

Министерство науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации
КОМИТЕТ ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

Д.В. КУЗНЕЦОВ, Д.В. ТРОНИН

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

(Временной анализ)

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
24 октября 1991 г.

Москва
Издательство МАИ
1992

62I.396 (075)

К 89I

УДК: 62I.372.0II.7I (075.8)

Кузнецов Д.В., Тронин Д.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (Временной анализ): Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1992. - 60 с.: ил.

В пособии освещены некоторые вопросы теории линейных радиоэлектронных цепей, дающие необходимую основу для временного анализа и расчета типичных радиоэлектронных устройств.

Теоретические методы иллюстрируются примерами практического анализа и расчета воздействия сигналов на радиоэлектронные цепи.

Для студентов факультета радиотехники ЛА дневной и вечерней форм обучения, изучающих дисциплины "Основы радиотехники", "Радиотехнические цепи и сигналы".

Рецензенты: О.Е. Антонов, И.И. Литвак

ISBN 5-7035-0230-0



Московский авиационный институт, 1992

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Радиоэлектронная цепь - это совокупность взаимосвязанных компонентов для обработки сигналов, носителями которых являются напряжения или токи. В качестве примеров радиоэлектронных цепей можно привести устройства, генерирующие, усиливающие или фильтрующие сигналы, модуляторы, детекторы и т.п.

Теория радиоэлектронных цепей включает в себя методы описания цепей и сигналов, а также анализ прохождения сигналов через цепи и синтез цепей с заданными характеристиками.

Несмотря на большое разнообразие вариантов построения радиоэлектронных цепей и их элементной базы, основные закономерности и основные методы анализа изучают на упрощенных моделях радиоэлектронных цепей. Фундаментальной моделью реальной цепи является схема, состоящая из соединения отдельных идеализированных элементов, таких, как источники напряжения или тока, сопротивления, емкости, индуктивности и т.п. Этим идеализированным элементам соответствуют различные компоненты радиоэлектронных устройств: резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, транзисторы, микросхемы и т.д.

Не следует, однако, думать, что элементы схемы полностью отражают все свойства реальных деталей (компонентов), из которых собрано устройство. К примеру, деталь "конденсатор" только в известной мере работает так же, как соответствующая "емкость" в схеме. На самом деле, кроме накопления заряда (что свойственно емкости), в конденсаторе происходит рассеяние электрической энергии и некоторые другие физические эффекты, не учитываемые моделью. Конечно, при необходимости модель можно усложнить так, чтобы отразить более полно свойства реальных компонентов. В нашем примере конденсатор может быть отображен в схеме соединением емкости и сопротивления, учитывающего рассеяние энергии. Так же обстоит дело и со всеми другими компонентами.

Схема представляет собой не просто совокупность элементов - на ней указываются электрические (или магнитные) связи между от-

дельными элементами. Реальные связи могут быть значительно сложнее, особенно в полупроводниковых приборах. Эти эффекты также можно смоделировать, усложняя структуру схемы, вводя зависимые (управляемые) источники тока и напряжения, а также элементы, учитывающие паразитные связи между компонентами реальной цепи.

Однако на практике сначала целесообразно проводить рассмотрение на самых простых моделях, отражающих только одно или несколько самых главных свойств реальных компонентов цепи и основные связи между ними. Это позволит применить сравнительно простой математический аппарат описания функционирования цепей под воздействием тех или иных сигналов (токов или напряжений), исследовать их характеристики и дать рекомендации по синтезу цепей с заданными свойствами. Что касается более сложных моделей компонентов и взаимосвязей в радиоэлектронных цепях, то они оправданы при анализе или синтезе устройств с помощью ЭМ, либо тогда, когда более простая модель дает результаты, не адекватные реальному функционированию устройства.

1.1. Модели идеализированных элементов

Компоненты радиоэлектронных цепей делятся на пассивные и активные. Пассивные компоненты не создают энергию — они лишь потребляют энергию, создаваемую активными компонентами. Такой подход справедлив с точки зрения взаимодействия токов и напряжений в элементах схемы. На самом деле, активные компоненты не создают энергию, а лишь преобразуют энергию источников питания в энергию сигналов.

Основными пассивными компонентами являются резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности; им соответствуют пассивные элементы, отражающие свойства сопротивления R , емкости C и индуктивности L .

К активным компонентам радиоэлектронных цепей относятся электронные приборы: радиолампы, транзисторы, микросхемы и даже целые устройства (например, лабораторные генераторы сигналов по своим функциям можно отнести к активным компонентам). Свойства этих компонентов описываются активными элементами: независимыми и управляемыми источниками напряжения и тока. Характерным признаком активных компонентов является наличие источников питания, которые и обеспечивают свойство активных элементов создавать дополнительную энергию в схеме.

Сопротивление отражает свойство компонента безвозвратно рассеивать электрическую энергию, переводя ее в тепловую. Основной характеристикой сопротивления является связь между напряжением и током через него:

$$U = RI \quad \text{или} \quad I = GU. \quad (I.1)$$

Единицей измерения сопротивления R является Ом, а единицей проводимости G – сименс (или $1/\text{Ом}$).

Емкость отражает свойство накапливать электрический заряд, а значит, запасать электрическую энергию. Это свойство характеризуется связью между напряжением и зарядом, накопленным емкостью:

$$Q = CU \quad \text{или} \quad U = Q/C. \quad (I.2)$$

Единицей измерения емкости C является фарад (чаще используются доли единицы $\text{мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$, $\text{нФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$).

Индуктивность соответствует свойству компонента накапливать магнитный поток, а значит, запасать магнитную энергию. Характеристикой индуктивности является связь между потокоцеплением Ψ , пропорциональным магнитному потоку, и током через элемент:

$$\Psi = LI. \quad (I.3)$$

Единицей измерения индуктивности является генри (Г), используется также $\text{мГ} = 10^{-3} \text{ Г}$ и $\text{мкГ} = 10^{-6} \text{ Г}$.

Идеализированные сопротивления, емкость и индуктивность являются линейными элементами. Вольт-амперная характеристика сопротивления (I.1), вольт-кулоновая характеристика емкости (I.2) и ампер-веберная характеристика индуктивности (I.3) – это прямые линии (рис. I.1). Крутизна, т.е. тангенс угла наклона этих линий, и определяет величины $G=1/R$, C и L соответственно.

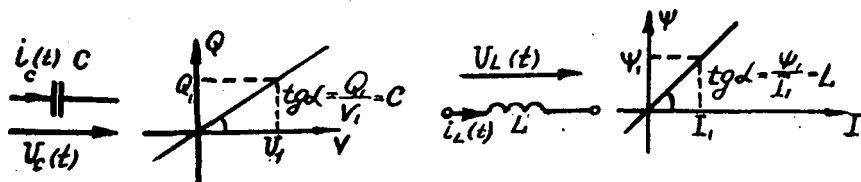


Рис. I.1

Чтобы приступить к анализу схем, необходимо установить связь между напряжением на элементе $U(t)$ и током через него $i(t)$ ($U(t)$ и $i(t)$ – некоторые произвольные функции времени).

Для сопротивления эта связь сразу следует из (I.1):

$$U_R(t) = R i_R(t), \quad (I.4)$$

т.е. форма напряжения в точности повторяет форму тока; R - коэффициент пропорциональности.

Для емкости из (I.2) с учетом того, что ток $i(t)$ есть не что иное, как скорость измерения заряда, имеем

$$i_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dU_C(t)}{dt}. \quad (I.5)$$

Интегрируя (I.5), получим

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \quad (I.6)$$

Если же известно $U_C(t)$ в какой-либо момент времени $t = t_f$, то для $t > t_f$ имеем

$$U_C(t) = U_C(t_f) + \frac{1}{C} \int_{t_f}^t i_C(\tau) d\tau. \quad (I.7)$$

Из (I.5) видно, что ток через емкость не зависит от напряжения на емкости; он определяется скоростью его изменения. Формула (I.6) показывает, что напряжение на емкости в данный момент времени определяется не тем, каков ток в этот же момент, а интегральным эффектом (т.е. площадью) всего предшествующего тока. Выражение (I.7) имеет следующий смысл: напряжение $U_C(t_f)$ аккумулирует в себе всю "предысторию" до момента t_f . Для определения $U_C(t)$ при $t > t_f$ теперь достаточно знать поведение тока только от t_f до t . Именно значение напряжения на емкости, а не тока через нее, определяет "текущее состояние" этого элемента. В дальнейшем мы увидим, что при анализе цепей часто бывает целесообразным выбирать такие переменные (токи или напряжения), которые наиболее экономно описывают текущее состояние цепи. Эти величины получили название "переменных состояния". Как видим, переменной состояния для емкости является напряжение на ней.

