L(t) &= \dot{U}_L e^{j\omega t}; & \dot{i}_C(t) &= \dot{I}_C e^{j\omega t}; \\ \dot{i}_L(t) &= \dot{I}_L e^{j\omega t}; & \dot{u}_C(t) &= \dot{U}_C e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.18)$$

дифференцирование дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_L e^{j\omega t} &= L \frac{d(\dot{I}_L e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L \dot{I}_L e^{j\omega t}; \\ \dot{I}_C e^{j\omega t} &= j\omega C \dot{U}_C e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Сокращая на  $e^{j\omega t}$ , получим для комплексных амплитуд:

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L, \quad \dot{I}_C = j\omega C \dot{U}_C \quad (4.20)$$

Отношение комплексной амплитуды напряжения на элементе к комплексной амплитуде тока через него можно трактовать как некоторое сопротивление, а обратное отношение - как проводимость. По опреде-

лению, это — комплексные сопротивления и проводимости ("импеданс" и "адмитанс").

Все три основных элемента цепи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  становятся равноправными: напряжение на элементе равно произведению тока на сопротивление (подразумеваются комплексные амплитуды напряжения и тока):  $\dot{U}_R = Z_R \dot{I}_R$ ,  $\dot{U}_L = Z_L \dot{I}_L$ ,  $\dot{U}_C = Z_C \dot{I}_C$ .

Здесь комплексные сопротивления

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}, \quad (4.21)$$

и, соответственно, комплексные проводимости

$$Y_R = \frac{1}{R} = G, \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}, \quad Y_C = j\omega C. \quad (4.22)$$

Все правила расчета цепей, эквивалентные преобразования, основанные на законах Ома и Кирхгофа применительно к резистивным цепям, теперь оказываются справедливыми для любых соединений резисторов, конденсаторов, индуктивностей при условии гармонического воздействия. В этом и состоит метод комплексных амплитуд.

Этот метод оказался очень удобным и получил широкое распространение. Часто в технической речи не делается различия между сопротивлением и комплексным сопротивлением. Так, например, можно услышать: "ток через индуктивность равен напряжению, деленному на  $j\omega L$ ". Однако это вовсе не означает, что  $i(t) = \frac{u(t)}{j\omega L}$ . Надо всегда помнить, что речь идет о комплексных амплитудах — символах гармонических сигналов.

**Пример 4.2.** Найти комплексные сопротивления и проводимости последовательного и параллельного соединений  $R$  и  $C$  (рис. 4.4). Имеем:

$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C}; \quad Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{\omega C}{1 + \omega^2 R^2 C^2};$$

$$Z_2 = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}; \quad Y_2 = \frac{1}{R} + j\omega C.$$

Заметим, что комплексное сопротивление резистора — чисто вещественное (или, как говорят, активное), а емкости и индуктивности — чисто мнимое (реактивное). Комплексное сопротивление некоторого соединения активного и реактивного сопротивлений содержит и

вещественную, и мнимую части. При этом может оказаться, что обе части зависят как от активного, так и от реактивного сопротивлений. Таковы в рассмотренном примере  $Y_1$  и  $Z_2$ .

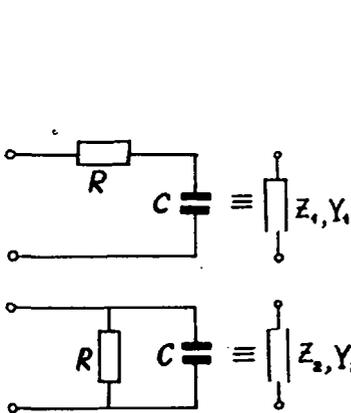


Рис. 4.4.

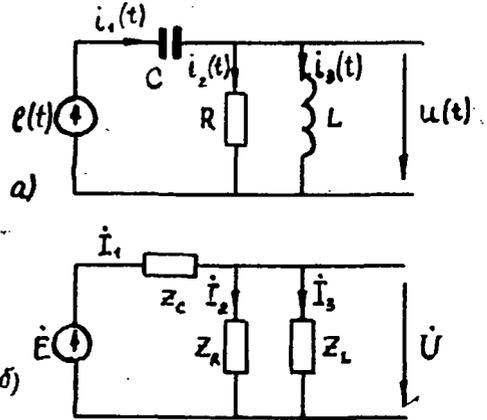


Рис. 4.5

Пример 4.3. Определить токи  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  и напряжение  $u(t)$  в цепи рис. 4.5, а при воздействии  $e(t) = I \cdot \cos \omega t$  при следующих данных:  $\omega = 10^3$  1/с,  $C = 2$  мкФ,  $L = 200$  мГн,  $R = 100$  Ом. Перейдем к схеме рис. 4.5, б, в которой элементы схемы заменены комплексными сопротивлениями

$$Z_R = 100 \text{ ом} , \quad Z_L = j\omega L = j10^3 \cdot 0,2 = j200 \text{ ом} ;$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = -j500 \text{ ом} .$$

Все переменные - комплексные амплитуды.

Уравнения для определения искоемых переменных очевидны:

$$\dot{U} = \dot{E} \frac{Z_L \parallel Z_R}{Z_C + Z_L \parallel Z_R} ;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E} - \dot{U}}{Z_C} ; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_R} ; \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}}{Z_L} .$$

Выполняя действия с комплексными числами, получим:

$$\dot{U} = \frac{32}{10-j3} \text{ В} ; \quad \dot{I}_1 = \frac{10+j20}{10-j3} \cdot 10^{-3} \text{ А} ; \quad \dot{I}_2 = \frac{j20}{10-j3} \cdot 10^{-3} \text{ А} ; \quad \dot{I}_3 = \frac{10}{10-j3} \cdot 10^{-3} \text{ А} .$$

Проверка результатов ( $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ ) удовлетворяется. Теперь нужно привести запись комплексных амплитуд к показательной форме:

$$\dot{U} = \frac{j2}{10-j3} = \frac{2 e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{109} e^{j \arctg(-0,3)}} \approx 0,19 e^{j1,86} \text{ В};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{10+j20}{10-j3} = \frac{\sqrt{500} e^{j \arctg 2}}{\sqrt{109} e^{j \arctg(-0,3)}} \approx 2,14 e^{j1,4} \text{ МА};$$

$$\dot{I}_2 \approx 1,9 e^{j1,86} \text{ МА}; \quad \dot{I}_3 \approx 0,96 e^{j0,29} \text{ МА}.$$

Окончательный результат

$$u(t) = 0,19 \cos(10^3 t + 1,86),$$

и аналогично для токов.

#### 4.5. Комплексный коэффициент передачи, комплексная частотная характеристика

Заменяя элементы цепи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  их комплексными сопротивлениями и используя любой из методов расчета цепи (законы Ома и Кирхгофа, эквивалентные преобразования, метод узловых напряжений и пр.), можно получить связь между воздействием и реакцией в форме

$$\dot{S}_{\text{вых}} = \dot{K} \dot{S}_{\text{вх}} \quad (4.23)$$

Здесь  $\dot{S}_{\text{вх}}$ ,  $\dot{S}_{\text{вых}}$  — комплексные амплитуды;  $\dot{K}$  — комплексное число, определяемое цепью, ее структурой и параметрами, а также частотой воздействующего сигнала  $\omega$ . Очевидно,  $\dot{K}$  имеет смысл коэффициента передачи цепи. В зависимости от того, что конкретно понимается под воздействием и реакцией (ток, напряжение), коэффициент  $\dot{K}$  может быть безразмерным либо иметь размерность сопротивления или проводимости.

Удобно записать  $\dot{K}$  в показательной форме:

$$\dot{K} = |\dot{K}| e^{j\varphi_K} \quad (4.24)$$

Тогда из (4.23) получим

$$|\dot{S}_{\text{вых}}| = |\dot{K}| |\dot{S}_{\text{вх}}|;$$

$$\varphi_{\text{вых}} = \varphi_{\text{вх}} + \varphi_k.$$

Таким образом, модуль коэффициента передачи - это коэффициент пропорциональности между амплитудами, а аргумент дает значение сдвига фазы выходного гармонического сигнала относительно входного. Так, в рассмотренном выше примере 4.3 было найдено, что при воздействующем сигнале  $e(t) = \cos 10^3 t$  или при  $\dot{E} = 1$  комплексная амплитуда выходного напряжения  $\dot{U}$  равна  $\frac{j2}{10-j3}$ . Это число и есть комплексный коэффициент передачи  $\dot{K} = \dot{U}$ . Переписав  $\dot{K}$  в показательной форме, получили  $\dot{K} = 0,19 e^{j1,86}$ . При воздействии

$$e(t) = A \cos(10^3 t + \varphi)$$

выходной сигнал

$$u(t) = 0,19 A \cos(10^3 t + \varphi + 1,86).$$

Комплексные сопротивления ветвей, содержащих  $L$  или  $C$ , зависят от частоты воздействия  $\omega$ . Поэтому и комплексный коэффициент передачи является функцией частоты. Эту функцию называют комплексной частотной характеристикой цепи и обозначают  $K(\omega)$  (или  $K(j\omega)$ ).

Итак, комплексная частотная характеристика есть отношение комплексных амплитуд сигналов на выходе и входе как функция частоты воздействующего гармонического сигнала:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{S}_{\text{вых}}}{\dot{S}_{\text{вх}}} \quad (4.25)$$

при условии, что  $S_{\text{вх}}$  - гармонический сигнал частоты  $\omega$ .

Модуль  $|K(\omega)|$  называют амплитудно-частотной характеристикой, аргумент  $\varphi_K(\omega)$  - фазочастотной характеристикой цепи.

Пример 4.4. Фильтр нижних частот первого порядка.  
На рис. 4.6 приведены простейшие частотно-зависимые цепи, содержащие один реактивный элемент. Определим их комплексные частотные характеристики.

Для схемы а

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{E}} = \frac{j\omega C}{R + j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

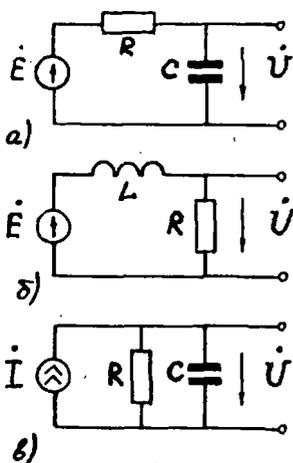


Рис. 4.6

Для схемы а)

$$K(\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{E}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

Для схемы б)

$$K(\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Нетрудно заметить, что зависимость от частоты в этих трех схемах одна и та же:

$$K(\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad (4.26)$$

Здесь  $\tau$  — постоянная времени цепи, причем  $\tau = RC$  или  $\tau = \frac{L}{R}$ ;  $K$  — некоторый безразмерный или размерный коэффициент.

Запишем комплексную частотную характеристику в показательной форме:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j \arctg \omega\tau} \quad (4.27)$$

АЧХ и ФЧХ цепи имеют следующий вид:

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \varphi_K(\omega) = -\arctg \omega\tau \quad (4.28)$$

Характерные черты АЧХ (рис. 4.7): при низких частотах коэффициент передачи близок к 1, с увеличением  $\omega$  коэффициент передачи монотонно падает, стремясь к нулю. Граничной точкой "полосы пропускания" часто считают частоту, при которой коэффициент передачи уменьшается до  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$  от максимума. Из (4.28) видно, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{0,1}^2 \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega_{0,1} = \frac{1}{\tau}$$

Асимптотика АЧХ (характер спада АЧХ при больших частотах, или "хвост") имеет вид

$$K(\omega) \sim \frac{1}{\omega\tau}$$

т.е. коэффициент передачи обратно пропорционален первой степени частоты. Рассмотренные простейшие схемы, пропускающие низкие частоты и не пропускающие высокие, являются фильтрами нижних частот (ФНЧ).

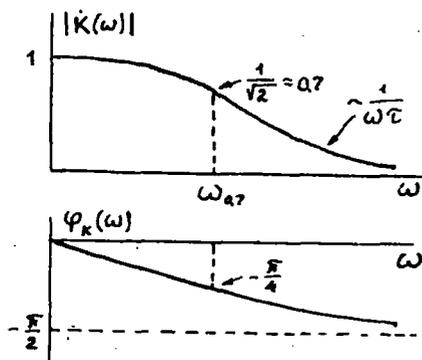


Рис. 4.7

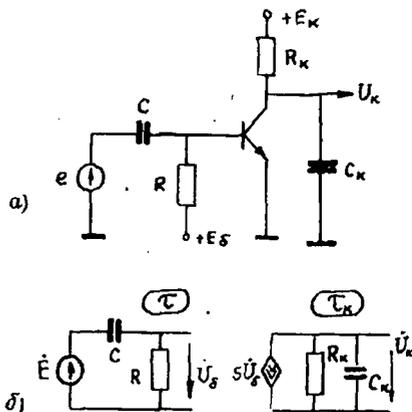


Рис. 4.8

**Пример 4.5. Аperiodический усилитель.** Простейшая схема усилителя на транзисторе, предназначенного для усиления звуковых и видео-сигналов, приведена на рис. 4.8, а. Разделительный конденсатор  $C$  препятствует воздействию постоянного напряжения ("закрытый" вход). Конденсатор  $C_K$  ограничивает прохождение излишне высоких частот. На рис. 4.8, б дана схема замещения по переменным напряжениям и токам, в которой транзистор представлен идеальным источником коллекторного тока  $\dot{I}_K = S \dot{U}_B$ . Поскольку потенциал эмиттера фиксирован, управляющее напряжение база-эмиттер  $\dot{U}_B = \dot{U}_B$ . Коэффициент  $S$  — крутизна характеристики коллекторного тока в рабочей точке.

Комплексная частотная характеристика левой части схемы

$$K_1(\omega) = \frac{\dot{U}_B}{\dot{E}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (4.29)$$

$\tau = RC$  — постоянная времени входной цепи.

Правая часть схемы — рассмотренный выше ФНЧ, его характеристика:

$$K_2(\omega) = \frac{\dot{U}_k}{\dot{U}_\sigma} = \frac{SR_k}{1+j\omega\tau_k}, \quad \tau_k = R_k C_k. \quad (4.30)$$

Общая частотная характеристика

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_k}{\dot{E}} = \dot{K}_1(\omega) \cdot \dot{K}_2(\omega).$$

Определим АЧХ и ФЧХ первого звена (CR-цепочки), для чего представим  $\dot{K}_1(\omega)$  (4.29) в показательной форме:

$$\dot{K}_1(\omega) = \frac{\omega\tau e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2} e^{j\arctg\omega\tau}}. \quad (4.31)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |\dot{K}_1(\omega)| &= \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \\ \varphi_1(\omega) &= \frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau. \end{aligned} \quad (4.32)$$

На рис. 4.9 приведены АЧХ и ФЧХ обоих звеньев, при этом учтено условие  $\tau \gg \tau_k$ , обычно выполняемое в схеме апериодического усилителя. Общая АЧХ определяется перемножением  $|\dot{K}_1(\omega)|$  и  $|\dot{K}_2(\omega)|$  а общая ФЧХ - сложением  $\varphi_1(\omega)$  и  $\varphi_2(\omega)$ . Общая АЧХ дана на рис. 4.9. При  $\tau \gg \tau_k$  в ней имеется плоский средний участок, на котором гармонические сигналы вне зависимости от частоты усиливаются одинаково:  $K_0 = SR_k$ . Нижние и верхние границы этого участка определяются постоянными времени:

$$\omega_n = \frac{1}{\tau}, \quad \omega_b = \frac{1}{\tau_k}.$$

**Пример 4.6.** Фильтр нижних частот второго порядка использует два реактивных элемента разного вида -  $L$  и  $C$ . Одна из возможных схем дана на рис. 4.10. Выражения для комплексной частотной характеристики можно записать из рассмотрения делителя  $Z_1, Z_2$ :

$$\begin{aligned} Z_1 &= j\omega L; \quad Z_2 = R \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{R}{1+j\omega RC}; \\ \dot{K}(\omega) &= \frac{\dot{U}}{\dot{E}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}. \end{aligned}$$

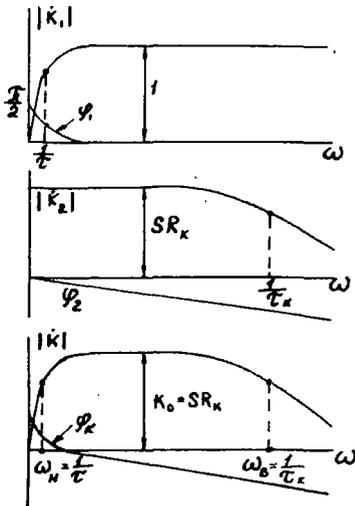


Рис. 4.9

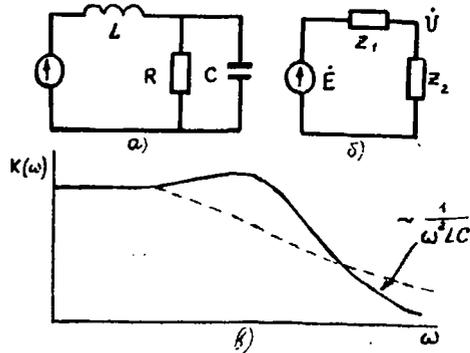


Рис. 4.10

После несложных алгебраических преобразований получим

$$K(\omega) = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega \frac{L}{R}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 \frac{L^2}{R^2}}} e^{-j \arctg \frac{\omega \frac{L}{R}}{1 - \omega^2 LC}} \quad (4.33)$$

Конкретный вид АЧХ и ФЧХ зависит от соотношения параметров  $L, C, R$ . Часто их выбирают так, чтобы АЧХ имела вид рис. 4.10, в. На том же рисунке пунктиром дана АЧХ фильтра первого порядка. Как видим, АЧХ фильтра второго порядка имеет лучшую форму — здесь более резкий переход от полосы пропускания к полосе непропускания. Асимптотика "хвоста"  $\sim \frac{1}{\omega^2 LC}$ .

Рассмотренные примеры использования метода получения комплексной частотной характеристики — простейшие. Здесь было достаточно применить свойство делителя напряжения. В более сложных разветвленных схемах приходится составлять систему уравнений относительно нескольких комплексных амплитуд напряжений или токов. Удобно,

в частности, воспользоваться методом узловых потенциалов в форме, которая была введена для резистивных цепей [3]:

напряжение  $\dot{U}_k$  некоторого  $k$ -того узла равно взвешенной сумме всех остальных узловых напряжений  $\dot{U}_i$ , имеющих с  $k$ -м узлом общие ветви:

$$\dot{U}_k = \sum_i K_{i,k} \dot{U}_i$$

Весовой коэффициент  $K_{i,k}$  — отношение проводимости ветви  $i,k$  к собственной проводимости рассматриваемого узла  $k$ .

Пример 4.7. Активный ФНЧ второго порядка (рис. 4.II). В схеме отмечены узловыe напряжения  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_3$ . Проводимости ветвей:

$$G_1 = \frac{1}{R_1}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2}, \quad j\omega C_1, \quad j\omega C_2.$$

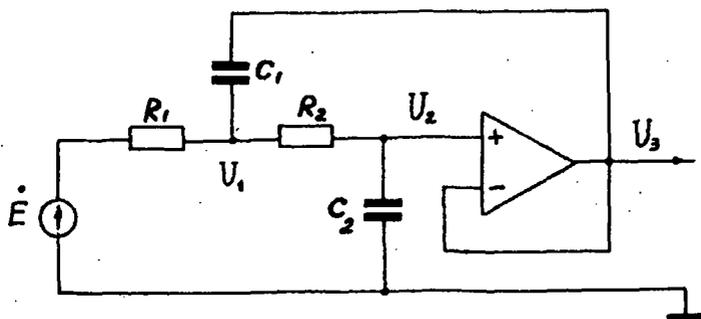


Рис. 4.II

Собственные проводимости узлов 1 и 2:

$$Y_{1\Sigma} = G_1 + G_2 + j\omega C_1, \quad Y_{2\Sigma} = G_2 + j\omega C_2.$$

Запишем систему из трех уравнений:

$$\dot{U}_1 = \frac{G_1}{Y_{1\Sigma}} \dot{E} + \frac{G_2}{Y_{1\Sigma}} \dot{U}_2 + \frac{j\omega C_1}{Y_{1\Sigma}} \dot{U}_3;$$

$$\dot{U}_2 = \frac{G_2}{Y_{2\Sigma}} \dot{U}_1;$$

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_2.$$

Последнее уравнение отражает тот факт, что ОУ включен как идеальный повторитель (выходное напряжение  $U_3$  подано непосредственно на инвертирующий вход).

Из системы уравнений имеем

$$\dot{U}_3 - \dot{U}_2 = \frac{G_2}{Y_{2\Sigma}} \left( \frac{G_1}{Y_{1\Sigma}} \dot{E} + \frac{G_2}{Y_{1\Sigma}} \dot{U}_3 + \frac{j\omega C_1}{Y_{1\Sigma}} \dot{U}_3 \right).$$

После простых преобразований получим

$$K(\omega) = \frac{\dot{U}_3}{\dot{E}} = \frac{G_1 G_2}{G_1 G_2 + j\omega C_2 (G_1 + G_2) - \omega^2 C_1 C_2} = \frac{1}{1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2 + j\omega \tau_2}, \quad (4.34)$$

где постоянные времени

$$\tau_1 = \frac{C_1}{G_1}, \quad \tau_2 = \frac{C_2}{G_2}, \quad \tau_3 = C_2 \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2}.$$

Сравнив (4.34) с (4.33), обнаружим точное совпадение структуры формулы. Разница лишь в параметрах: вместо  $LC$  —  $\tau_1 \tau_2$ , вместо  $\frac{L}{R}$  —  $\tau_2$ . Применение активного элемента схемы ОУ позволило получить фильтр второго порядка без индуктивности. Проектирование так называемых *ARC* — фильтров (активных фильтров на *RC* — элементах) — одно из важных приложений современной радиоэлектроники.

#### 4.6. Резонансные цепи

В цепях с  $L$  и  $C$  элементами при определенных значениях частоты действующего сигнала проявляется эффект резонанса — резкое возрастание тока или напряжения. Этот эффект широко используется в радиотехнических устройствах.

Анализ и расчет резонансных цепей особенно нагляден и прост при использовании метода комплексных амплитуд. Комплексные сопротивления индуктивности и емкости являются чисто мнимыми:

$$Z_L = j\omega L = jX_L; \quad Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = jX_C. \quad (4.35)$$

Величины

$$X_L = \omega L, \quad X_C = - \frac{1}{\omega C} \quad (4.36)$$

называются реактивными сопротивлениями индуктивности и емкости. Как видим, реактивные сопротивления  $L$  и  $C$  имеют разные знаки и обратную зависимость от частоты.

При

$$\omega = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.37)$$

имеем

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} \longrightarrow X_L = -X_C \quad (4.38)$$

При такой частоте происходит взаимная компенсация реактивных сопротивлений, общее сопротивление последовательно соединенных  $L$  и  $C$  становится равным нулю и происходит резкое возрастание тока. В этом и состоит эффект резонанса с позиций метода комплексных амплитуд.

Простейшие резонансные цепи - последовательный и параллельный контур из  $L$  и  $C$  (рис. 4.12) - различаются подачей воздействия: в последовательном контуре сигнал вводится в форме источника напряжения, включенного "внутри" контура  $LC$ , а в параллельном - в форме источника тока, включаемого "вне" контура.

Для схемы а

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_{\Sigma}} = \frac{\dot{E}}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}; \quad \dot{U}_L = \dot{I} j\omega L, \quad \dot{U}_C = \dot{I} \frac{1}{j\omega C} \quad (4.39)$$

Для схемы б

$$\dot{U}_K = \dot{U}_L = \dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{Y_{\Sigma}} = \frac{\dot{I}}{j\omega C - j\frac{1}{\omega L}} \quad (4.40)$$

При резонансной частоте (4.37) сопротивление последовательного контура  $Z_{\Sigma}$  и проводимость параллельного  $Y_{\Sigma}$  становятся равными нулю.

Ток в последовательном контуре, а значит, и напряжения  $\dot{U}_L$  и  $\dot{U}_C$  делаются бесконечно большими. В параллельном контуре бесконечно большим становится напряжение на контуре. При отходе от резонансной частоты равенство модулей реактивных сопротивлений нарушается, токи и напряжения резко падают. Частотная характеристика резонансного контура дана на рис. 4.13.

Рассмотренный случай является идеализированным, т.к. в схеме не учитываются активные сопротивления, всегда так или иначе присутствующие в реальных схемах (либо в виде резисторов, либо в виде выходных сопротивлений источников, сопротивлений потерь и т.п.). Тем не менее модель идеального резонансного контура чрезвычайно полезна.

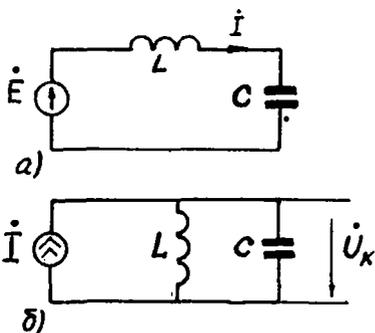


Рис. 4.12

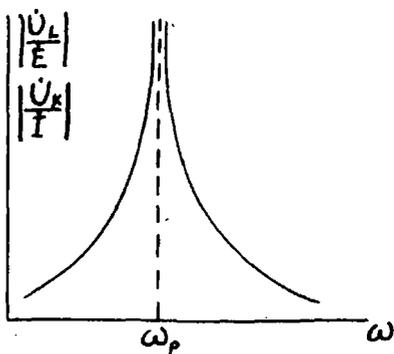


Рис. 4.13

Основное правило: на резонансной частоте последовательный контур - это короткое замыкание, параллельный контур - это разрыв.

В реальных резонансных цепях необходимо учитывать активные сопротивления, шунтирующие контур, а также включенные в контур последовательно ("сопротивление потерь"). Наиболее простые выражения получаются, если в последовательном контуре активное сопротивление  $r$  включено "внутри" контура, а в параллельном - сопротивление  $R$  включено шунтом (рис. 4.14, а и б).

Вводятся в рассмотрение два параметра контура - характеристическое (волновое) сопротивление  $\rho$  и добротность  $Q$ :

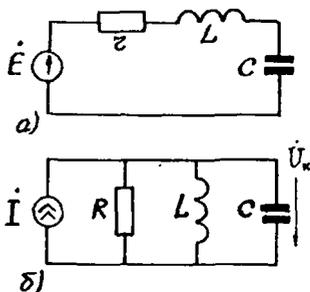


Рис. 4.14

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Ом}; \quad (4.41)$$

$$Q = \frac{\rho}{r}; \quad Q = \frac{R}{\rho}. \quad (4.42)$$

Характеристическое сопротивление - это модуль реактивного сопротивления индуктивности и емкости на резонансной частоте (без учета знака). Добротность - соотношение между реактивным и активным сопротивлением. Чем выше добротность, тем ближе реальный контур к идеальному, для которого  $Q = \infty$  ( $R = \infty$ ,  $r = 0$ ).

Резонансная частота  $\omega_p$  и добротность  $Q$  — два основных параметра, определяющих вид комплексной частотной характеристики резонансного контура.

Определим эту характеристику для параллельного контура (рис. 4.14,б):

$$K(\omega) = \frac{\dot{U}_k}{\dot{I}} = \frac{1}{Y_\Sigma}$$

Здесь суммарная проводимость

$$Y_\Sigma = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C. \quad (4.43)$$

Преобразуем (4.43) с тем, чтобы ввести в формулу параметры  $\omega_p$  и  $Q$  (4.41), (4.42):

$$Y_\Sigma = \frac{1}{R} \left[ 1 + j \frac{R}{\rho} \left( \rho \omega C - \frac{\rho}{\omega L} \right) \right] = \frac{1}{R} \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \right]. \quad (4.44)$$

В этом выражении зависимость от частоты сосредоточена в члене уравнения, который принято называть нормированной расстройкой

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}. \quad (4.45)$$

При  $\omega = \omega_p$   $\xi = 0$ .