Форма тока $i_C(t)$ и форма напряжения $U_C(t)$ не совпадают, они связаны, как производная и интеграл. Пример такой связи дан на рис. I.2. Существенное значение для практики имеют два обстоятельства: во-первых, если $U_C(t) = \text{const}$, то $i_C(t) = 0$, т.е. для постоянного напряжения емкость как бы является разрывом цепи, ток не течет; во-вторых, напряжение на емкости не может изме-

няться скачком, — для этого потребовался бы бесконечно большой ток.

Связь между напряжением и током в индуктивности следует из закона электромагнитной индукции, согласно которому изменение магнитного потока вызывает в катушке ЭДС $e(t)$, пропорциональную скорости изменения тока и направленную так, чтобы препятствовать изменению тока, определяющего потокосцепление $\Psi(t)$:

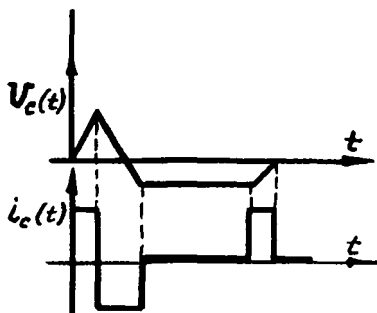


Рис. 1.2

$$e(t) = - \frac{d\Psi(t)}{dt} = -L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1.8)$$

Во втором равенстве использовано выражение (1.3). Учитывая, что напряжение на элементе и ЭДС имеют противоположные направления, можем записать:

$$U_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1.9)$$

Интегрируя (1.9), получим

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t U_L(\tau) d\tau = i_L(t_f) + \frac{1}{L} \int_{t_f}^t U_L(\tau) d\tau \quad (1.10)$$

Нетрудно заметить, что индуктивность в некотором смысле подобна емкости: соотношение между током и напряжением имеет тот же вид, но только ток и напряжение поменялись местами. Емкость и индуктивность считают дуальными величинами. Взаимная замена

$$Q \longleftrightarrow \Psi, \quad C \longleftrightarrow L, \quad i(t) \longleftrightarrow U(t) \quad (1.11)$$

переводит все формулы для емкости в соответствующие формулы для индуктивности.

Отметим, что для постоянного тока $i_L(t) = \text{const}$ напряжение на индуктивности $U_L(t) = 0$, т.е. индуктивность — это как бы короткое замыкание в цепи. Ток через индуктивность не может претерпевать скачков, если только на ней не действует бесконечно большое напряжение. Переменной состояния индуктивности является ток через нее.

Представляет интерес рассмотрение вопроса о мощности и энергии в элементах R , L , C . По определению, мгновенная мощность

$$p(t) = i(t) U(t), \quad (I.12)$$

а энергия

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau. \quad (I.13)$$

Для сопротивления мгновенная мощность получается подстановкой (I.4) в (I.12):

$$P_R(t) = R i_R^2(t) = G U_R^2(t). \quad (I.14)$$

Временная функция $P_R(t)$ для заданной формы тока $i_R(t)$ или напряжения $U_R(t)$ на сопротивлении (рис. I.3, а), построенная в соответствии с (I.14), показана на рис. I.3, б. Очевидно, что мощность в сопротивлении не может быть отрицательной, что соответствует потреблению энергии, рассеивающейся в виде тепла. При этом энергия $W_R(t)$ представляет собой неубывающую функцию. Поскольку принимают $W(-\infty) = 0$ для всех элементов схемы, энергия в сопротивлении никогда не может быть отрицательной, что подтверждает признак определения пассивности элемента: сопротивление не может отдать во внешнюю цепь энергию.

Произведение тока и напряжения на емкости характеризуется мгновенной мощностью. Ее получают из (I.12) с учетом (I.5):

$$P_C(t) = C U_C(t) \frac{dU_C(t)}{dt}. \quad (I.15)$$

Мощность емкости может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от знаков напряжения и направления его изменения. Так, если абсолютная величина напряжения растет (заряд накапливается), мощность положительна, что соответствует потреблению энергии емкостью. Если же емкость разряжается (заряд уменьшается), то мощность отрицательна и энергия отдается емкостью во внешнюю цепь. При $P_C(t) = 0$ емкость хранит заряд сколько угодно долго. Все эти случаи показаны на рис. I.4, а, причем напряжение $U_C(t)$ имеет форму, приведенную на рис. I.2.

Энергия в емкости определяется интегрированием (I.15) в предположении $W_C(-\infty) = 0$:

$$W_C(t) = C \int_{-\infty}^t U_C(\tau) \frac{dU_C(\tau)}{d\tau} d\tau = C \frac{U_C^2(t)}{2}. \quad (I.16)$$

Отсюда следуют два важных вывода в отношении энергии, накапливаемой емкостью. Во-первых, она не может быть отрицательной, т.е. емкость не может отдать во внешнюю цепь энергии больше, чем в ней запасено. Это является признаком пассивности емкостного элемента.

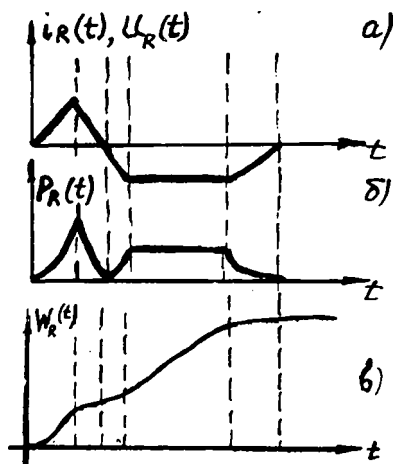


Рис. 1.3

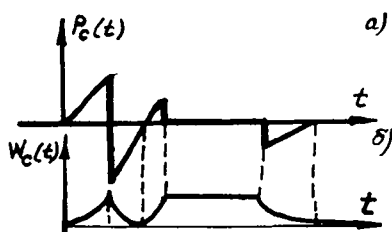


Рис. 1.4

Во-вторых, энергия в каждый момент времени однозначно определяется квадратом напряжения на емкости и не зависит от тока через нее, что еще раз подтверждает справедливость названия напряжения $U_C(t)$ переменной состояния емкости. Все это иллюстрируется графиком изменения энергии на рис. 1.4,б.

В том, что индуктивность и емкость дуальны, легко убедиться еще раз при выводе выражений для мгновенной мощности и энергии, сопоставив их с (I.15) и (I.16). Мощность на индуктивности

$$P_L(t) = L i_L(t) \frac{d i_L(t)}{dt}, \quad (\text{I.17})$$

а энергия индуктивности

$$W_L(t) = L \frac{i_L^2(t)}{2}. \quad (\text{I.18})$$

Очевидно, что свойства индуктивности аналогичны свойствам емкости с поправкой на замену соответствующих величин, а рис.1.2 и 1.4 после необходимой замены могут с успехом иллюстрировать поведение индуктивности при переменных воздействиях.

Взаимная индуктивность отражает свойства индуктивно связанных катушек индуктивности. Графическое изображение таких элементов приведено на рис. 1.5.

Проявляется взаимная индуктивность в наведении напряжения в индуктивно связанной катушке за счет тока, протекающего по другой катушке

$$U_{H_2}(t) = \pm M \frac{di_1(t)}{dt}, \quad (1.19)$$

причем взаимная индуктивность M измеряется в генри, а знак выбирается в зависимости от включения или направлений намотки индуктивно связанных катушек. Знак "+" соответствует согласному включению (рис. 1.5, а), когда положительные направления токов i_1 и i_2 приняты втекающими в выводы индуктивности, обозначенные точками. Знак "-" в (1.19) будет при встречном включении катушек (рис. 1.5, б).

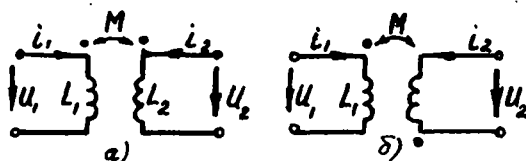


Рис. 1.5

Помимо напряжения, вызванного взаимной индукцией, на каждой катушке, обладающей собственной индуктивностью L_1 или L_2 , формируется напряжение самоиндукции, вызванное своим током в соответствии с (1.9). Суммируя эти две составляющие напряжения, получим

$$U_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}; \quad (1.20)$$

$$U_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}.$$

Для характеристики связи между индуктивностями используют коэффициент связи

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (1.21)$$

который не может быть больше единицы, поскольку определяет долю магнитного потока, взаимодействующего с индуктивно связанной катушкой по отношению к полному магнитному потоку.

Независимые источники описывают свойства элементов или даже довольно сложных устройств поддерживать определенное напряжение (источник напряжения) или тока (источник тока) во внешней цепи. Примерами независимых источников напряжения являются: батарея, стабилизированный источник напряжения, лабораторный генератор сигнала определенной формы, например синусоидальной.

Графическое изображение идеального источника напряжения и вольт-амперной характеристики представлено на рис. 1.6, а и б (сплошной линией). Видно, что напряжение между выводами идеального источника напряжения не зависит от тока через него.