Таким образом, комплексная частотная характеристика параллельного контура

$$K(\omega) = \frac{R}{1 + jQ\xi} \quad (4.46)$$

Аналогичные выкладки для последовательного контура дадут

$$K(\omega) = \frac{\dot{I}_k}{\dot{E}} = \frac{1/r}{1 + jQ\xi} \quad (4.47)$$

Для высокодобротных контуров ( $Q \gg 1$ ) формулы (4.46) и (4.47) можно переписать так, чтобы аргументом была не нормированная расстройка  $\xi$ , нелинейно зависящая от частоты, а более простые абсолютная расстройка  $\Delta\omega$  или относительная расстройка  $\delta\omega$ :

$$\Delta\omega = \omega - \omega_p; \quad (4.48)$$

$$\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_p}. \quad (4.49)$$

При  $Q \gg 1$  уже малые расстройки  $\Delta\omega \ll \omega_p$  приводят к резкому спаду АЧХ. Учитывая это, произведем замену:

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{\omega_p + \Delta\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_p + \Delta\omega} = 1 + \delta\omega - \frac{1}{1 + \delta\omega}.$$

Используя приближение  $\frac{1}{1 + \Delta} \approx 1 - \Delta$ , получим

$$\xi \approx 1 + \delta\omega - 1 + \delta\omega = 2\delta\omega = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_p}. \quad (4.50)$$

Тогда

$$K(\Delta\omega) = \frac{R}{1 + j 2Q\delta\omega} = \frac{R}{1 + j 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p}}. \quad (4.51)$$

Отсюда запишем выражения для АЧХ и ФЧХ:

$$|K(\Delta\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p})^2}}; \quad (4.52)$$

$$\varphi_K(\Delta\omega) = -2 \operatorname{arctg} 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p}. \quad (4.53)$$

Нормированные АЧХ и ФЧХ даны на рис. 4.15. Кривые симметричны относительно  $\Delta\omega = 0$  (т.е. относительно  $\omega_p$ ).

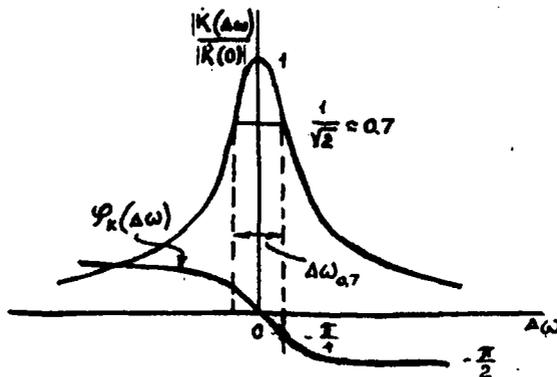


Рис. 4.15

Отметим, что симметрия — следствие приближенной замены (4.50). Точная формула (4.46) дает некоторую несимметрию "хвостов", где

неравенство  $|\Delta\omega| \ll \omega_p$  не выполняется. Резонансную кривую часто характеризуют полосой пропускания  $\Delta\omega_{0,7}$  по уровню  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7$ .

Из (4.52)

$$1 + \left( 2Q \frac{\Delta\omega_{0,7}}{\omega_p} \right)^2 = 2,$$

откуда

$$\Delta\omega_{0,7} = \frac{\omega_p}{Q}. \quad (4.54)$$

Эта формула используется для удобного экспериментального определения добротности по снятой резонансной кривой: добротность равна отношению резонансной частоты к полосе пропускания:

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega_{0,7}}. \quad (4.55)$$

На рис. 4.16, а и б показано влияние добротности на вид резонансной кривой. Рис. 4.16, а дает нормированные кривые. Чем выше добротность, тем уже резонансная кривая, меньше полоса пропускания.

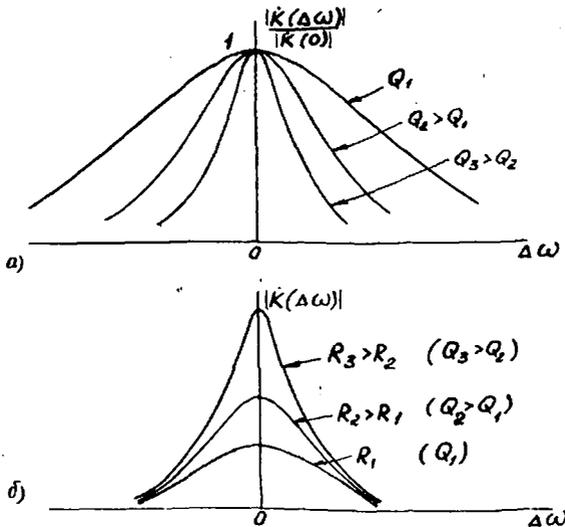


Рис. 4.16

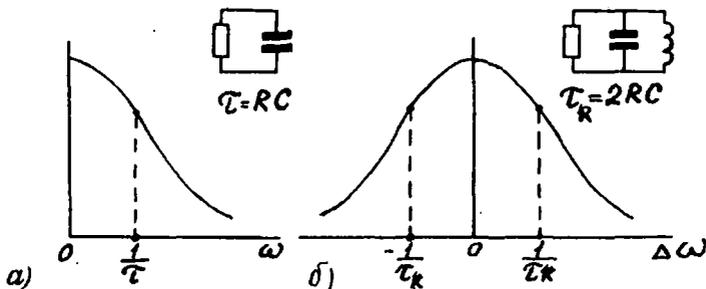


Рис. 4.17

На рис. 4.16,б приведены ненормированные кривые, построенные с учетом того, что добротность  $Q$  регулируется изменением сопротивления  $R$ , при этом чем больше  $R$  (а следовательно, и  $Q$ ), тем выше идет резонансная кривая – по любому абсолютному уровню кривые расширяются.

Связь между добротностью и полосой пропускания (4.55) дает еще одну запись АЧХ, часто используемую:

$$|\dot{K}(\Delta\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(2 \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_{0,7}}\right)^2}} \quad (4.56)$$

При анализе переходных процессов в резонансных контурах удобно ввести параметр, определяющий инерционность системы – постоянную времени контура  $\tau_k$ . Этот параметр аналогичен по смыслу постоянной времени  $RC$  или  $\frac{L}{R}$  в простейших ФНЧ (см. пример 4.4).

Постоянная времени резонансного контура

$$\tau_k = 2RC. \quad (4.57)$$

Связь между  $\tau_k$  и полосой пропускания  $\Delta\omega_{0,7}$  следующая:

$$\tau_k = 2RC = \frac{2R\omega_p C}{\omega_p} = \frac{2Q}{\omega_p} = \frac{2}{\Delta\omega_{0,7}}. \quad (4.58)$$

Подставляя в (4.51), получим еще одну формулу комплексной частотной характеристики:

$$\dot{K}(\Delta\omega) = \frac{R}{1 + j\Delta\omega\tau_k}. \quad (4.59)$$

Из сравнения с (4.26) видна аналогия частотных характеристик резонансного контура и фильтра нижних частот первого порядка (см. рис. 4.17).

Пересчет сопротивлений в высокодобротных контурах.

Неполное включение контура

На практике активные сопротивления почти всегда и включены "внутрь" контура, и шунтируют его (рис. 4.18).

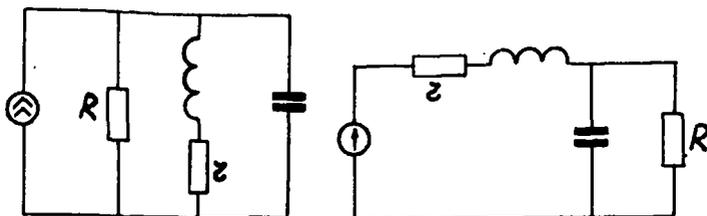


Рис. 4.18

Точная формула становится заметно более сложной. Добротность контура снижается как из-за  $r$ , так и из-за  $R$ . Однако, если добротность остается высокой, справедлива приближенная формула

$$|K(\Delta\omega)| = \frac{R_2}{\sqrt{1 + (2Q_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_p})^2}}, \quad (4.60)$$

где эквивалентная добротность  $Q_2$  учитывает влияние и шунта  $R$ , и сопротивления потерь  $r$ .

Из формулы для добротности (4.42)  $Q = \frac{R}{r}$ ,  $Q = \frac{\rho}{r}$  видна эквивалентность шунта  $R$  и сопротивления  $r$  (при равной  $Q$ ):

$$R = \frac{\rho^2}{r}, \quad r = \frac{\rho^2}{R} \quad (4.61)$$

Это позволяет "пересчитывать" сопротивления либо "внутрь" контура, либо "выносить" их в шунт (рис. 4.19).

На практике разработчик часто встречается со следующей трудностью: резонансный контур сам по себе имеет достаточно высокую добротность, однако при подключении источника сигнала и нагрузки эквивалентная добротность недопустимо уменьшается. В этом случае применяется так называемое неполное включение контура (рис. 4.20).

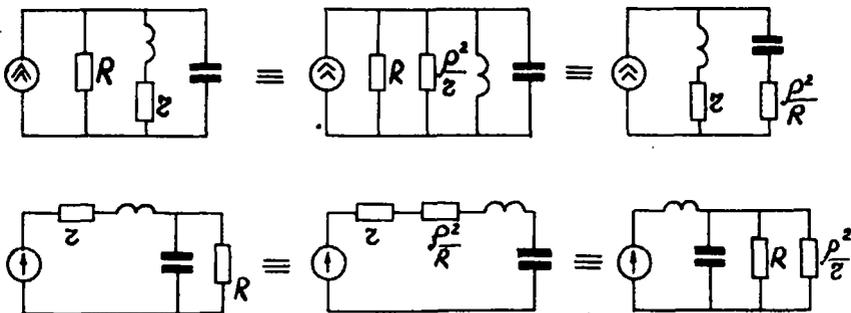


Рис. 4.19

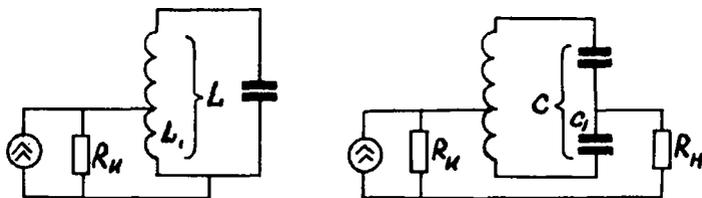


Рис. 4.20

Коэффициент включения

$$x = \frac{X_{связи}}{X} = \frac{L_1}{L} = \frac{1}{\frac{C}{C_1}}, \quad x \leq 1. \quad (4.62)$$

Пересчет сопротивления  $R$ , шунтирующего часть контура, в эквивалентное сопротивление полного шунта  $R_j$  или сопротивление потерь  $r_j$  таков:

$$R_j = \frac{R}{x^2}, \quad r_j = \frac{\rho^2 x^2}{R}. \quad (4.63)$$

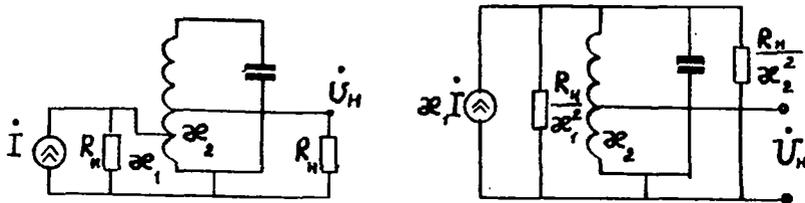


Рис. 4.21

При расчете удобно также вводить эквивалентный источник, включенный на весь контур (рис. 4.21)

$$\dot{I}_g = \alpha I \quad (4.64)$$

**Пример 4.9.** Высокодобротный контур ( $Q = 100$ ,  $\rho = 500 \text{ Ом}$ ) должен быть подключен к источнику с  $R_u = 1 \text{ кОм}$  и нагрузке  $R_n = 2 \text{ кОм}$  (см. рис. 4.21). Желательно, чтобы добротность нагруженного контура была не менее  $Q_g \geq 40$ .

Определим эквивалентную добротность при полном включении источника и нагрузки. Собственное сопротивление потерь контура

$r_n = \frac{\rho}{Q} = 5 \text{ Ом}$ . Пересчет шунтов  $R_u$  и  $R_n$  дает

$$r_u = \frac{\rho^2}{R_u} = 250 \text{ Ом}, \quad r_n = \frac{\rho^2}{R_n} = 125 \text{ Ом}.$$

Общее сопротивление потерь  $r_\Sigma = 380 \text{ Ом}$ , что соответствует эквивалентной добротности  $Q_g = \frac{\rho}{r_\Sigma} = 1,3$ .

Пересчитав  $r_\Sigma$  в единый шунт  $R_\Sigma$ , определим коэффициент передачи при резонансе:

$$K_{\text{рез}} = \frac{\dot{U}_n}{\dot{I}} = R_\Sigma = \frac{\rho^2}{r_\Sigma} = 658 \text{ Ом}.$$

Применим неполное включение: для источника  $\alpha_1 = 0,1$ , для нагрузки  $\alpha_2 = 0,15$ . Вносимые в контур сопротивления потерь

$$r'_u = \frac{\rho^2 \alpha_1^2}{R_u} = 2,5 \text{ Ом}, \quad r'_n = \frac{\rho^2 \alpha_2^2}{R_n} = 2,8 \text{ Ом}.$$

Общее сопротивление потерь  $r'_\Sigma = 2,5 + 2,8 + 5 = 10,3 \text{ Ом}$ , что дает эквивалентную добротность  $Q'_g = 48,5$  и резонансное сопротивление  $R'_{\text{рез}} = 24,3 \cdot 10^3 \text{ Ом}$ .

Определим коэффициент передачи  $K'_{\text{рез}}$ , для чего введем эквивалентный источник тока, включенный на весь контур:  $\dot{I}_g = 0,1$ . Напряжение на контуре

$$\dot{U}_k = 0,1 \dot{I} R'_{\text{рез}} = 2,43 \cdot 10^3 \dot{I}.$$

Напряжение на нагрузке

$$\dot{U}_n = \alpha_2 \dot{U}_k = 364 \dot{I}.$$

Как видим, коэффициент передачи несколько уменьшился (с 658 до 364 Ом), однако требования по добротности выполнены.

## 5. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

### 5.1. Постановка вопроса

Интегральное преобразование Лапласа, изучаемое в курсе математики, устанавливает взаимно-однозначное соотношение между сигналом  $s(t)$  и комплексной функцией комплексной переменной  $\rho$   $S(\rho)$  (как говорят в математике, "оригиналом" и его "изображением").

Связи между воздействующими сигналами и реакциями в линейной цепи, получаемые по законам токопрохождения, можно легко перевести в такие же или более простые связи между изображениями воздействий и реакций. Так, суммирование токов или напряжений переходит в суммирование их изображений, система динамических интегродифференциальных уравнений – в подобную по форме систему алгебраических уравнений. Определив в результате решения системы уравнений изображение реакции, можно с помощью обратного преобразования Лапласа найти выходной сигнал. Этот подход схематично показан на рис. 5.1.

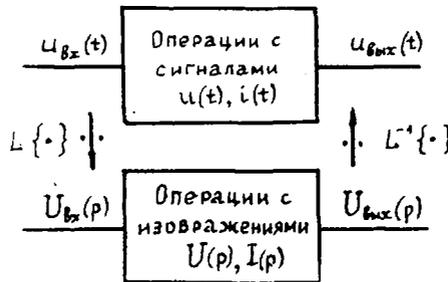


Рис. 5.1

Как известно, преобразование Лапласа применимо к функциям времени, тождественно равным нулю при  $t < 0^*$ . Таким образом, рассматриваемый метод применим для анализа цепей под воздействием сигналов, имеющих четкий момент начала, который можно принять за  $t = 0$ . Это могут быть: одиночный импульс произвольного вида

\* Имеется в виду одностороннее преобразование Лапласа. Использование более сложного двустороннего преобразования Лапласа снимает это ограничение.

(но с определенным началом); сигнал включения типа ступеньки  $f(t)$ , включение гармонического сигнала или любого периодического сигнала (периодического только при  $t > 0$ ). Есть математическое ограничение и на скорость нарастания сигнала при  $t \rightarrow -\infty$ . Однако это ограничение настолько слабое<sup>х</sup>, что практически не учитывается.

Таким образом, аппарат использования преобразования Лапласа очень хорошо дополняет метод комплексных амплитуд, который предназначен для анализа установившегося режима. Методом преобразования Лапласа анализируют переходной режим от момента включения к установившемуся состоянию, а также прохождение одиночных импульсов и специальных тестовых сигналов (например, линейно нарастающего сигнала).

Решение системы уравнений относительно изображений токов или напряжений приводит к следующему выражению:

$$U_{\text{вых}}(\rho) = K(\rho) U_{\text{вх}}(\rho).$$

Функция  $K(\rho)$ , определяемая структурой и параметрами цепи, имеет тот же смысл, что и коэффициент передачи от входа к выходу для резистивных цепей или комплексная частотная характеристика в методе комплексных амплитуд. Но здесь это передача не сигнала, а его изображения.

По определению, передаточная функция цепи есть отношение изображения выходного сигнала к изображению входного:

$$K(\rho) = \frac{S_{\text{вых}}(\rho)}{S_{\text{вх}}(\rho)}. \quad (5.1)$$

В зависимости от конкретного содержания сигналов  $S_{\text{вх}}(t)$ ,  $S_{\text{вых}}(t)$  передаточная функция может быть безразмерной или размерной (сопротивление, проводимость). Если передаточная функция цепи найдена, то анализ прохождения любого сигнала  $S_{\text{вх}}(t) \rightarrow S_{\text{вых}}(t)$  сводится к следующей цепочке:

$$\begin{aligned} S_{\text{вх}}(t) &\rightarrow S_{\text{вх}}(\rho), \\ S_{\text{вых}}(\rho) &= K(\rho) S_{\text{вх}}(\rho), \\ S_{\text{вых}}(\rho) &\rightarrow S_{\text{вых}}(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для практического использования этой методики нужно уметь:

- а) по заданному сигналу находить его изображение,

<sup>х</sup>Нарастание должно быть не быстрее экспоненты с любым показателем.

- б) по заданному изображению находить сигнал,
- в) по заданной структуре цепи находить ее передаточную функцию.

В цепочке действий (5.2) не фигурируют начальные условия (состояние цепи в момент подачи сигнала). В такой форме предполагается, что исходное состояние – "нулевое" (в цепи нет токов через индуктивности, а емкости разряжены). В терминах, введенных ранее [3] в связи с решением динамических уравнений, это – реакция при нулевом состоянии (PNC). Однако использование преобразования Лапласа позволяет найти также реакцию при нулевом воздействии, т.е. вызванную ненулевыми начальными условиями (PNB).

Преобразование Лапласа может быть использовано как метод решения динамических уравнений цепи; передаточная функция цепи при этом не вычисляется. Исходными для анализа являются сами динамические уравнения и заданные начальные условия.

Наконец, описание сигналов с помощью их изображений как функций комплексной переменной  $p$ , а также описание цепей по их передаточным функциям  $K(p)$  открывает еще один путь анализа сигналов и цепей. Это так называемая диаграмма полюсов – нулей в  $p$ -плоскости. При некоторых ограничениях на класс цепей указание координат полюсов и нулей передаточной функции дает очень наглядную информацию о частотных и временных характеристиках цепи.

Все эти вопросы рассматриваются в данной главе.

## 5.2. Определение изображения по заданному сигналу

Из математики известны определения прямого и обратного преобразований Лапласа  $s(t) \leftrightarrow S(p)$ :

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-pt} dt, \quad S(p) = L\{s(t)\}; \quad (5.3)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} S(p) e^{pt} dp, \quad s(t) = L^{-1}\{S(p)\}. \quad (5.4)$$

Справа даны условные записи прямого  $L\{\cdot\}$  и обратного  $L^{-1}\{\cdot\}$  преобразований<sup>х</sup>.

<sup>х</sup>Выбор пути интегрирования в (5.4) (параметр  $\sigma$ ) определяется областью сходимости. В рамках данной книги проблемы сходимости интеграла Лапласа не обсуждаются. При необходимости читатель может воспользоваться обширной литературой по преобразованию Лапласа и его приложениям.

На практике редко приходится находить изображение с помощью интеграла (5.3). Почти всегда можно обойтись табличными парами  $s(t) \leftrightarrow S(p)$  и применением небольшого числа основных свойств преобразования Лапласа.

Т а б л и ц а 5.1

Основные свойства преобразования Лапласа

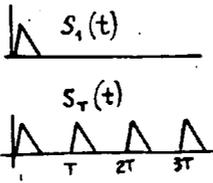
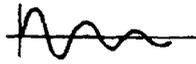
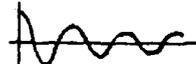
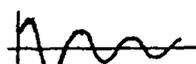
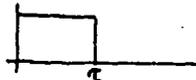
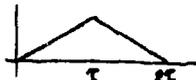
Основные операции	Сигнал	Изображение
1. Линейная комбинация	$s(t) = A s_1(t) + B s_2(t)$	$S(p) = A S_1(p) + B S_2(p)$
2. Дифференцирование	$s(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$S(p) = p X(p) - x(0)$
3. Интегрирование	$s(t) = \int_0^t x(t') dt' + s(0)$	$S(p) = \frac{X(p)}{p} + \frac{s(0)}{p}$
4. Сдвиг во времени	$s(t) = x(t - \tau)$	$S(p) = X(p) e^{-p\tau}$
5. Изменение масштаба	$s(t) = x(at)$	$S(p) = \frac{1}{ a } X\left(\frac{p}{a}\right)$
6. Умножение на $t$	$s(t) = t x(t)$	$S(p) = -\frac{dX(p)}{dp}$
7. Умножение на $e^{-\alpha t}$	$s(t) = e^{-\alpha t} x(t)$	$S(p) = X(p + \alpha)$
8. Умножение сигналов	$s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S(p) = S_1(p) * S_2(p)$
9. Свертка сигналов	$s(t) = s_1(t) * s_2(t)$	$S(p) = S_1(p) \cdot S_2(p)$
10. Периодическое продолжение одиночного импульса	 <p>The diagram shows two plots. The top plot shows a single triangular pulse labeled <math>S_1(t)</math> starting at <math>t=0</math> and ending at <math>t=T</math>. The bottom plot shows a periodic extension of this pulse, labeled <math>S_T(t)</math>, consisting of a series of identical triangular pulses repeated every <math>T</math> units of time, with the first pulse starting at <math>t=0</math> and subsequent pulses starting at <math>t=T, 2T, 3T</math>.</p>	$S_T(p) = \frac{S_1(p)}{1 - e^{-pT}}$

Таблица 5.2

Основные табличные пары

	Сигнал при $t > 0$	Изображение	Сигнал
I.	$\delta(t)$	$1$	
2.	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	
2'	$1(t-\tau)$	$\frac{1}{p} e^{-p\tau}$	
3.	$e^{-dt}$	$\frac{1}{p+d}$	
4.	$e^{j\omega t}$	$\frac{1}{p-j\omega}$	
5.	$1 - e^{-dt}$	$\frac{d}{p(p+d)}$	
6.	$t$	$\frac{1}{p^2}$	
7.	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	}
7'	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$	
8.	$t e^{-dt}$	$\frac{1}{(p+d)^2}$	
9.	$t^n e^{-dt}$	$\frac{n!}{(p+d)^{n+1}}$	}
9'	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-dt}$	$\frac{1}{(p+d)^n}$	
IO.	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	
II.	$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	
II2.	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi - \omega_0 \sin \varphi}{p^2 + \omega_0^2}$	

Сигнал при	Изображение	Сигнал
13. $e^{-\lambda t} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p+\lambda)^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2 + \lambda^2}$	
14. $e^{-\lambda t} \cos \omega_0 t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega_0^2} = \frac{p+\lambda}{p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2 + \lambda^2}$	
15. $e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi + (\lambda \cos \varphi - \omega_0 \sin \varphi)}{p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2 + \lambda^2}$	
16. Прямоугольный импульс	$\frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau})$	
17. Треугольный импульс	$\frac{1}{p^2} (1 - e^{-p\tau})^2$	

Пользуясь основными свойствами (табл. 5.1), можно получить все формулы табл. 5.2.

Приведем примеры получения изображений сигналов, не указанных в табл. 5.2.

**Пример 5.1.** Сигнал на рис. 5.2 нетрудно представить себе как сумму двух сигналов:

$$s'(t) = u_0 e^{-\lambda t} \quad 0 \leq t < \infty ;$$

$$s''(t) = -u_\tau e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot 1(t-\tau), \quad u_\tau = u_0 e^{-\lambda\tau}.$$

Обратите внимание на запись второго сигнала! Сомножитель  $1(t-\tau)$  необходим, иначе второй сигнал начнется не при  $t=\tau$ , а при  $t=0$  и при суммировании с  $s'(t)$  получим нуль.

Соответствующие изображения:

$$S(p) = S'(p) + S''(p) = \frac{u_0}{p+\lambda} + \frac{-u_0 e^{-\lambda\tau}}{p+\lambda} e^{-p\tau} = \frac{u_0}{p+\lambda} (1 - e^{-(\lambda+p)\tau}).$$

**Пример 5.2.** Рассмотрим сигнал, изображенный на рис. 5.3. В данном случае можно пойти двумя путями.

I. Представить  $s(t)$  как сумму трех сигналов  $s'(t)$ ,  $s''(t)$ ,  $s'''(t)$  изображения которых - табличные.

2. Получить вспомогательный сигнал  $s_2(t)$ , продифференцировав  $s(t)$ . Изображение  $s_2(t)$  состоит из двух табличных. Используя операцию интегрирования (в изображении это умножение на  $\frac{1}{p}$ ), придем к  $S(p)$ .

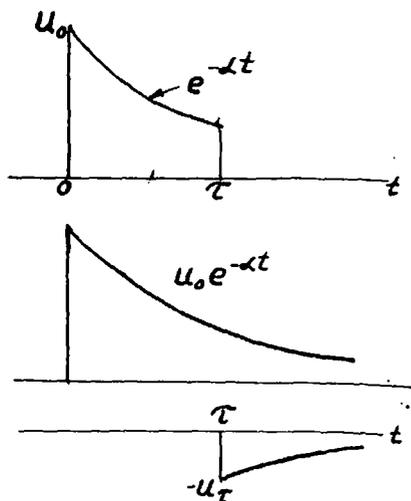


Рис. 5.2

В первом варианте

$$S(p) = \frac{A}{\tau} \frac{1}{p^2} - \frac{A}{\tau} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \frac{A}{p} e^{-pT}$$

Во втором варианте

$$s_2(p) = \frac{A}{\tau} \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) - A e^{-pT}$$

После интегрирования сигнала  $s_2(t)$

$$S(p) = \frac{s_2(p)}{p}$$

Пример 5.3. Сигнал вида "меандр" (рис. 5.4). Изображение одиночного импульса  $s_1(t)$ :

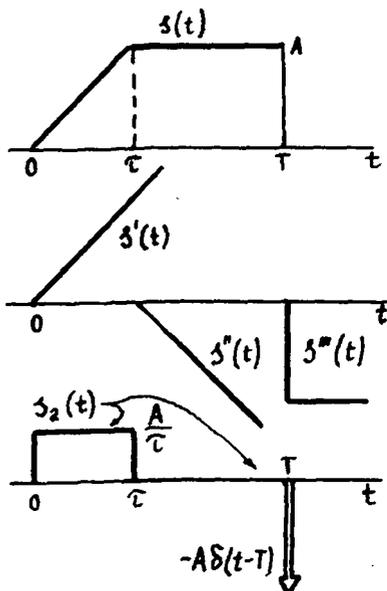


Рис. 5.3

$$S_1(p) = \frac{1 - e^{-p\frac{T}{2}}}{p}$$

Введя периодическое продолжение (П. 10, табл. 5.1)

$$S_T(p) = \frac{1 - e^{-p\frac{T}{2}}}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

и добавив отрицательную ступеньку  $-\frac{1}{2}1(t) \div -\frac{1}{2p}$ , получим

$$S(p) = \frac{1}{p} \left( \frac{1 - e^{-p\frac{T}{2}}}{1 - e^{-pT}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2p} \frac{2 - 2^{-p\frac{T}{2}} - 1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} = \frac{1}{2p} \frac{(1 - e^{-p\frac{T}{2}})^2}{1 - e^{-pT}}$$

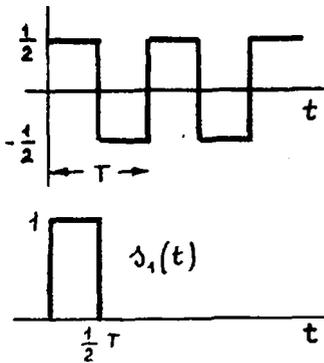


Рис. 5.4

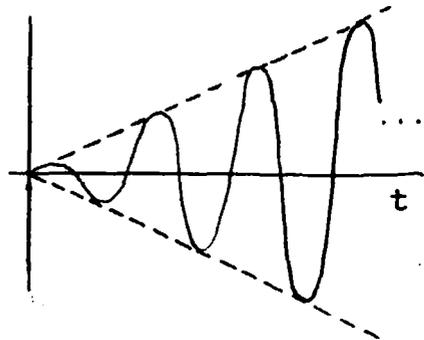


Рис. 5.5

Пример 5.4. Линейно нарастающий "гармонический" сигнал (рис. 5.5).