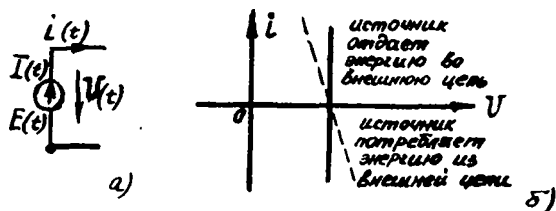


Рис. 1.6

Кружок со стрелкой – изображение независимого источника напряжения (ЭДС); направление стрелки означает направление внешнего тока, который потечет, если к зажимам источника подсоединить некоторую внешнюю (пассивную) цепь. При этом напряжение на зажимах источника $U(t)$ изображается стрелкой, идущей в противоположном направлении. На первый взгляд, это нарушает общее правило, отмеченное выше для R , L и C , где положительное направление тока и напряжения на элементе совпадали. На самом деле, для источника это естественно. Мгновенная мощность, потребляемая любым двухполюсником (и пассивным и активным), есть произведение $i(t) \cdot U(t)$. Если ток в элементе течет "навстречу" напряжению на этом элементе, то потребляемая мощность отрицательна, а это и означает, что элемент является источником, отдающим мощность внешней цепи.

При наличии во внешней цепи других источников может оказаться, что ток через данный источник потечет в обратном направлении. Так, на рис. 1.7 показаны два источника, работающих "навстречу" друг другу. При $U_2 > U_1$ ток через сопротивление R будет протекать справа налево. В этом случае в источнике E_1 потребляемая мощность будет положительна: $p = i E_1$. Источник E_1 рассеивает энергию.

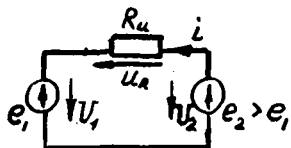


Рис. I.7

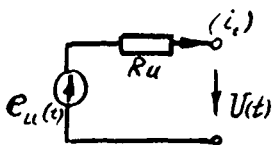


Рис. I.8

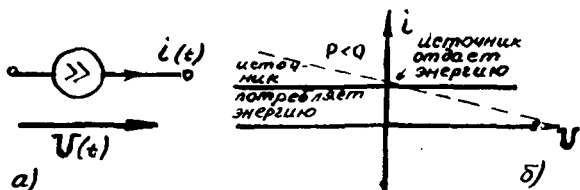


Рис. I.9

Реальный источник напряжения уменьшает напряжение при увеличении тока, отдаваемого во внешнюю цепь. Модель такого источника приведена на рис. I.8, а его вольт-амперная характеристика изображена пунктирной линией на рис. I.6,б. Очевидно, что чем ближе реальный источник напряжения к идеальному, тем меньшим должно быть его внутреннее сопротивление R_u .

Идеальный источник тока является дуальным элементом по отношению к идеальному источнику напряжения. Его изображение представлено на рис. I.9,а, вольт-амперная характеристика в виде сплошной линии показана на рис. I.9,б. Как и у источника напряжения, мощность источника тока может быть положительной и отрицательной, и он относится к активным элементам цепи. Реальный источник тока моделируется параллельным соединением идеального источника и сопротивления R_u (рис. I.10), вольт-амперная характеристика показана на рис. I.9,б пунктиром. Чем больше R_u , тем ближе по свойствам реальный источник тока к идеальному.

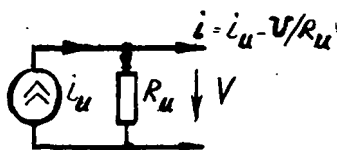


Рис. I.10

Пример независимого источника тока привести значительно сложнее, чем источника напряжения. На практике источниками тока моделируются специальные устройства, содержащие полупроводниковые приборы. Однако источник тока как дуальный элемент по отношению к источнику напряжения используется довольно широко при анализе радио-

электронных цепей.

Управляемые (зависимые) источники моделируют свойство управления напряжения или тока в одной части цепи напряжением или током в другой части. Такого рода управление наблюдается в схемах с полупроводниковыми приборами, операционными усилителями и т.п. Различают четыре типа идеальных управляемых источников, изображенные на рис. I.II в виде направленных четырехполюсников. Четырехполюсник – это участок цепи, в котором указаны две пары полюсов: вход (на схеме слева) и выход (справа). Управляющий сигнал подан на входные клеммы. Идеальный источник, подсоединенный к выходным клеммам, создает сигнал, прямо пропорциональный управляющему. Обратного воздействия выхода на вход нет.

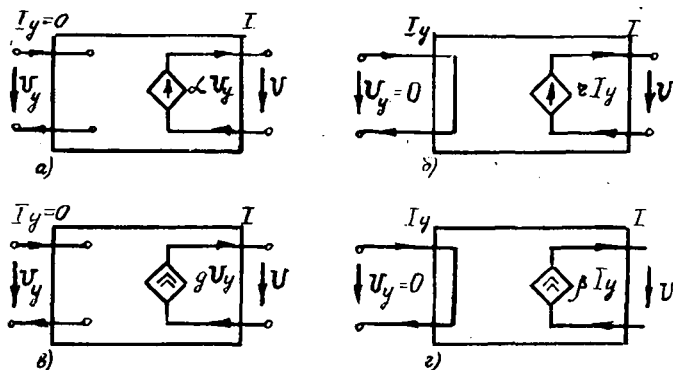


Рис. I.II

У источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН) (рис. I.II,а), выходное напряжение управляется входным напряжением $U = \alpha U_y$. При этом ток I через выходные зажимы может быть любым, входной ток $I_y = 0$, а множитель α называется коэффициентом передачи (усиления) напряжения.

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) (рис. I.II,б), осуществляет управление напряжением на выходе входным управляющим током: $U = \mu I_y$, где μ – передаточное сопротивление. При этом входное напряжение $U_y = 0$, а ток I через выходные зажимы может быть любым.

По аналогии нетрудно догадаться, что на рис. I.II,в изображен источник тока, управляемый напряжением (ИТУН), а на рис. I.II,г – источник тока, управляемый током (ИТУТ). Они обеспечивают ток на выходе независимо от выходного напряжения U . Коэффициент g называется передаточной проводимостью, а β – коэффициентом передачи (усиления) тока.

Следует отметить три особенности, характерные для всех типов зависимых источников. Во-первых, они являются однонаправленными, передача осуществляется от входа к выходу; во-вторых, все эти источники относятся к классу активных элементов, поскольку потребляемая энергия может принимать отрицательные значения, т.е. мощность отдается во внешнюю цепь, и возможно усиление сигнала по мощности; в-третьих, зависимые источники, как и рассмотренные ранее пассивные элементы, являются линейными.

Реальные управляемые источники могут иметь входное сопротивление в управляющей цепи, т.е. $U_y = R_{yx} I_y$, а также выходное сопротивление, подключаемое к выходным полюсам источника по аналогии с независимыми источниками.

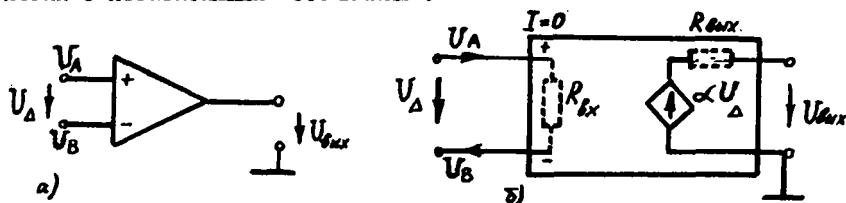


Рис. 1.12

Если в источнике управляется ток, то выходное сопротивление включается параллельно выходным зажимам, а если управляемой величиной является напряжение, то сопротивление включается последовательно, как это показано на рис. 1.12,б.

1.2. Модели полупроводниковых приборов

Смысл моделирования полупроводниковых приборов состоит в разработке математических соотношений, отражающих физические процессы в них. Естественно, модели могут оказаться чрезвычайно сложными, однако при использовании полупроводниковых приборов в линейных устройствах их удастся моделировать с помощью одного или - редко - двух управляемых источников, имеющих некоторое входное и выходное сопротивления.

Операционный усилитель (ОУ) является довольно сложной интегральной микросхемой, но в линейной области он ведет себя как практически идеальный ИНУН. Хотя микросхема ОУ имеет много выводов (обычно восемь), для анализа устройств с использованием ОУ важны только три из них. Остальные служат для обеспечения работы самой

микросхемы (питание, частотная коррекция) и, как правило, не влияют на характеристики линейного устройства.

Обозначение ОУ на схемах приведено на рис. I.12,а. Вход, обозначенный знаком "+", называется неинвертирующим, вход со знаком "-" инвертирующим. Входное напряжение ОУ всегда подается между входами, а его положительное направление задается от плюса к минусу. Такой вход иногда называют дифференциальным. Выходное напряжение ОУ измеряется обычным образом, между выходом и общим полюсом, называемым землей.