Удобно воспользоваться изображением П. 10, табл. 5.2 и правилом умножения на  $t$ :

$$S(p) = -\frac{d}{dp} \left[ \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right] = \frac{2\omega_0 p}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$$

Приведенные примеры показывают, как найти изображение сигнала, отсутствующего в таблице, не прибегая к вычислению интеграла (5.3).

### 5.3. Определение сигнала по изображению

В общем случае можно найти оригинал (т.е. сигнал) по изображению, используя формулу вычетов для взятия интеграла (5.4):

$$\frac{1}{2\pi j} \oint F(p) dp = \sum_i \text{res}_i, \quad (5.5)$$

где  $\text{res}_i$  - вычет подынтегральной функции  $F(p)$  в ее полюсе  $p_i$ .

Если  $F(p)$  записать в виде дроби

$$F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)},$$

то полюса  $p_i$  - корни уравнения  $R(p) = 0$ .

Вычет в простом полюсе

$$\text{res}_i = \left. \frac{Q(p)}{\frac{dR(p)}{dp}} \right|_{p=p_i} \quad (5.6)$$

Вычет в полюсе кратности  $k$

$$\text{res}_i = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[ \frac{Q(p)(p-p_i)^k}{R(p)} \right] \right|_{p=p_i} \quad (5.7)$$

**Пример 5.5.** Найти сигнал по изображению:

$$S(p) = \frac{2p}{(p+1)(p+2)^2}$$

Вычислим вычеты подынтегральной функции  $S(p)e^{pt}$  в простом полюсе  $p_1 = -1$  и двукратном полюсе  $p_2 = -2$ :

$$\begin{aligned} \text{res}_1 &= \left. \frac{2pe^{pt}}{\frac{d}{dp} [(p+1)(p+2)^2]} \right|_{p=-1} = \left. \frac{2pe^{pt}}{(p+2)(3p+4)} \right|_{p=-1} = -2e^{-t}; \\ \text{res}_2 &= \left. \frac{d}{dp} \left[ \frac{2pe^{pt}(p+2)^2}{(p+1)(p+2)^2} \right] \right|_{p=-2} = \left. \frac{2(1+pt+pt^2)e^{pt}}{(p+1)^2} \right|_{p=-2} = 2e^{-2t} + 4te^{-2t}. \end{aligned}$$

Ответ:  $s(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 4te^{-2t}, \quad t > 0.$

Пользование методом вычетов (5.5) предполагает соблюдение осторожности, т.к. применение формул (5.6), (5.7) без анализа поведения функции  $F(p)$  на плоскости  $p$  может привести к ошибочным результатам. Наиболее частая ошибка этого типа происходит в том случае, когда изображение  $S(p)$  не является правильной дробью, а содержит целую часть.

Пусть, например, дано изображение  $S(\rho) = \frac{\rho}{\rho+1}$ . Степени числителя и знаменателя одинаковы, а значит, дробь содержит целую часть. Выделим ее:

$$S(\rho) = \frac{\rho}{\rho+1} = \frac{\rho+1-1}{\rho+1} = 1 - \frac{1}{\rho+1}.$$

Обращение изображения с помощью таблицы (III. I и 3 табл. 5.2) дает

$$s(t) = \delta(t) - e^{-t}.$$

Определение вычета по (5.6) дает другой результат:

$$\text{res} = \frac{\rho e^{\rho t}}{\frac{d}{d\rho}(\rho+1)} \Big|_{\rho=-1} = -e^{-t}.$$

Содержащаяся в сигнале  $\delta$ -функция утеряна.

Необходимо было сначала выделить целую часть дроби, а затем уже брать вычет.

Неверный результат получится и в том случае, когда в изображении есть члены вида  $e^{-\rho t}$  (что говорит о наличии запаздывающих составляющих в сигнале). Так, формальное вычисление вычета для случая изображения прямоугольного импульса (II. 16 табл. 5.2) дает ошибочный результат  $S(t) = 0$ :

$$\text{res} \frac{(1 - e^{-\rho t}) e^{\rho t}}{\frac{d\rho}{d\rho}} \Big|_{\rho=0} = (1 - e^0) e^0 = 0.$$

Практичный и удобный метод определения сигнала по изображению - разложение рациональной функции  $S(\rho)$  на простые дроби. Метод удобно пояснить на примере.

Пример 5.6.

$$S(\rho) = \frac{4\rho^2 + 11\rho + 4}{\rho^3 + 3\rho^2 + 2\rho}.$$

Определяем корни знаменателя:  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = -1$ ,  $\rho_3 = -2$ . Тогда  $S(\rho)$  можно разложить на три простые дроби:

$$S(\rho) = \frac{4\rho^2 + 11\rho + 4}{\rho(\rho+1)(\rho+2)} = \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\rho+1} + \frac{C}{\rho+2}.$$

Коэффициенты  $A, B, C$  пока что не определены. Их можно найти несколькими способами, порекомендуем два из этих способов.

1) Приведение правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A(\rho+1)(\rho+2) + B\rho(\rho+2) + C\rho(\rho+1)}{\rho(\rho+1)(\rho+2)}$$

Раскрывая числитель и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\rho$  справа и слева, получим систему уравнений относительно  $A, B, C$ :

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4, \\ 3A + 2B + C &= 11, \\ 2A &= 4. \end{aligned}$$

Решение системы дает значения коэффициентов:  $A = 2, B = 3, C = -1$ .

2) Искусственный прием: домножение правой и левой частей на двучлен  $(\rho - \rho_i)$  с последующим переходом  $\rho \rightarrow \rho_i$ .

В нашем случае

$$\frac{4\rho^2 + 11\rho + 4}{\rho(\rho+1)(\rho+2)} (\rho+1) = \frac{A(\rho+1)}{\rho} + B + \frac{C(\rho+1)}{\rho+2}$$

Подставив  $\rho = -1$ , получим

$$\frac{4 - 11 + 4}{-11} = 0 + B + 0, \quad B = 3$$

Аналогично

$$C = \frac{4\rho^2 + 11\rho + 4}{\rho(\rho+1)} \Big|_{\rho=-2} = -1, \quad A = \frac{4\rho^2 + 11\rho + 4}{(\rho+1)(\rho+2)} \Big|_{\rho=0} = 2$$

Найдя неопределенные коэффициенты, используем табличные пары:

$$S(\rho) = \frac{2}{\rho} + \frac{3}{\rho+1} - \frac{1}{\rho+2} \rightarrow S(t) = 2 \cdot 1(t) + (3e^{-t} - e^{-2t}) 1(t)$$

Несколько сложнее найти разложение, если среди корней знаменателя есть кратные. Тогда в разложении должны быть дроби со знаменателями вида  $(\rho - \rho_i)^k$ . Покажем на примере методику искусственного приема для нахождения неопределенных коэффициентов.

Пример 5.7.

$$S(\rho) = \frac{2\rho^2 + 4\rho + 1}{(\rho+1)(\rho+2)^2} = \frac{A}{\rho+1} + \frac{B}{\rho+2} + \frac{C}{(\rho+2)^2}$$

Коэффициенты  $A$  и  $C$  можно найти, как и в примере 5.6:

$$A = \frac{2\rho^2 + 4\rho + 1}{(\rho + 2)^2} \Big|_{\rho = -1} = -1, \quad C = \frac{2\rho^2 + 4\rho + 1}{\rho + 1} \Big|_{\rho = -2} = -1.$$

Коэффициент  $B$  таким способом найти нельзя - мешает член с  $C$ .  
 Вычтем справа и слева дробь  $\frac{C}{(\rho + 2)^2}$ :

$$\frac{2\rho^2 + 4\rho + 1}{(\rho + 1)(\rho + 2)^2} + \frac{1}{(\rho + 2)^2} = \frac{A}{\rho + 1} + \frac{B}{\rho + 2}.$$

Приведа выражение слева к общему знаменателю, получим

$$\frac{2\rho^2 + 5\rho + 2}{(\rho + 1)(\rho + 2)^2} = \frac{A}{\rho + 1} + \frac{B}{\rho + 2}.$$

Дробь слева не может содержать двукратного полюса  $\rho_i = -2$ , т.к. соответствующего члена справа теперь нет. Это значит, что числитель должен делиться на  $\rho + 2$  нацело.

Разделив:

$$\begin{array}{r} 2\rho^2 + 5\rho + 2 \quad | \quad \rho + 2 \\ \hline 2\rho^2 + 4\rho \\ \hline \phantom{2\rho^2 + } \rho + 2 \\ \hline \phantom{2\rho^2 + } \phantom{\rho + } 0 \end{array}$$

имеем

$$\frac{(\rho + 2)(2\rho + 1)}{(\rho + 1)(\rho + 2)^2} = \frac{2\rho + 1}{(\rho + 1)(\rho + 2)} = \frac{A}{\rho + 1} + \frac{B}{\rho + 2}.$$

Теперь легко определить  $B$ :

$$B = \frac{2\rho + 1}{\rho + 2} \Big|_{\rho = -2} = 3.$$

Разложение найдено:

$$\left\{ S(\rho) = -\frac{1}{\rho + 1} + \frac{3}{\rho + 2} - \frac{1}{(\rho + 2)^2} \right\} \rightarrow S(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t} - te^{-2t}.$$

Остановимся на важном в приложениях случае комплексно-сопряженных корней. Можно решать задачу обычным методом разложения на простые дроби - в результате получим экспоненты с комплексными показателями. Используя формулы Эйлера

$$\frac{e^{jd} + e^{-jd}}{2} = \cos d, \quad \frac{e^{jd} - e^{-jd}}{2j} = \sin d, \quad (5.8)$$

получим окончательный результат в виде колебательного сигнала (10-15, табл. 5.2).

Однако можно пойти и другим путем - "подгонкой" под подходящую табличную пару из числа 10-15, табл. 5.2.

Пример 5.8.

$$S(p) = \frac{3p+30}{p^2+3p+100}$$

Детерминант знаменателя  $D = 3^2 - 4 \cdot 100 < 0$ , что говорит о комплексно-сопряженных корнях. Следовательно, сигнал должен иметь вид экспоненциально-гармонического колебания вида (III. 13-15, табл. 5.2).

Возьмем наиболее общий случай (П. 15, табл. 5.2):

$$s(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \div A \frac{\cos \varphi \cdot p + (\lambda \sin \varphi - \omega \cos \varphi)}{p^2 + 2\lambda p + \omega^2 + \lambda^2}$$

Сопоставляя коэффициенты при степенях  $p$  в знаменателе, определим частоту  $\omega$  и затухание  $\lambda$ :

$$2\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1,5 ; \\ \omega^2 + \lambda^2 = 100 \rightarrow \omega = \sqrt{100 - 2,25} = 9,887 .$$

Сопоставляя коэффициенты при степенях  $p$  в числителе, найдем остальные параметры: амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi$ :

$$A \cos \varphi = 3 ; \\ A \lambda \cos \varphi - A \omega \sin \varphi = 30 .$$

Зная  $\lambda$  и  $\omega$ , получим

$$A \sin \varphi = \frac{A \lambda \cos \varphi - 30}{\omega} = \frac{1,5 \cdot 3 - 30}{9,887} = -2,579 .$$

Далее:

$$A = \sqrt{A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{3^2 + 2,579^2} = 3,956 ; \\ \varphi = \arctg \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = -0,71 .$$

Итак, искомый сигнал

$$s(t) = 3,956 e^{-1,5t} \cos(9,887t - 0,71) .$$

В заключение рассмотрим случай, когда в изображении есть члены с множителем вида  $e^{-\rho t}$ , что говорит о наличии запаздывающих слагаемых. При обращении такие члены нужно выделить и рассматривать отдельно.

Пример 5.9.

$$S(\rho) = \frac{12(1 - e^{-6\rho})}{\rho^2 + 3\rho}.$$

Выделим слагаемые изображения без  $e^{-6\rho}$  и с этим множителем:

$$S(\rho) = S_1(\rho) + S_2(\rho) = \frac{12}{\rho(\rho+3)} - \frac{12}{\rho(\rho+3)} e^{-6\rho}.$$

Изображению  $S_1(\rho)$  соответствует сигнал (П. 5, табл. 5.2)

$$s_1(t) = 4(1 - e^{-3t}).$$

Изображению  $S_2(\rho)$  соответствует такой же сигнал, но включаемый в момент  $t = 6$ :

$$s_2(t) = -4(1 - e^{-3(t-6)})1(t-6).$$

#### 5.4. Определение передаточной функции цепи

Рассмотрим соотношения между изображениями напряжений и токов в элементах  $R, L, C$ .

Резистор  $R$ . Соотношение для временных функций

$$u_R(t) = R i_R(t)$$

соответствует такой же связи изображений:

$$U_R(\rho) = R I_R(\rho). \quad (5.9)$$

Емкость  $C$ . Соотношение

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' + u_C(0)$$

по свойству 3 табл. 5.1 переходит в

$$U_C(\rho) = \frac{1}{\rho C} I_C(\rho) + \frac{u_C(0)}{\rho}. \quad (5.10)$$

Индуктивность  $L$ . Дифференциальная связь временных функций

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

даёт в изображениях (П. 3, табл. 5.1):

$$U_L(\rho) = \rho L I_L(\rho) - L i_L(0), \quad (5.11)$$

или

$$I_L(\rho) = \frac{U_L(\rho)}{\rho L} + \frac{i_L(0)}{\rho} \quad (5.12)$$

При нулевых начальных условиях формулы особенно просты:

$$\begin{aligned} U_R(\rho) &= R I_R(\rho), \\ U_L(\rho) &= \rho L I_L(\rho), \\ U_C(\rho) &= \frac{1}{\rho C} I_C(\rho). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Вводятся понятия операторного сопротивления  $Z$  и операторной проводимости  $Y$  как отношения изображений напряжений и токов<sup>\*</sup>.

Для элементов  $R, L, C$  соответственно имеем:

$$\begin{aligned} Z_R &= R, & Z_L &= \rho L, & Z_C &= \frac{1}{\rho C}, \\ Y_R &= \frac{1}{R} = G, & Y_L &= \frac{1}{\rho L}, & Y &= \rho C. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Любую схему, содержащую  $R, L, C$  элементы, а также независимые и зависимые источники напряжений и токов можно заменить точно таким же соединением операторных сопротивлений и источников изображений напряжений и токов. При анализе полученной цепи можно использовать все законы токораспределения, как для чисто резистивной цепи. Получив выражение для выходного изображения, тем самым определяем передаточную функцию цепи.

**Пример 5.10.** Найти передаточную функцию цепи рис. 5.6, а. На рис. 5.6, б дана операторная схема. Рассматривая делитель напряжения, верхнее сопротивление которого  $R$ , а нижнее — параллельное соединение  $\rho L$  и  $\frac{1}{\rho C}$ , имеем

$$U_{вых}(\rho) = U_{вх}(\rho) \frac{\rho L \parallel \frac{1}{\rho C}}{R + \rho L \parallel \frac{1}{\rho C}} = \frac{\rho L}{R + \rho^2 RLC + \rho L} U_{вх}(\rho).$$

Отсюда передаточная функция

$$K(\rho) = \frac{\rho L}{\rho^2 RLC + \rho L + R}$$

<sup>\*</sup>Название "операторное сопротивление" можно связать с тем фактом, что умножение на сопротивление  $Z$  соответствует некоторой операции над сигналом  $i(t)$ : умножению на константу ( $Z_R$ ), интегрированию ( $Z_C$ ) или дифференцированию ( $Z_L$ ).

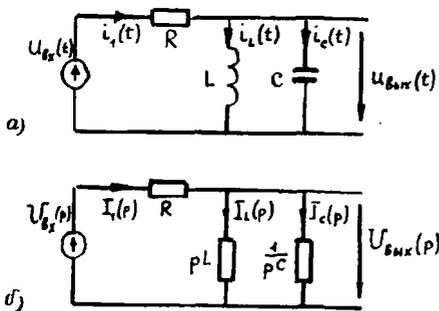


Рис. 5.6

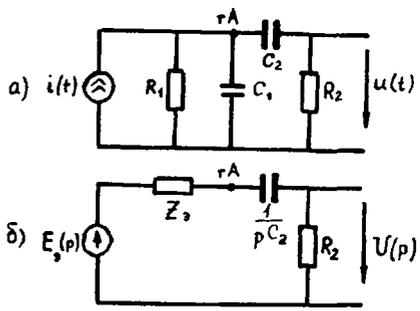


Рис. 5.7

Пример 5.11 (рис. 5.7,а). Теперь рассчитаем схему методом эквивалентного генератора, подключенного к точке А слева. Эквивалентное выходное сопротивление и ЭДС равны соответственно (рис. 5.7,б)

$$Z_3 = R_1 \parallel \frac{1}{pC_1} = \frac{R_1 \frac{1}{pC_1}}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} = \frac{R_1}{1 + p\tau_1}, \quad \tau_1 = R_1 C_1,$$

$$E_3(p) = I(p) Z_3.$$

Изображение выходного напряжения

$$U(p) = E_3(p) \frac{R_2}{Z_3 + \frac{1}{pC_2} + R_2}$$

Проведя несложные алгебраические выкладки, получим

$$K(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = R_1 \frac{p\tau_2}{p^2 \tau_1 \tau_2 + p(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{1,2}) + 1},$$

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \tau_{1,2} = R_1 C_2.$$

Сравнивая методику составления операторных схем и нахождения передаточной функции с методикой комплексных сопротивлений и получения комплексной частотной характеристики, можно видеть полную аналогию: простой заменой переменной  $p = j\omega$  можно перейти от комплексных сопротивлений к операторным и от комплексной частотной характеристики к передаточной функции. Следует, однако, отдавать себе отчет в том, что это - разные понятия.

Стоит отметить, что нет единой терминологии как в литературе по одной и той же дисциплине, так и (особенно) в смежных дисципли-

нах. Например, иногда авторы используют термин "передаточная функция", имея в виду комплексную частотную характеристику. В работах по кибернетике, автоматическому регулированию и некоторых других (в том числе и по радиоэлектронике) вместо "передаточная функция" часто употребляется термин "системная функция".

Терминами "передаточная функция" или "системная функция" определяется отношение изображений двух сигналов (воздействия и реакции). При конкретизации в этом же смысле могут применяться и другие термины. Так, если  $u_{вх}(t)$ ,  $i_{вх}(t)$ ,  $u_{вых}(t)$ ,  $i_{вых}(t)$  - входные и выходные токи и напряжения, то

$$Z_{вх}(\rho) = \frac{U_{вх}(\rho)}{I_{вх}(\rho)} \quad - \text{функция входного сопротивления};$$

$$Z_{пер}(\rho) = \frac{U_{вых}(\rho)}{I_{вх}(\rho)} \quad - \text{функция передаточного сопротивления},$$

$$Y_{вых}(\rho) = \frac{I_{вых}(\rho)}{U_{вых}(\rho)} \quad - \text{функция выходной проводимости и т.д.}$$

Все это - "передаточные функции" ("системные функции").

### 5.5. Учет начальных условий

При анализе реакции цепи при ненулевых начальных условиях необходимо иметь в виду "полные" формулы связи между токами и напряжениями в индуктивности и емкости (5.10)-(5.12).

При переходе к операторным схемам емкость следует заменить не просто операторным сопротивлением  $\frac{1}{\rho C}$ , но и включить последовательно независимый источник напряжения  $\frac{u_C(0)}{\rho}$ . Аналогично индуктивность при учете начального тока  $i_L(0)$  заменяется операторным сопротивлением  $\rho L$  и параллельным источником тока  $\frac{i_L(0)}{\rho}$  (рис. 5.8).

Для нахождения реакции нужно учесть воздействия всех источников и входного сигнала и независимых источников, изображающих как бы скачки напряжения  $\frac{u_C(0)}{\rho} \div u_C(0) \cdot 1(t)$  и тока  $\frac{i_L(0)}{\rho} \div i_L(0) \cdot 1(t)$ .

По принципу суперпозиции можно их рассматривать по отдельности.

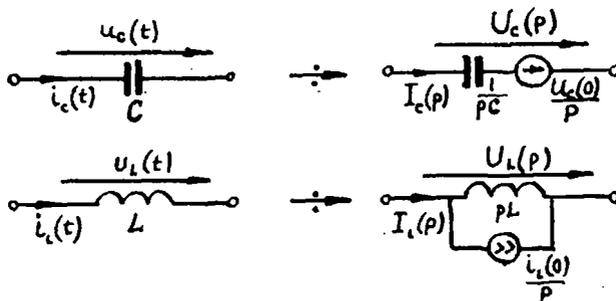


Рис. 5.8

**Пример 5.11** (рис. 5.9). Реакция  $u_2(t)$  на воздействие  $e(t)$  при заданных начальном напряжении на конденсаторе  $u_c(0)$  и токе в индуктивности  $i_L(0)$  складывается из трех составляющих, которые можно найти, анализируя три операторные схемы (б, в, д), полученные из общей схемы а исключением двух источников.

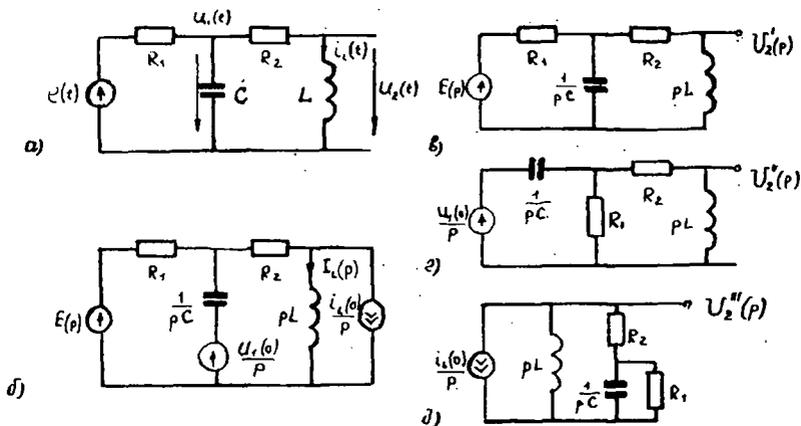


Рис. 5.9

Для схемы в

$$U_2'(\rho) = \frac{\frac{1}{\rho C + \frac{1}{R_2 + \rho L}}}{R_1 + \frac{1}{\rho C + \frac{1}{R_2 + \rho L}}} \cdot \frac{\rho L}{R_2 + \rho L} E(\rho).$$

Для схемы г

$$U_2''(\rho) = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \rho L}}}{\frac{1}{\rho C} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \rho L}}} \cdot \frac{\rho L}{R_2 + \rho L} \cdot \frac{u_1(0)}{\rho}$$

Для схемы д

$$U_2'''(\rho) = \frac{-1}{\frac{1}{\rho L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\rho C + \frac{1}{R_1}}}} \cdot \frac{i_L(0)}{\rho}$$

В этих выражениях использованы правила параллельного и последовательного соединения сопротивлений (проводимостей) и правило делителя напряжения.

После алгебраических преобразований получим

$$U_2(\rho) = \frac{\rho \frac{1}{\tau_1} E(\rho) + \rho u_1(0) - R_2 \left( \rho + \frac{1}{\tau_3} \right) i_L(0)}{\rho^2 + \rho \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right)},$$

где  $\tau_1 = CR_1$ ,  $\tau_2 = \frac{L}{R_2}$ ,  $\tau_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$ .

Замечание. При составлении операторных выражений во избежание ошибок рекомендуется проверять размерности отдельных членов (размерность изображений и токов  $V(\rho)$ , В/С;  $I(\rho)$ , А/С; размерность  $\rho$ , 1/С; размерности типичных сочетаний  $\rho L$ , Ом;  $\rho C$ , 1/Ом;  $RC$ , с;  $\frac{L}{R}$ , с;  $\frac{L}{C}$ , Ом<sup>2</sup>;  $LC$ , с<sup>2</sup>).

## 5.6. Операторный метод решения интегродифференциальных уравнений и анализа структурных схем

При разработке радиоустройств или сложных радиоэлектронных схем часто бывает так, что задается не принципиальная схема устройства, а система интегродифференциальных уравнений, которые разрабатываемая схема призвана реализовывать. Другой формой задания может быть структурная схема, состоящая не из элементов, а из укрупненных блоков, выполняющих те или иные операции.

Применение операторного метода (т.е. преобразования Лапласа) для анализа в таких случаях тоже чрезвычайно полезно.

**Пр и м е р 5.12.** Задана система интегродифференциальных уравнений относительно  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  при воздействии  $e(t)$  и начальных условиях  $U_1(0) = U_0$  и  $i(0) = i_0$ :

$$\frac{U_1(t) - e(t)}{R_1} + C \frac{dU_1(t)}{dt} + \frac{U_1(t) - U_2(t)}{R_2} = 0 ;$$

$$\frac{U_1(t) - U_2(t)}{R_2} + \frac{1}{L} \int_0^t U_2(t') dt' + i(0) = 0 .$$

Переходя к изображениям (используя III. 2 и 3, табл. 5.1), имеем

$$\frac{U_1(p)}{R_1} - \frac{E(p)}{R_1} + p C U_1(p) - C U_0 + \frac{U_1(p)}{R_2} - \frac{U_2(p)}{R_2} = 0 ;$$

$$\frac{U_1(p)}{R_2} - \frac{U_2(p)}{R_2} + \frac{1}{pL} U_2(p) + \frac{i_0}{p} = 0 .$$

Решив систему алгебраических уравнений, найдем изображения  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$ , а затем перейдем к самим сигналам  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ .

**Пр и м е р 5.13.** Задана структурная схема рис. 5.10,а, в которой использованы блоки сумматора ( $\oplus$ ), умножителя на параметр ( $\rightarrow$ ) и интегратора с принудительной установкой начального значения. Можно составить для нее систему динамических уравнений в той или иной форме, например

$$y(t) = \int_0^t \alpha_1 [x(t') - b_1 y(t') - b_2 x(t')] dt' + y_0 ;$$

$$x(t) = \int_0^t \alpha_2 y(t') dt' + x_0 .$$

Перепишем эту систему "в изображениях"  $X(p)$ ,  $Y(p)$ ,  $Z(p)$ :

$$Y(\rho) = \frac{a_1}{\rho} [X(\rho) - b_1 Y(\rho) - b_2 Z(\rho)] + \frac{y_0}{\rho};$$

$$Z(\rho) = \frac{a_2}{\rho} Y(\rho) + \frac{z_0}{\rho}.$$

Решение системы (подстановка  $Z(\rho)$  в первое уравнение, группировка членов при  $Y(\rho)$ ) дает

$$Z(\rho) = \frac{a_1 a_2}{B(\rho)} X(\rho) + \frac{a_2}{B(\rho)} y_0 + \frac{a_1 b_1 + \rho}{B(\rho)} x_0;$$

$$B(\rho) = \rho^2 + a_1 b_1 \rho + a_1 a_2 b_2.$$
(5.15)

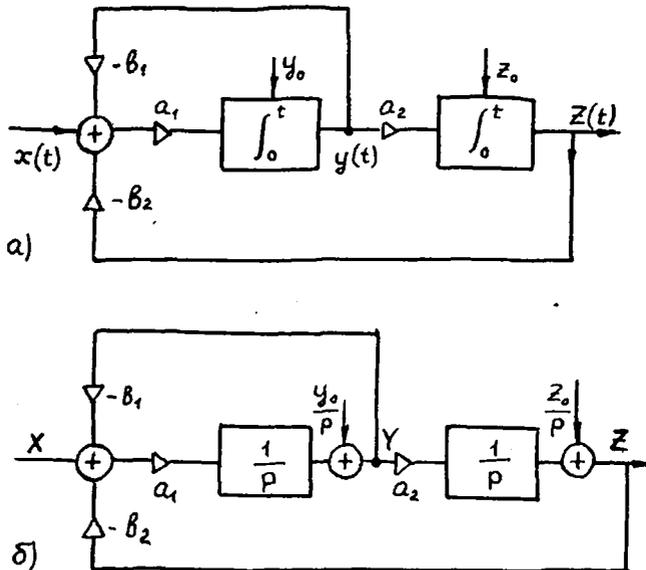


Рис. 5.10

Коэффициент при  $X(\rho)$  — передаточная функция цепи, второй и третий члены описывают переходный процесс РНВ; коэффициенты при  $y_0$  и  $x_0$  — передаточные функции от точек подачи  $y_0$  и  $x_0$  до выхода. Структурная схема может быть задана (или перерисована) в операторной форме (рис. 5.10, б), где блок интегратора заменен оператором  $\frac{1}{\rho}$  с добавлением сумматора, подключающего источник  $\frac{y_0}{\rho}$ . Для

Простоты записи изображения часто обозначают одной буквой (вместо  $X(\rho)$  — просто  $X$ ).