Модель ОУ в виде ИТУН показана на рис. I.12,б. Разностное напряжение U_d усиливается в α раз, пунктиром показаны входное $R_{вх}$ и выходное $R_{вых}$ сопротивления. В идеальном ОУ $R_{вх} = \infty$, $R_{вых} = 0$, $\alpha \rightarrow \infty$. В реальных ОУ $R_{вх}$ на несколько порядков больше $R_{вых}$, а коэффициент усиления α очень велик, но нестабилен, из-за чего точное значение α не гарантируется. Как правило, ОУ используются в схемах с обратными связями, что обеспечивает независимость работы схемы от конкретного значения α , лишь бы выполнялось условие $\alpha \gg 1$. В этом случае модель идеального ОУ хорошо отвечает практике.

Транзистор в линейном режиме также моделируется с помощью управляемых источников. Биполярный транзистор представлен на рис. I.13,а; его модель по переменному току (точнее, по приращению тока относительно некоторого постоянного тока) в виде ИТУН изображена на рис. I.13,б. Обозначения на этом рисунке нуждаются в пояснении.

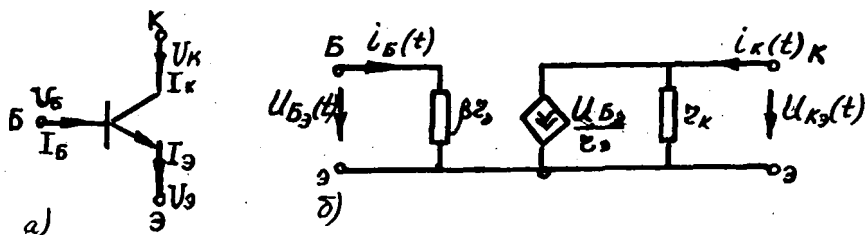


Рис. I.13

Прежде всего транзистор - это нелинейный полупроводниковый прибор, имеющий три вывода (база, коллектор и эмиттер). Связи между токами через выводы и напряжениями задаются вольт-амперными характеристиками, примерный вид которых показан на рис. I.14.

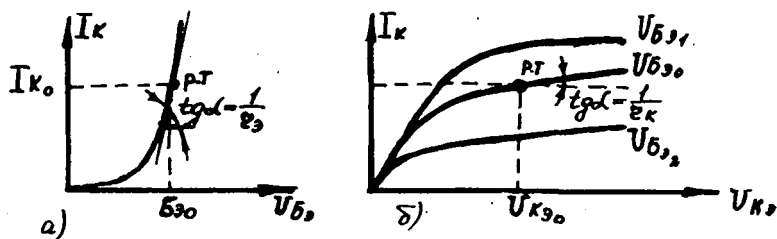


Рис. I.14

Здесь использовано обозначение напряжений с двойным индексом, например, $U_{КЭ} = U_K - U_Э$, а $U_{БЭ} = U_Б - U_Э$, причем напряжения U_K и $U_Б$ считаются заданными относительно земли. Из рис. I.14,а следует, что коллекторный ток транзистора I_K управляется напряжением между базой и эмиттером $U_{БЭ}$, причем эта зависимость имеет характер нарастающей экспоненты. Рис. I.14,б иллюстрирует слабую зависимость коллекторного тока от напряжения $U_{КЭ}$ в определенном диапазоне напряжений, поскольку в своей плоской части характеристики идут почти горизонтально. Разные ветви соответствуют управляющим напряжениям $U_{БЭ}$ в так называемой рабочей точке (РТ).

Рабочая точка определяет режим по постоянному току, когда напряжения и токи транзистора постоянны. Обычно РТ задается элементами схемы, специально предназначенными для правильной установки режима. В нашем случае РТ определяются напряжениями $U_{БЭ0}$ и $U_{КЭ0}$ и током I_{K0} . При этом базовый ток $I_{Б0}$ оказывается в β раз меньше коллекторного, а эмиттерный ток $I_{Э0} = I_{Б0} + I_{K0}$. Коэффициент β является параметром транзистора и приводится в справочниках. Обычно β достаточно велико (порядка 50 - 200).

Предположим теперь, что напряжение между базой и эмиттером начнет изменяться: $U_{БЭ} = U_{БЭ0} + U_{БЭ}(t)$. В том случае, когда максимальное переменное напряжение $U_{БЭ \max}$ мало настолько, что вольт-амперную характеристику вблизи РТ можно аппроксимировать касательной,

$$I_K(t) = I_{K0} + \left. \frac{dI_K}{dU_{БЭ}} \right|_{РТ} U_{БЭ}(t) = I_{K0} + i_K(t). \quad (I.22)$$

Связь между переменными составляющими тока и напряжения становится линейной:

$$i_K(t) = \left. \frac{di_K}{dU_{БЭ}} \right|_{PT} U_{БЭ}(t) = \frac{U_{БЭ}(t)}{r_Э} \quad (I.23)$$

Здесь введено обозначение для коэффициента пропорциональности $di_K / dU_{БЭ} \big|_{PT} = tg \alpha$ (см. рис. I.14,а) через величину, имеющую размерность проводимости и обратную $r_Э$. $r_Э$ определяет наклон вольт-амперной характеристики в рабочей точке и называется дифференциальным сопротивлением эмиттера. Аналогично определяется r_K как величина, характеризующая наклон вольт-амперных характеристик рис. I.14,б в рабочей точке.

Еще раз подчеркнем две важнейшие особенности модели транзистора: во-первых, модель справедлива только для переменных составляющих токов и напряжений; во-вторых, дифференциальные параметры модели $r_Э$ и r_K изменяются при смене рабочей точки одного и того же транзистора. Эти два обстоятельства следует помнить при моделировании линейных схем на транзисторах.

Модель транзистора, изображенная на рис. I.13,б, конечно же не является единственной. Здесь не учитывается так называемая внутренняя обратная связь, когда напряжение между базой и эмиттером изменяется под действием напряжения $U_{КЭ}$. Не учитываются здесь и емкости переходов база-эмиттер $C_{БЭ}$ и база-коллектор $C_{БК}$, а также собственное сопротивление базы $R_Б$. Учет этих параметров значительно усложняет анализ транзисторных схем, поэтому применять усложненную модель следует лишь тогда, когда это вносит существенную поправку в результат анализа.

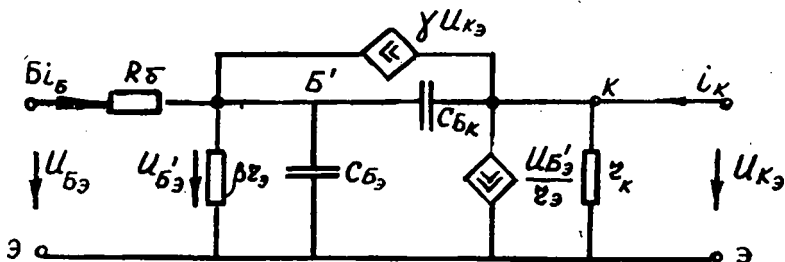


Рис. I.15

На рис. I.15 приведена довольно сложная модель транзистора по переменному току. Параметр g управляемого источника тока в цепи обратной связи определяется так называемым эффектом Эрли. Практически он является такой величиной, при которой рост напряжения

между коллектором и эмиттером приводит к уменьшению напряжения между базой и эмиттером, но в тысячу раз меньше:

$$U_{КЭ}(t) \approx 0,001 U_{БЭ}(t)$$

при неизменном коллекторном токе $U_K(t) = 0$. Можно показать, что при этих условиях $\beta' = -\frac{1}{1000 \beta r_3}$.

Полевой транзистор, если он используется в линейном режиме для усиления малых сигналов, также можно моделировать с помощью ИТУН. Все соображения относительно рабочей точки и дифференциальных параметров транзистора, приведенные для биполярного транзистора, справедливы и для полевого.

Отметим некоторые особенности модели полевого транзистора. Его выводы называются: сток (С), затвор (З) и исток (И) (рис. I.16, а). Ток затвора настолько мал, что его обычно не учитывают, при этом входное сопротивление модели (рис. I.16, б) бесконечно велико, как у идеального ИТУН.

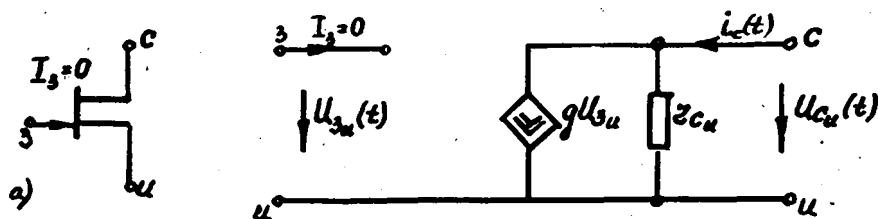


Рис. I.16

Коэффициент управления g током стока определяется наклоном сток-затворной вольт-амперной характеристики в РТ. Этот коэффициент имеет размерность проводимости. Дифференциальное сопротивление $r_{СИ}$ определяется наклоном плоской части выходных вольт-амперных характеристик I_C от напряжения $U_{СИ}$, которые очень похожи на соответствующие характеристики биполярного транзистора (см. рис. I.14, б).