По операторной схеме можно сразу составить систему операторных уравнений, не привлекая интегродифференциальных динамических уравнений. Из рис. 5.10,б видно, что в сумматоре складываются три изображения:  $X$ ,  $b_1 Y$  и  $-b_2 Z$ . Сумма умножается на коэффициент  $a_1$  и поступает на вход блока с передаточной функцией  $\frac{1}{\rho}$ . На выходе

$$(X - b_1 Y - b_2 Z) a_1 \frac{1}{\rho}.$$

Складывая с изображением  $\frac{Y_0}{\rho}$ , получим  $Y$ . Итак,

$$\frac{a_1}{\rho} (X - b_1 Y - b_2 Z) + \frac{Y_0}{\rho} = Y$$

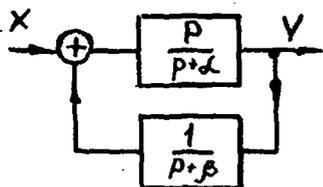
Рассматривая передачу  $Y \rightarrow Z$ , запишем

$$\frac{a_2}{\rho} Y + \frac{Z_0}{\rho} = Z.$$

Это те же уравнения, что и полученные из динамических уравнений (5.15).

Структурные схемы могут содержать блоки с некоторой заданной передаточной функцией. Составление операторных уравнений и в этом случае не представляет труда.

Пример 5.14. Для структурной схемы рис. 5.11 имеем оче-



видное уравнение

$$Y = \frac{\rho}{\rho + \alpha} \left[ X + \frac{1}{\rho + \beta} Y \right],$$

откуда

$$K(\rho) = \frac{Y}{X} = \frac{\rho(\rho + \beta)}{(\rho + \beta - 1)(\rho + \alpha)}$$

Рис. 5.11

### 5.7. Импульсная и переходная характеристики цепи

Помимо комплексной частотной характеристики цепи  $\dot{K}(j\omega)$ , включающей АЧХ и ФЧХ, очень важными являются импульсная и переходная характеристики.

По определению, импульсная характеристика цепи  $g(t)$  есть реакция на входной сигнал  $\delta(t)$ , т.е. отклик на чрезвычайно корот-

кий импульс, как бы дающий исходный "удар", после которого цепь предоставлена самой себе.

Переходная характеристика цепи  $h(t)$  - реакция на входной сигнал  $i(t)$ , т.е. переходный процесс, вызванный скачком на входе. В совокупности частотная и импульсная (или переходная) характеристики дают всестороннее описание цепи - как в частотной области, так и во временной.

Все три характеристики цепи  $K(j\omega)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  относительно просто связаны с передаточной функцией цепи  $K(p)$ .

Связь  $K(p)$  с  $K(j\omega)$  уже была отмечена выше:

$$K(p) = \tilde{K}(j\omega) \Big|_{j\omega=p} \quad (5.16)$$

Установим связь  $g(t)$  и  $h(t)$  с  $K(p)$ .

Найдем изображения

$$G(p) = L\{g(t)\}, \quad H(p) = L\{h(t)\}.$$

По общим правилам

$$S_{\text{вых}}(p) = K(p)S_{\text{вх}}(p).$$

Учитывая, что  $L\{\delta(t)\}=1$ ,  $L\{t(t)\}=\frac{t}{p}$  получим

$$G(p) = K(p), \quad (5.17)$$

$$H(p) = \frac{K(p)}{p}. \quad (5.18)$$

Другими словами, импульсная характеристика цепи есть сигнал, изображение которого - передаточная функция цепи:

$$g(t) \longleftrightarrow K(p). \quad (5.19)$$

Заметим, что переходная характеристика цепи является интегралом от импульсной характеристики (5.17):

$$h(t) = \int_0^t g(t') dt'. \quad (5.20)$$

**П р и м е р 5.14.** При работе источника тока  $i(t)$  (рис. 5.12, а) на резистор  $R$ , форма напряжения на нем  $u(t)$  реально не повторяет форму тока из-за наличия "паразитной" емкости  $C$ , шунтирующей резистор. В цепи проявляется инерционность, особенно сказывающаяся на форме выходных сигналов при резких изменениях тока.

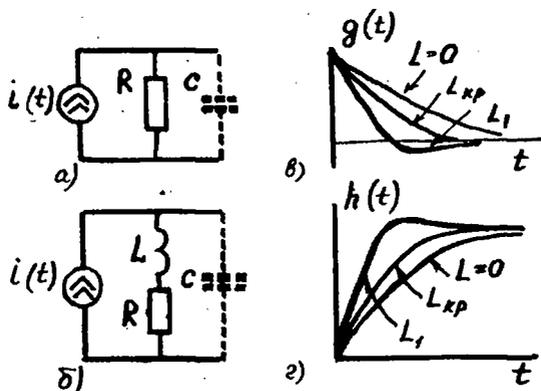


Рис. 5.12

С целью ускорения передачи пиков и скачков последовательно с резистором вводят некоторую "ускоряющую" индуктивность  $L$  (рис. 5.12, б). Однако при неудачном выборе  $L$  в цепи может возникнуть колебательный процесс установления (т.к. образовался резонансный контур). Проанализируем работу схемы с точки зрения ее импульсной и переходной характеристик. Передаточная функция цепи без  $L$

$$K(\rho) = R \frac{1}{1 + \rho\tau}$$

ей соответствует импульсная характеристика

$$R \frac{1}{1 + \rho\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\rho + \frac{1}{\tau}} \rightarrow g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

и переходная

$$\frac{1}{\tau} \frac{1}{\rho + \frac{1}{\tau}} \rightarrow h(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Как видим, импульсу тока соответствует реакция с экспоненциально убывающим "хвостом", а скачку тока - "затянутое" нарастание.

Передаточная функция цепи с "ускоряющей" индуктивностью

$$K(\rho) = \frac{1}{\tau} \frac{\rho + \frac{R}{L}}{\rho^2 + \rho \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

Корни полинома - знаменателя

$$\rho_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} (1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{L}{CR^2}}).$$

Выбор  $L$  повлияет на вид  $K(\rho)$  и, значит, на импульсную и переходную характеристики.

При  $L_{кр} = \frac{CR^2}{4}$  корень действительный кратности 2:  $\rho_{1,2} = -\frac{R}{2L_{кр}} = -\frac{2}{\tau}$ .

Это так называемый критический режим установления. Если выбрать  $L > L_{кр}$  корни будут комплексно-сопряженные, что означает наличие колебаний.

Возьмем для сравнения  $L = 2L_{кр}$  при этом

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{\tau} (-1 \pm j).$$

Изображения импульсной характеристики и переходной запишем в виде

$$G_{кр}(\rho) = \frac{1}{C} \frac{\rho + \frac{4}{\tau}}{(\rho + \frac{2}{\tau})^2}; \quad G_1(\rho) = \frac{1}{C} \frac{\rho + \frac{2}{\tau}}{\rho^2 + \rho \frac{2}{\tau} + \frac{2}{\tau^2}};$$

$$H_{кр}(\rho) = \frac{1}{C} \frac{\rho + \frac{4}{\tau}}{\rho(\rho + \frac{2}{\tau})^2}; \quad H_1(\rho) = \frac{1}{C} \frac{\rho + \frac{2}{\tau}}{\rho(\rho^2 + \rho \frac{2}{\tau} + \frac{2}{\tau^2})}$$

Используя один из методов перехода от изображения к сигналу, описанных в разд. 5.3, получим

$$g_{кр}(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{2t}{\tau}} (1 + 2 \frac{t}{\tau}); \quad g_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\frac{t}{\tau} + \frac{\pi}{4});$$

$$h_{кр}(t) = R [1 - (1 + \frac{t}{\tau}) e^{-\frac{2t}{\tau}}]; \quad h_1(t) = R [1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \frac{t}{\tau}].$$

Графики этих сигналов приведены на рис. 5.12, в и г. Разработчик может выбрать желательный характер реакции на импульсы и скачки.

### 5.8. Диаграмма полюсов-нулей

Читатель, по-видимому, уже заметил, что передаточная функция цепи  $K(\rho)$  - очень информативная характеристика, через нее можно получить как частотные свойства цепи (АЧХ, ФЧХ), так и временные

(импульсная и переходная). Однако непосредственно из записи  $K(p)$  трудно увидеть какие-либо характерные черты АЧХ, ФЧХ,  $q(t)$ ,  $h(t)$ . Но есть способ такого представления  $K(p)$ , что связь с АЧХ и  $q(t)$  становится почти наглядной. Это — диаграмма полюсов-нулей в  $p$ -плоскости.

Комплексная переменная  $p$  в преобразовании Лапласа имеет размерность  $\frac{1}{t}$ , ту же, что и частота  $\omega$  и затухание  $\sigma$  в экспоненциально-гармоническом колебании вида

$$s(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t.$$

Имеет смысл (и вскоре это выяснится) мнимую и вещественную оси комплексной  $p$ -плоскости отождествить соответственно с частотой и затуханием  $\sigma$ :

$$p = \sigma + j\omega.$$

Передаточная функция  $K(p)$  образует как бы некоторый рельеф над плоскостью  $(\sigma, j\omega)$ . Комплексная частотная характеристика, получаемая из  $K(p)$  заменой  $p = j\omega$  теперь может трактоваться как сечение всего "рельефа"  $K(p)$  вертикальной плоскостью, проходящей через ось мнимых величин  $j\omega$ . Передаточная функция любой цепи, содержащей сосредоточенные элементы  $R, L, C$ , имеет обязательно вид дробно-рациональной функции  $p$  с действительными коэффициентами:

$$K(p) = K \frac{p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n} = K \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (5.21)$$

где  $A(p)$  и  $B(p)$  — нормированные полиномы (т.е. с коэффициентами 1 при старших степенях  $p$ ).

Корни числителя  $\rho_{0i}$  называются нулями функции  $K(p)$ , а корни знаменателя  $\rho_{ni}$  — полюсами. Эти точки, представленные на  $p$ -плоскости, и образуют диаграмму полюсов-нулей (рис. 5.13). Полюсы отмечены крестиками, нули — кружками. Дополнительным кружком отмечают кратные полюсы и нули. Так, на рис. 5.13 крестик в кружке  $\rho_{n_{3,4}}$  означает двукратный полюс.

Количество полюсов  $n$  определяет порядок цепи, количество нулей  $m$  — не больше  $n$  (может быть и отсутствие нулей). И нули, и полюса могут располагаться либо на действительной оси, либо комплексно-сопряженными парами (как  $\rho_{n_1}$  и  $\rho_{n_2}$  на рис. 5.13).

Для устойчивых цепей (а только такие цепи и имеют смысл как линейные) все полюсы расположены в левой полуплоскости (т.е.  $\sigma_n < 0$ ).

Идеализованные цепи без потерь имеют полюсы строго на мнимой оси ( $\zeta_n=0$ ) как, например, идеальный контур, рассмотренный в гл. 4. Нули в общем случае могут быть расположены как слева, так и справа.

Если заданы координаты полюсов и нулей, то можно по ним записать полиномы  $A(\rho)$  и  $B(\rho)$  и саму передаточную функцию с точностью до произвольного коэффициента  $k$ :

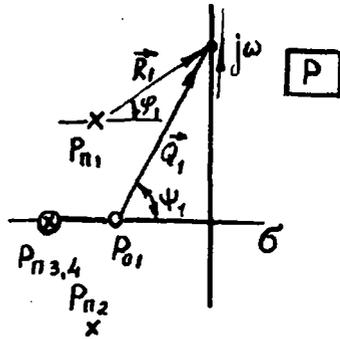


Рис. 5.13

$$k(\rho) = k \frac{(\rho - p_{01})(\rho - p_{02}) \dots}{(\rho - p_{n1})(\rho - p_{n2}) \dots} \quad (5.22)$$

Пусть, например, дано  $p_{01} = 0$ ,  $p_{n1} = -2$ ,  $p_{n2,3} = -1 \pm j$ . Тогда

$$K(\rho) = k \frac{\rho - 0}{(\rho + 2)(\rho + 1 - j)(\rho + 1 + j)} = k \frac{\rho}{\rho^3 + 4\rho^2 + 6\rho + 4}$$

Итак, поведение функции  $K(\rho)$  на всей  $\rho$ -плоскости полностью определяется тем, как расположены точки полюсов и нулей.

Наглядна такая аналогия: рельеф  $K(\rho)$  — это как бы эластичная "палатка", натянутая на высокие шести, поставленные в точках полюсов, и притянутая гвоздями в точках нулей.

Рассмотрим связь между комплексной частотной характеристикой  $\dot{K}(j\omega)$  и положением полюсов и нулей  $K(\rho)$ . При замене в (5.22)  $\rho = j\omega$  (5.16) имеем

$$\dot{K}(j\omega) = k \frac{(j\omega - p_{01})(j\omega - p_{02}) \dots}{(j\omega - p_{n1})(j\omega - p_{n2}) \dots} \quad (5.23)$$

Каждый двучлен в (5.23) представляет собой вектор, проведенный из фиксированной точки (нуля или полюса) в точку мнимой оси с "текущей" координатой  $j\omega$ , скользящую по оси при изменении аргумента частотной характеристики (см. рис. 5.13). При этом как длина вектора, так и его угол будет изменяться с изменением  $\omega$ . Именно это изменение и формирует частотную характеристику цепи.

Обозначим через  $\vec{R}_i$  и  $\vec{Q}_i$  векторы, проведенные из полюсов и нулей (см. рис. 5.13):

$$j\omega - p_{ni} = \bar{R}_i(\omega) = R_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)} ;$$

$$j\omega - p_{oi} = \bar{Q}_i(\omega) = Q_i(\omega) e^{j\psi_i(\omega)}$$

При таком обозначении  $K(j\omega)$  может быть представлена как произведение:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \bar{Q}_1(\omega) \cdot \bar{Q}_2(\omega) \cdots \frac{1}{\bar{R}_1(\omega)} \cdot \frac{1}{\bar{R}_2(\omega)} \cdots = \\ &= Q_1(\omega) Q_2(\omega) \cdots \frac{1}{R_1(\omega)} \cdot \frac{1}{R_2(\omega)} \cdots e^{j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots - \psi_1(\omega) - \psi_2(\omega) \dots]} \end{aligned} \quad (5.24)$$

То есть общая частотная характеристика формируется как произведение отдельных, "парциальных" частотных характеристик, каждая из которых связана с отдельным нулем или полюсом. При этом результирующая АЧХ определяется изменениями длин векторов  $Q_i(\omega)$  и  $R_i(\omega)$ , а ФЧХ — суммированием аргументов  $\varphi_i(\omega)$  и вычитанием аргументов  $\psi_i(\omega)$ . Рассмотрим парциальные АЧХ, связанные с одним нулем  $k_o(\omega)$  и с одним полюсом  $k_n(\omega)$ :

$$k_o(\omega) = Q(\omega), \quad k_n(\omega) = \frac{1}{R(\omega)}$$

Из рис. 5.14 видно, что

$$k_o(\omega) = \sqrt{\sigma_o^2 + (\omega - \omega_o)^2}, \quad k_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_n^2 + (\omega - \omega_n)^2}}$$

"Вклад" нуля в общую АЧХ — создание "провала" на частоте, равной координате  $\omega_o$  нуля, и возрастание (асимптотически пропорционально частоте ( $\sim \omega$ )) при увеличении частоты. "Вклад" полюса в общую АЧХ — создание подъема на частоте, равной координате  $\omega_n$  полюса. Асимптотика при возрастании частоты  $\sim \frac{1}{\omega}$ . Глубина провала и высота подъема определяется действительной координатой нуля или полюса ( $\sigma_o$  или  $\sigma_n$ ). Чем ближе полюс к оси  $j\omega$ , тем острее "резонансная" кривая АЧХ.