I.3. Модели сигналов

При анализе радиоэлектронных цепей и устройств важную роль играет выбор воздействующего сигнала.

Реальные сигналы – носители информации – весьма сложны в математическом описании, что затрудняет анализ их прохождения через цепь, поэтому целесообразно воспользоваться некоторыми моделями сигналов. Простота математической записи модели и того математи-

ческого аппарата, который используется для анализа процессов в цепи при данном воздействии, имеет большое значение. Несмотря на то, что основные закономерности имеют общий характер и справедливы при любом воздействии, конкретные методы расчета приспособлены для сигналов вполне определенного вида.

В то же время модели должны отражать в себе основные характерные черты реальных сигналов (частотный диапазон, длительность воздействия, "плавный" или скачкообразный характер и т.п.).

Ниже перечислены наиболее простые и часто используемые модели сигналов.

1. Постоянное напряжение или ток

$$S(t) = E = \text{const}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (\text{I.24})$$

2. Гармонический сигнал

$$S(t) = A \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\omega t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{I.25})$$

Три параметра — амплитуда A , круговая частота ω и начальная фаза φ — полностью определяют этот периодический сигнал на всей шкале времени. Круговая частота ω , имеющая размерность рад/с, связана с линейной частотой f [Гц] и периодом T [с] соотношениями

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Изменяя частоту воздействия, можно исследовать прохождение и очень медленных, и очень быстрых периодических сигналов. В частности, при $\omega = 0$ имеем постоянное напряжение или ток.

3. Комплексная экспонента

$$S(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (\text{I.26})$$

Это — "математический" сигнал, его нельзя создать реально в виде некоторого напряжения или тока в цепи. Однако роль модели (I.26) в анализе цепей весьма велика. Функция $e^{j\alpha}$ родственна тригонометрическим функциям $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Известные формулы Эйлера дают эту связь:

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \quad (\text{I.27})$$

Проведя математический анализ воздействия сигнала (I.26) на цепь, можно легко перенести результаты на случай воздействия (I.25). Поэтому комплексную экспоненту считают таким же гармоническим сигналом, что и сигнал вида (I.25), а ее параметры A , ω , φ отождес-

твляют с амплитудой, частотой и фазой. Преимущества модели (I.26) - в простоте операций интегрирования и дифференцирования экспоненты.

4. Единичный скачок (ступенчатая функция)

$$a) S(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}; \quad (I.28)$$

$$б) S(t) = 1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}.$$

5. Единичный импульс (дельта-функция)

$$a) S(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad (I.29)$$

$$б) S(t) = \delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau \\ \infty, & t = \tau \end{cases}.$$

Варианты 4б и 5б - это ступенька и импульс в момент времени $t = \tau$. Эти две модели также являются математической абстракцией. Реально создать мгновенный скачок или мгновенный импульс нельзя. Однако математический сигнал реакции цепи на такие воздействия чрезвычайно полезен с точки зрения передачи быстрых скачков или коротких импульсов, содержащихся в реальных сигналах.

С математической точки зрения, функция $1(t)$ - обычная функция с разрывом первого рода. Что же касается функции $\delta(t)$, то строгое и непротиворечивое ее определение довольно сложно и не укладывается в рамки "обычных" функций. Математикам пришлось ввести новое понятие - "обобщенные функции". Грубо говоря, обобщенные функции описываются не поведением их на шкале аргумента t , а тем, что они "делают" под знаком интеграла. Так, например, определением функции $\delta(t)$ является не запись (I.29), а соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (I.30)$$

Интеграл от произведения произвольной функции $f(t)$ на дельта-функцию, расположенную в точке τ , равен значению $f(t)$ в этой точке $t = \tau$. Дельта-функция как бы "фильтрует", "выхватывает" из $f(t)$ одно ее значение. Интеграл (I.30) часто называют фильтрующим действием δ -функции.

Физически тот же результат (I.30) дает любой короткий импульс $\Delta(t)$ произвольной формы, если его длительность настолько мала, что за это время функция $f(t)$ не может заметно измениться (при этом площадь $\Delta(t)$ принимается условно за единицу). Таким образом, δ -

Функция имеет реальный смысл: это импульс настолько короткий, что его длительность много меньше времени заметного изменения возможных процессов в рассматриваемой цепи (так называемой постоянной времени цепи, речь о которой пойдет ниже).

Модели 1.-5 являются самыми основными. Анализ их воздействия на ту или иную цепь позволяет найти основные характеристики цепи: частотную (определяющую передачу гармонических сигналов в зависимости от их частоты), переходную (реакцию цепи на мгновенный скачок) и импульсную (реакцию цепи на мгновенный импульс). Зная эти характеристики, можно теоретически рассчитать прохождение любого сигнала.

Таким образом, эти модели справедливо рассматривать как основные тестовые сигналы, позволяющие сконструировать и настроить цепь для работы с реальными информационными сигналами.

Лабораторная измерительная аппаратура обеспечивает проведение экспериментов при реальных тест-сигналах, близких к описанным моделям. Так, широко распространены лабораторные генераторы стандартных сигналов гармонической формы в разных диапазонах значений частоты f (низкочастотные: от единиц герц до десятков килогерц, высокочастотные: до десятков мегагерц и СВЧ — до гигагерц). Специальные импульсные генераторы дают сигналы вида прямоугольных импульсов с широкой регулировкой длительности импульсов. Их можно использовать как источники сигналов вида $i(t)$; если выбрать большую длительность импульса и рассматривать передний фронт импульса как ступеньку. Эти же генераторы могут служить источниками сигнала вида $\delta(t)$, если установить очень малую длительность импульса.

Помимо выделенных выше основных сигналов, часто анализируется воздействие и других тестовых сигналов. Отметим некоторые из них.

6. Одиночный прямоугольный импульс, периодическая последовательность прямоугольных импульсов. Такие сигналы часто используются для тестирования цепей, предназначенных для работы с дискретными сигналами (вычислительная техника, цифровые устройства, устройства автоматического регулирования и пр.).

7. Экспоненциальный импульс

$$a) S(t) = \begin{cases} E e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

$$6) S(t) = \begin{cases} E e^{-\alpha t + j\omega t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Вариант 7а – действительное колебание, включаемое скачком в момент $t = 0$ и дающее экспоненциальный затухающий спад. Вариант 7б – математический сигнал, родственный (1.26), но не периодический, а импульсный с экспоненциальным спадом амплитуды. В этот тип сигналов входит сигнал ступеньки $I(t)$ как частный случай. Как будет показано ниже, сигналы этого типа являются собственными модами любой линейной цепи. Смысл этого термина будет раскрыт ниже.

8. Линейно-нарастающий сигнал

$$S(t) = kt, \quad t \geq 0.$$

Использование такого сигнала позволяет проанализировать динамику процессов в цепи в зависимости от скорости изменения входного воздействия (параметр k).

2. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДАМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Электрические цепи представляют собой соединения элементов, модели которых рассмотрены в предыдущем разделе. Электрические соединения ветвей налагают определенные ограничения на токи и напряжения в соответствии с двумя фундаментальными законами Кирхгофа, которые иллюстрируются рис. 2.1.

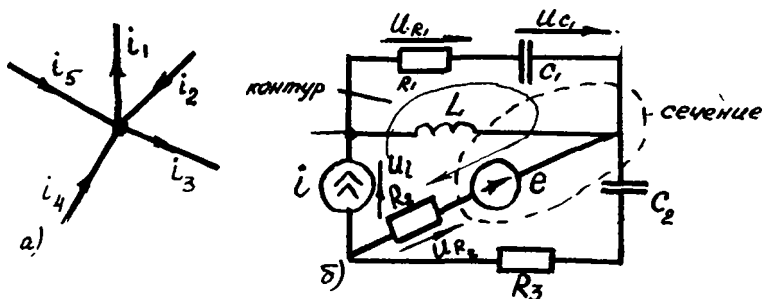


Рис. 2.1

Закон Кирхгофа для токов (рис. 2.1, а) утверждает, что алгебраическая сумма токов, вытекающих из любого узла, равна нулю:

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0. \quad (2.1)$$

Аналогично формулируется закон для любого сечения электрической цепи (рис. 2.1,б). Отметим, что ток берется со знаком "+", если он вытекает из узла (сечения); если ток втекает, то со знаком "-".

Закон Кирхгофа для напряжений гласит: алгебраическая сумма падений напряжения вдоль любого замкнутого контура электрической цепи равна нулю. Иллюстрация этого закона приведена на рис. 2.1,б. Контуром называется любой замкнутый путь, однократно проходящий через выбранные узлы и ветви схемы. Сначала нужно задаться положительными направлениями падений напряжений, которые указаны стрелками на рис. 2.1,б. Если направление обхода контура совпадает с положительным направлением напряжения, оно берется со знаком "+", если нет — со знаком "-". Уравнение для контура на рис. 2.1,б имеет следующий вид:

$$U_i + U_{R_1} + U_{C_1} + \varepsilon - U_{R_2} = 0. \quad (2.2)$$

Законы Кирхгофа являются фундаментальными, поэтому нельзя моделировать реальные электрические цепи так, чтобы модель содержала соединения элементов, противоречащие законам Кирхгофа. Примеры неправильного моделирования представлены на рис. 2.2.

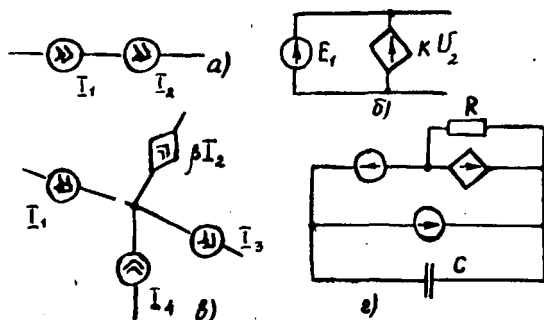


Рис. 2.2

Последовательное включение разных источников тока (рис. 2.2,а) и наличие в схеме хотя бы одного узла или сечения, содержащего только источники тока (рис. 2.2,в), противоречит закону Кирхгофа для токов. Параллельное включение источников напряжения (рис. 2.2,б) либо наличие в цепи хотя бы одного контура, содержащего только источники напряжения (рис. 2.2,г), противоречит закону Кирхгофа для напряжений. Это относится как к независимым, так и к управляемым источникам тока и напряжения.

Если цепь составлена из элементов одного вида (не считая источников), например из сопротивлений или индуктивностей, она будет описана системой алгебраических уравнений. Если элементы имеют разный вид, то система уравнений в общем случае будет содержать интегродифференциальные уравнения. О таких цепях речь пойдет в последующих разделах, а здесь мы рассмотрим преобразования линейных цепей, содержащих одноименные элементы.

2.1. Основные принципы анализа линейных цепей

В практике анализа электрических цепей используется несколько основных принципов, позволяющих анализировать схемы без формальных приемов составления и решения систем уравнений проведением ряда эквивалентных преобразований отдельных участков цепи по отношению к внешним выводам. Ценность такого подхода состоит в развитии интуитивных представлений и навыков анализа простых цепей.

Принцип эквивалентности позволяет представлять одно и то же устройство в разных формах так называемых эквивалентных схем, дающих более компактное и наглядное описание. Если поместить радиоэлектронную цепь в "черный ящик", из которого имеется несколько выводов, то о цепи можно судить лишь по токам и напряжениям на этих выводах. Очень часто такого представления о цепи оказывается достаточно. Так вот, две цепи в виде "черных ящиков", имеющих одинаковое количество выводов, считаются эквивалентными, если токи и напряжения соответствующих выводов равны.

Принцип эквивалентности иллюстрируется рис. 2.3, где изображены два четырехполюсника. Они являются эквивалентными, если выполняются равенства

$$i_j'(t) = i_j''(t); \quad u_j'(t) = u_j''(t); \quad j = \overline{1, 4}.$$

Это условие должно выполняться при любых режимах работы цепи.

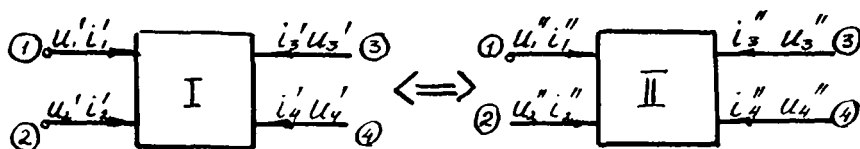


Рис. 2.3

На принципе эквивалентности основан метод эквивалентных преобразований, согласно которому отдельные участки цепи заменяются эквивалентными подцепями, в результате чего цепь удается существенно упростить. При этом не подвергаются преобразованию те ветви, напряжения или токи которых нужно найти. Если после нахождения заданных токов и напряжений потребуется найти какие-либо другие токи и напряжения, можно вернуться к исходной цепи.

Анализ можно упростить, если воспользоваться следующими принципами. Принцип замещения: любой двухполюсный элемент, в котором известны ток $i(t)$ или напряжение $U(t)$, можно заместить идеальным источником тока или напряжения известной величины $i(t)$ или $U(t)$ соответственно.

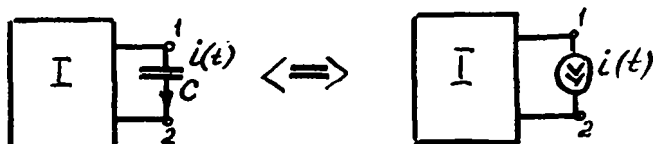


Рис. 2.4

Рис. 2.4 иллюстрирует этот принцип для случая, когда проводится замещение источником тока. Принцип замещения применим к любым элементам — линейным и нелинейным. Но есть одно ограничение: замещаемый элемент должен иметь только электрическую связь с остальной цепью; в частности, не должно быть связи через взаимную индуктивность или зависимый источник.

Принцип суперпозиции (наложения) справедлив только для линейных цепей. Он формулируется следующим образом: реакция линейной цепи на воздействие, представленное в виде взвешенной суммы сигналов, является взвешенной суммой реакций на каждый из составляющих сигналов.

Этот принцип иллюстрирует рис. 2.5. Входной сигнал (воздействие) $U(t) = \sum_i \alpha_i u_i(t)$.

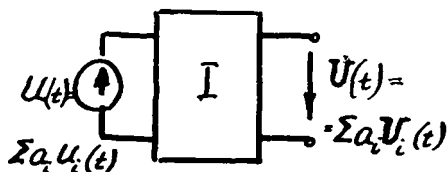


Рис. 2.5

Если найти реакции $U_i(t)$ на каждый из парциальных входных сигналов $u_i(t)$, то общая реакция $U(t) = \sum_i \alpha_i U_i(t)$. Принцип суперпозиции

широко используется при нахождении реакций линейных цепей на сигналы сложной формы, когда их удается разложить на более простые составляющие.

2.2. Эквивалентные преобразования цепей с параллельным и последовательным соединением элементов

При анализе цепей очень полезно упрощать схему, вводя замену некоторой группы элементов одним эквивалентным. Впоследствии мы

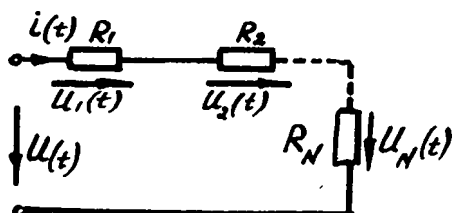


Рис. 2.6

увидим, что такие замены возможны при любом соединении любых элементов. Однако сначала рассмотрим простейшие – последовательное или параллельное – соединения и ограничимся соединением одноименных элементов.

Последовательное соединение одноименных элементов показано на рис. 2.6. При таком соединении через элементы протекает одинаковый ток $i(t)$.

Запишем уравнение для контура по закону Кирхгофа для напряжений:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_N(t). \quad (2.3)$$

Теперь, подставив в правую часть уравнения (2.3) соотношения для элементов, из которых образована последовательная цепь, запишем выражение для цепи из сопротивлений (см. рис. 2.6)

$$u(t) = i(t)(R_1 + R_2 + \dots + R_N) = i(t)R_3, \quad (2.4)$$

откуда следует, что эквивалентное сопротивление последовательно включенных сопротивлений R_3 равно их сумме.

Аналогично получим выражение для цепи из последовательно включенных индуктивностей:

$$u(t) = \frac{di(t)}{dt}(L_1 + L_2 + \dots + L_N) = L_3 \frac{di(t)}{dt}. \quad (2.5)$$

Для цепи из последовательно соединенных емкостей имеем

$$u(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Значит, эквивалентная емкость цепи из последовательно включенных емкостей

$$C_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}\right)}$$

На практике широко используется последовательное включение одноименных элементов для деления напряжения, когда общее напряжение подается на цепь из двух последовательно включенных элементов, а снимается с одного из них (рис. 2.7). Для резистивного делителя напряжения

$$U_1 = i R_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.7)$$

Величина $\frac{R_1}{R_1 + R_2}$ называется коэффициентом деления напряжения. Для индуктивного делителя коэффициент деления напряжения

$$K_U = \frac{U_1}{U} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad (2.8)$$

а для емкостного делителя

$$K_U = \frac{U_1}{U} = \frac{1/C_1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad (2.9)$$

Обратите внимание, что в числителе выражений (2.8) и (2.9) стоят параметры элементов с разными индексами.