Зная характер парциальных АЧХ, можно по диаграмме полюсов — нулей даже на глаз приблизительно проанализировать вид результирующей АЧХ цепи. Приведем примеры такого анализа по заданным диаграммам полюсов — нулей (рис. 5.15).

Диаграмма рис. 5.15, а. Это цепь третьего порядка. Все три парциальные АЧХ имеют форму "резонансных" кривых, причем центральная (на  $\omega = 0$ ) более низкая и широкая, а две другие, связанные с комплексно-сопряженными полюсами, более узкие и высокие, т.к. эти

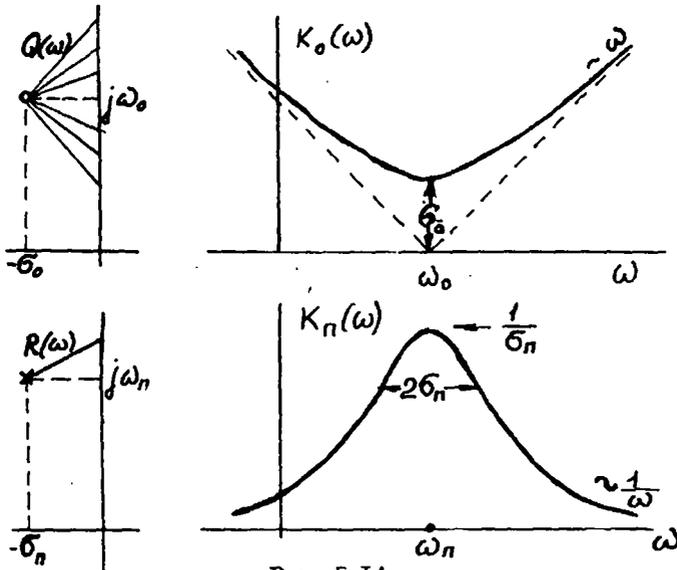


Рис. 5.14

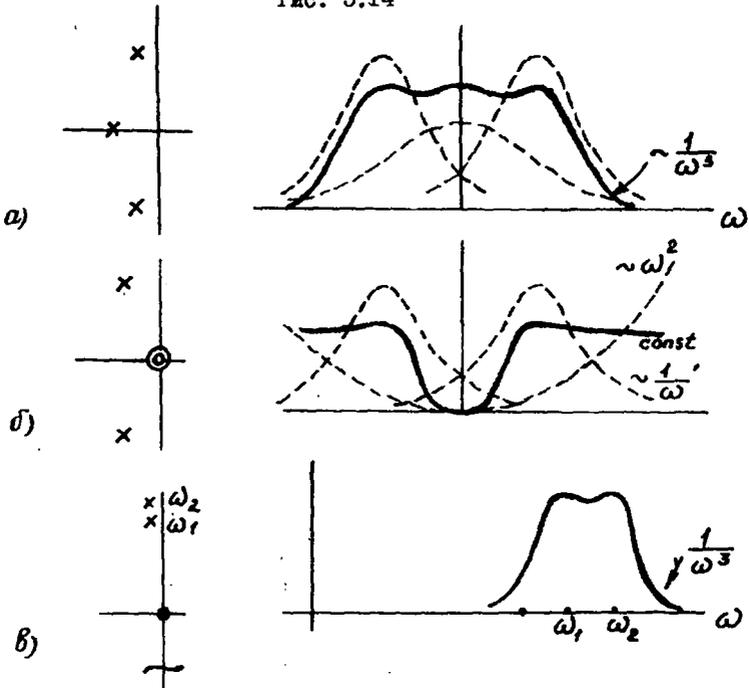


Рис. 5.15

полюса расположены ближе к мнимой оси. Перемножение трех кривых должно дать более широкую и выровненную результирующую АЧХ. Область пропускаемых частот – от нуля до некоторой частоты, приблизительно равной мнимой координате верхнего полюса. При  $\omega > \omega_n$  будет наблюдаться резкий спад (асимптотически  $\sim 1/\omega^3$ ). Это – фильтр нижних частот.

Диаграмма рис. 5.15,б. Это цепь второго порядка. Вклад комплексно-сопряженных полюсов – две симметричные резонансные кривые, вклад двукратного нуля  $p_0 = 0$  – нарастающая парабола  $k(\omega) = \omega^2$ . Перемножение их дает типичную АЧХ фильтра верхних частот: малый коэффициент передачи для области низких частот и  $k(\omega) = const$  – для высоких.

Диаграмма рис. 5.15,в. Это цепь четвертого порядка, т.к., кроме двух указанных на рисунке полюсов, обязательно должны быть еще два комплексно-сопряженных с ними. Ноль  $p_0 = 0$  свидетельствует о непропускании при  $\omega = 0$ . На частотах в районе расположения полюсов ( $\omega \sim \omega_1, \omega_2$ ) наблюдается "горб", формируемый в результате перемножения двух узких резонансных кривых, немного разнесенных по частоте. Это – полосовой фильтр.

Расположение полюсов на  $p$ -плоскости дает наглядную информацию и о временных характеристиках цепи, поскольку передаточная функция  $K(p)$  является одновременно лапласовским изображением импульсной характеристики  $q(t)$  (5.19).

Вспомнив метод обратного преобразования путем разложения на простые дроби, перепишем  $K(p)$  (5.21):

$$K(p) = \frac{A(p)}{(p-p_{n_1})(p-p_{n_2})} = \frac{A}{p-p_{n_1}} + \frac{B}{p-p_{n_2}} + \dots \quad (5.25)$$

Знаменатель каждой дроби определяется одним из полюсов. Таким образом, соответствующий этой дроби сигнал  $q_i(t)$  можно считать "вкладом" данного полюса в общую импульсную характеристику:

$$q(t) = \sum_i q_i(t) \quad (5.26)$$

Коэффициенты  $A, B, C \dots$  зависят не только от полюсов, но и от числителя  $A(p)$ , т.е. от нулей. К сожалению, здесь нет простого соотношения: каждый коэффициент зависит от всех нулей (и всех полюсов).

Тем не менее информация о "вкладах" каждого полюса является полезной: по расположению полюсов можно сразу увидеть характерные черты "элементарных" сигналов, из которых складывается импульсная характеристика цепи.

Связь между диаграммой полюсов и видом сигнала можно распространить на произвольные сигналы, не обязательно являющиеся импульсными характеристиками.

Рассмотрим некоторые примеры связей между расположением полюсов и видом элементарного сигнала, что, по сути дела, является просто иллюстрацией пар сигнал-изображение табл. 5.2.

I. Простой полюс на действительной оси (рис. 5.16,а). Координата полюса соответствует постоянной затухания экспоненциального сигнала  $s(t) = e^{\sigma_n t}$ . Расположение полюсов в левой полуплоскости говорит о спадающей экспоненте, в правой - о возрастающей.

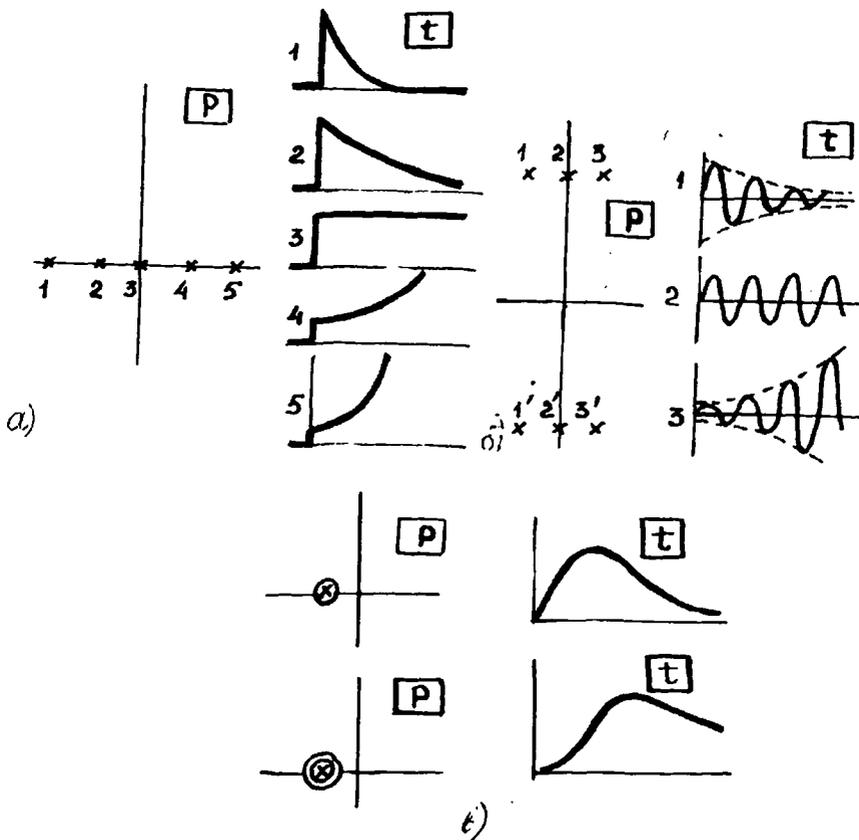


Рис. 5.16

2. Пара комплексно-сопряженных полюсов (рис. 5.16,б). Мнимая координата полюса соответствует частоте заполнения радиосигнала. Характер спада или нарастания определяется вещественной координатой полюса.

3. Двукратный или трехкратный полюс (рис. 5.16,в) соответствует сигналам вида  $te^{\sigma_n t}$ ,  $t^2 e^{\sigma_n t}$ . Такой же является "оггибающая" радиосигнала в случае кратных комплексно-сопряженных полюсов.

Отметим еще один аспект диаграммы полюсов. Если сопоставить классический метод решения динамических уравнений цепи с операторным методом, можно увидеть, что характеристическое уравнение

$B(p) = 0$ , определяющее возможные решения однородного дифференциального уравнения, в точности совпадает с полиномом-знаменателем передаточной функции  $K(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ . Корни характеристического

уравнения — это собственные частоты цепи, а соответствующие им временные функции — собственные моды, т.е. те колебания, которые возможны в цепи без внешнего воздействия (из-за ненулевых начальных условий). Отсюда следует, что диаграмма полюсов — это не что иное как диаграмма собственных частот цепи, а соответствующие ей элементарные сигналы — перечень собственных мод.

Любой переходный процесс в цепи обязательно будет складываться из этих собственных мод, однако — в каком именно сочетании — зависит от начальных условий.

В частности, свободные колебания в цепи после "мгновенного удара" на входе (т.е. подачи  $\delta$ -функции) — это импульсная характеристика, включающая все моды, с коэффициентами, зависящими от полинома-числителя  $A(p)$  или от диаграммы нулей.

Выше (с. 54) было отмечено ограничение: число нулей  $m$  не больше числа полюсов  $n$ . Теперь виден физический смысл этого ограничения: если  $m > n$ , то частотная характеристика оказывается безгранично нарастающей

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |K(\omega)| = \infty,$$

а импульсная содержит дублет  $\delta(t)$ . В пассивных цепях, а также в реальных активных цепях это невозможно. Однако для идеализированных моделей активных цепей это ограничение следует снять.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы надеемся, что внимательный читатель заметил: все методы анализа цепей - и метод динамических уравнений, и метод комплексных амплитуд, и метод преобразования Лапласа - родственны, тесно взаимосвязаны. Описание цепей и сигналов во временной области (дифференциальные уравнения, переходный режим, импульсная и переходная характеристика) и в частотной области (изображения сигналов в плоскости комплексной переменной  $p = \sigma + j\omega$  передаточная функция цепи, комплексная частотная характеристика) суть картины одного и того же объекта в разных ракурсах. При решении той или иной задачи исследователь может с равным основанием воспользоваться как "временным языком", так и "частотным". В ряде случаев целесообразно переходить с одного языка на другой - так задача будет решена наиболее просто. Но для этого нужно овладеть обоими языками.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М а т х а н о в П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. - М.: Высш. школа, 1990.
2. С и б е р т У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Ч.1.- М.: Мир, 1988.
3. К у з н е ц о в Д.В., Т р о н и н Д.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (Временной анализ). - М.: Изд-во МАИ, 1992.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

4. Анализ цепей при гармоническом воздействии .....	3
4.1. Постановка вопроса .....	3
4.2. Некоторые сведения из алгебры комплексных чисел ..	5
4.3. Комплексный сигнал, комплексная амплитуда .....	7
4.4. Комплексные сопротивления, проводимости .....	9
4.5. Комплексный коэффициент передачи, комплексная частотная характеристика .....	12
4.6. Резонансные цепи .....	19
5. Анализ цепей с применением преобразования Лапласа .....	29
5.1. Постановка вопроса .....	29
5.2. Определение изображения по заданному сигналу .....	31
5.3. Определение сигнала по изображению .....	37
5.4. Определение передаточной функции цепи .....	42
5.5. Учет начальных условий .....	45
5.6. Операторный метод решения интегродифференци- альных уравнений и анализа структурных схем .....	48
5.7. Импульсная и переходная характеристики цепи .....	50
5.8. Диаграмма полюсов-нулей .....	53
Заключение .....	61
Литература .....	62

Тем. план 1992, доп.

Кузнецов Юрий Владимирович  
Тронин Юрий Владимирович

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ  
РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ  
(ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ)

Редактор М.С. Винниченко  
Техн. редактор Н.Б. Карякина

---

Подписано в печать 8.06.92  
Бум. офсетная. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,87. Тираж 1000  
Зак. 2389/441. Цена 45 к.

---

Типография издательства МАИ  
125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4