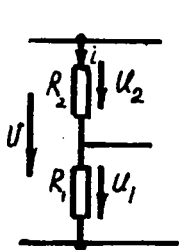


Рис. 2.7

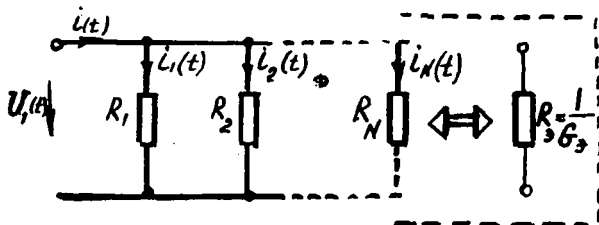


Рис. 2.8

Параллельное соединение элементов показано на рис. 2.8. Для нахождения эквивалентного сопротивления R_3 учтем, что на всех элементах одинаковое падение напряжения $U(t)$. Если теперь записать закон Кирхгофа для токов $i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_N(t)$ и использовать закон Ома для нахождения токов элементов, получим

$$i(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) u(t) = \frac{1}{R_3} u(t) \quad (2.10)$$

Напомним, что величиной, обратной сопротивлению, является проводимость G . Таким образом, проводимость параллельно включенных сопротивлений равна сумме их проводимостей:

$$G_3 = G_1 + G_2 + \dots + G_N \quad (2.11)$$

Аналогично можно найти выражения для эквивалентной индуктивности

$$L_3 = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}} \quad (2.12)$$

и емкости

$$C_3 = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad (2.13)$$

параллельно включенных элементов.

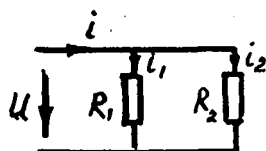


Рис. 2.9

Параллельное включение одноименных элементов часто используют в качестве делителя тока (рис. 2.9). Коэффициент деления тока для сопротивлений

$$K_I = \frac{i_1}{i} = \frac{1/R_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad (2.14)$$

Нетрудно получить коэффициенты деления для индуктивностей

$$K_I = \frac{i_1}{i} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \quad (2.15)$$

и емкостей

$$K_I = \frac{i_1}{i} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (2.16)$$

Чтобы не запутаться в правилах определения эквивалентного сопротивления, индуктивности и емкости, вспомним структуру связи между напряжением и током в этих элементах (см. п. I.1). Когда цепь состоит из сопротивлений, величины R и G есть множители пропорциональности между током и напряжением; чем больше R , тем больше напряжение при данном токе; чем больше G , тем больше ток при данном напряжении.

Для емкости связь между током и напряжением интегральная, но при данном токе (а значит, при данном значении интеграла) напряже-

ние тем меньше, чем больше емкость C ; для индуктивности — наоборот. Таким образом, имеется некая аналогия:

$$R \sim L \sim \frac{1}{C};$$

$$G \sim C \sim \frac{1}{L}.$$
(2.17)

Отсюда следует:

а) последовательное соединение — это сумма сопротивлений

$$R_{\Sigma} = \sum_i R_i, \quad L_{\Sigma} = \sum_i L_i, \quad \frac{1}{C_{\Sigma}} = \sum_i \frac{1}{C_i};$$
(2.18)

б) параллельное соединение — это сумма проводимостей

$$G_{\Sigma} = \sum_i G_i, \quad C_{\Sigma} = \sum_i C_i, \quad \frac{1}{L_{\Sigma}} = \sum_i \frac{1}{L_i};$$
(2.19)

в) коэффициент деления делителя напряжения

$$K = \frac{u_1}{u_{\Sigma}} = \frac{u_1}{u_1 + u_2},$$

$$K_R = \frac{R_1}{R_{\Sigma}} = \frac{G_2}{G_{\Sigma}}, \quad K_L = \frac{L_1}{L_{\Sigma}}, \quad K_C = \frac{C_2}{C_{\Sigma}};$$
(2.20)

г) коэффициент деления делителя тока

$$K = \frac{i_1}{i_{\Sigma}} = \frac{i_1}{i_1 + i_2},$$

$$K_R = \frac{G_1}{G_{\Sigma}} = \frac{R_2}{R_{\Sigma}}, \quad K_L = \frac{L_2}{L_{\Sigma}}, \quad K_C = \frac{C_1}{C_{\Sigma}}.$$
(2.21)

Пример 2.1. Рассмотрим схему последовательно-параллельного включения резисторов, когда источник напряжения $u(t)$ с внутренним сопротивлением R_1 подключен к делителю тока (рис. 2.10).

Предположим, что требуется определить ток в одной из ветвей делителя (например, $i_3(t)$) через напряжение $u(t)$. Найдем сначала ток $i_1(t)$ через сопротивление R_1 , для чего вычислим эквивалентное сопротивление R относительно зажимов идеального источника напряжения

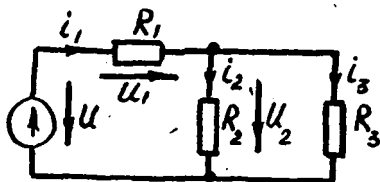


Рис. 2.10

$$R = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/R_3} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (2.22)$$

Разделив $u(t)$ на R_1 , найдем ток $i_1(t)$.

Теперь можно воспользоваться уравнением делителя тока

$$i_3(t) = i_1(t) \frac{R_2}{R_2 + R_3} = u(t) \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (2.23)$$

Пример 2.2. Рассмотрим другой часто встречающийся вариант — использование источника тока

с делителем напряжения (рис. 2.II).

Определим напряжение $u_3(t)$ на сопротивлении R_3 через известный ток источника $i(t)$. Сначала находим эквивалентное сопротивление относительно зажимов идеального источника тока:

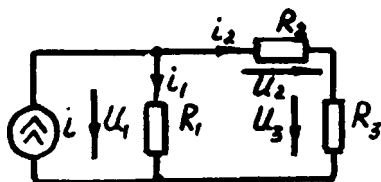


Рис. 2.II

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.24)$$

Умножив $i(t)$ на R , получим напряжение $u_1(t)$.

Теперь можно определить искомое напряжение с помощью уравнения делителя напряжения:

$$u_3(t) = u_1(t) \frac{R_3}{R_2 + R_3} = i(t) \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.25)$$

Как видим, эквивалентные преобразования схем позволяют проводить анализ не очень сложных цепей без особых вычислительных трудностей.

2.3. Эквивалентные преобразования источников

Рассмотрим схемы реальных источников тока и напряжения (рис. 2.I2), для которых определим напряжение $u(t)$ и ток $i(t)$ через внешние зажимы источников.

Для источника тока имеем

$$i(t) = i_0 - \frac{u(t)}{R_A}; \quad u(t) = [i_0 - i(t)] R_A; \quad (2.26)$$

для источника напряжения

$$i(t) = \frac{u_0 - u(t)}{R_\delta}; \quad u(t) = u_0 - i(t) R_\delta. \quad (2.27)$$

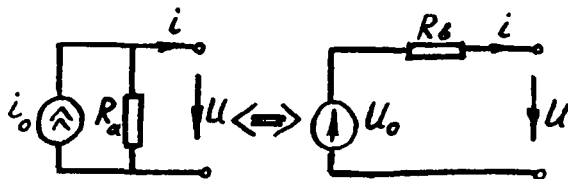


Рис. 2.12

Чтобы источники тока и напряжения были эквивалентны, необходимо равенство напряжений и токов через внешние выводы. Приравнявая выражения (2.26) и (2.27), получим условия эквивалентности:

$$R_\alpha = R_\delta = R; \quad u_0 = i_0 R; \quad i_0 = \frac{1}{R} u_0. \quad (2.28)$$

Нетрудно заметить, что напряжение u_0 эквивалентного источника напряжения является напряжением холостого хода ($i = 0$) источников. Ток i_0 эквивалентного источника тока является током короткого замыкания ($u = 0$) источников. Эквивалентное внутреннее сопротивление источников R можно получить делением напряжения холостого хода u_0 на ток короткого замыкания i_0 источника.

Из этих рассуждений следует не просто правило преобразования реального источника напряжения с последовательным внутренним сопротивлением в реальный источник тока с параллельным внутренним сопротивлением, а очень важный метод анализа любых схем с источниками и сопротивлениями.

Любую цепь, содержащую источники и сопротивления, или любую часть цепи можно представить эквивалентным источником напряжения с последовательным внутренним сопротивлением, причем напряжение эквивалентного источника напряжения равно напряжению холостого хода на внешних выводах цепи (или части цепи), а внутреннее сопротивление находится как эквивалентное сопротивление цепи по отношению к внешним зажимам при обнуленных независимых источниках исходной цепи, т.е. источник напряжения заменяют коротким замыканием, а источник тока — разрывом.

Эту теорему называют иногда теоремой Тевенина, или теоремой об эквивалентном источнике напряжения.

Пример 2.3. Рассмотрим пример преобразования цепи (рис. 2.13) относительно внешних выводов по теореме Тевенина. Напряжение холостого хода ($i = 0$) найдем с учетом результата, полученного для параллельно-последовательной цепи (2.25):

$$U_0 = U_1 + U_3 = U_1 + i_1 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

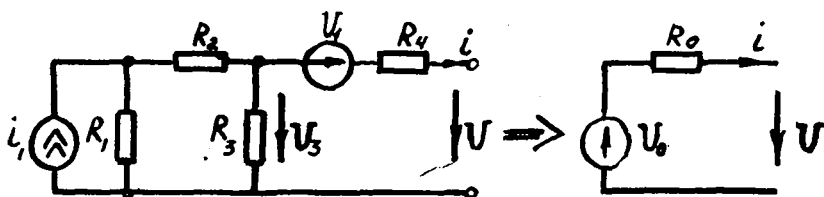


Рис. 2.13

Обнуление источника тока соответствует разрыву ветви с источником, а обнуление источника напряжения – короткому замыканию ветви, содержащей источник напряжения. Тогда сопротивление со стороны внешних зажимов (рис. 2.14)

$$R_0 = R_4 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2}} = R_4 + \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

При анализе линейных цепей используется также теорема об эквивалентном источнике тока (теорема Нортон), которая является дуальной по отношению к теореме Тевенина.

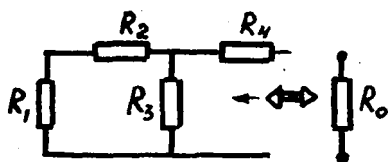


Рис. 2.14

Любую цепь, содержащую источники и сопротивления, можно эквивалентно заменить источником тока с внутренним сопротивлением, причем ток источника равен току короткого замыкания через выводы цепи, а сопротивление источника находят как эквивалентное сопротивление цепи со стороны

внешних выводов при обнуленных независимых источниках.

Пример 2.4. В качестве примера использования теоремы Нортон рассмотрим преобразование цепи, анализ которой проводился

в предыдущем примере (см. рис. 2.13). Для нахождения тока короткого замыкания через внешние зажимы I_0 удобно преобразовать схему к виду, показанному на рис. 2.15.

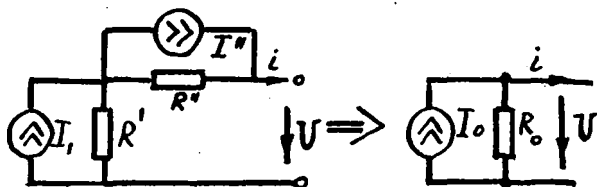


Рис. 2.15

Сначала преобразуем источник тока i_1 с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 в эквивалентный источник тока с внутренним сопротивлением R' :

$$I' = i_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad R' = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2}} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Далее преобразуем источник напряжения U_1 с сопротивлением R_4 в источник тока I'' с внутренним сопротивлением R'' :

$$I'' = \frac{U_1}{R_4}; \quad R'' = R_4$$

Теперь уже не трудно преобразовать полученную схему к одному эквивалентному источнику тока

$$I_0 = I' \frac{R'}{R' + R''} + I'', \quad R_0 = R' + R'' \quad (2.29)$$

Иногда эквивалентное сопротивление источника удобнее находить не обнулением независимых источников, а делением напряжения холостого хода U_0 на ток короткого замыкания I_0 через внешние зажимы $R_0 = U_0 / I_0$, что непосредственно следует из эквивалентности преобразованных источников.

Пример 2.5. Рассмотрим схему усилителя (рис. 2.16).

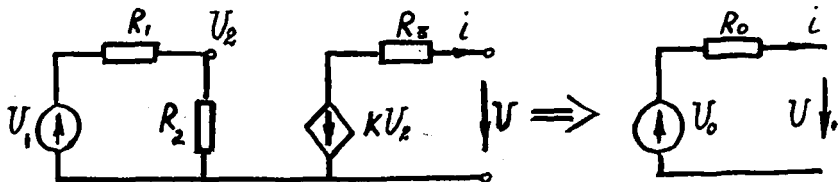


Рис. 2.16

Напряжение холостого хода $U_0 = -KU_1 = -KU_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Ток короткого замыкания через внешние зажимы $I_0 = -\frac{KU_1}{R_3} = -KU_1 \frac{R_2}{R_3(R_1 + R_2)}$. Таким образом, эквивалентное сопротивление источника напряжения $R_0 = \frac{U_0}{I_0} = R_3$. Этот результат можно получить, если обнулить независимый источник $U_1 = 0$, что приведет к обнулению зависимого источника напряжения. Тогда цепь со стороны выходных зажимов будет содержать только R_3 .

2.4. Метод наложения

Еще один метод анализа линейных цепей основан на теореме наложения, которая непосредственно вытекает из принципа суперпозиции и формулируется следующим образом.

Если в цепи имеется несколько независимых источников, то реакция (ток или напряжение в какой-либо одной ветви) равна сумме реакций, определенных в этой ветви для каждого из независимых источников при обнулении остальных

Пример 2.6. Рассмотрим применение этой теоремы на примере схемы, представленной на рис. 2.17, а.

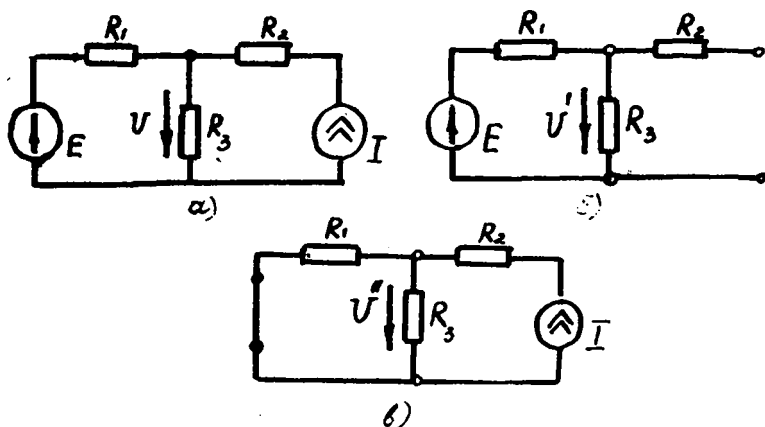


Рис. 2.17

Пусть требуется найти напряжение U на сопротивлении R_3 . Сначала обнулим источник тока $I = 0$ и найдем реакцию на сопротивлении R_3 от источника напряжения E (рис. 2.17,б). В соответствии с уравнением делителя напряжения получим

$$U' = E \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$

Затем, обнулив источник напряжения E , по схеме рис. 2.17,в находим напряжение на сопротивлении R_3 от источника тока I :

$$U'' = I \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

Интересующая нас реакция U находится суммированием парциальных реакций:

$$U = U' + U'' = \frac{R_3}{R_1 + R_3} (IR_1 + E).$$

Заметим, что реакция совсем не зависит от сопротивления R_2 , поскольку ток через него определяется лишь током идеального источника I . Это общее правило: какие бы элементы не были включены последовательно с источником тока, ток через них одинаков и равен I . Аналогично, если параллельно идеальному источнику напряжения включены любые элементы, напряжение на них одинаково и равно напряжению источника. Итак, по отношению к внешней цепи источник тока с последовательно включенными элементами эквивалентен идеальному источнику тока, а источник напряжения с параллельно включенными элементами эквивалентен идеальному источнику напряжения (рис.2.18).

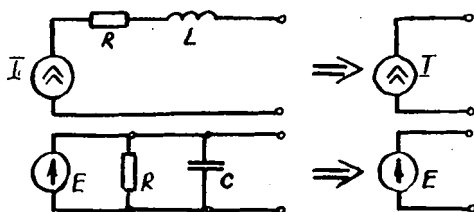
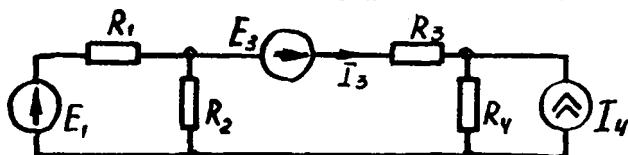


Рис. 2.18

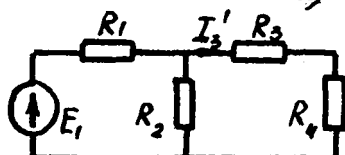
Пример 2.7. Еще один случай использования метода наложения иллюстрируется схемой, представленной на рис. 2.19,а. Предположим, что требуется найти ток через сопротивление R_3 при одновременном действии трех независимых источников E_1 , E_3 и I_4 .

В соответствии с методом наложения поочередно будем находить парциальные токи отдельных источников при одновременном обнулении других. Ток от источника напряжения E_1 (рис. 2.19, а) определяется последовательно-параллельным включением сопротивлений:

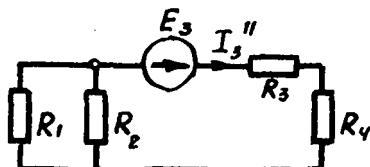
$$I'_3 = E_1 \frac{R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$



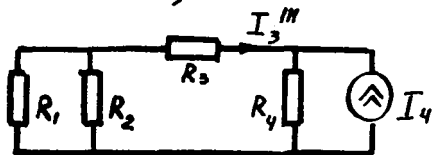
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.19

Часть тока от источника E_3 находится делением напряжения источника на эквивалентное сопротивление цепи из сопротивлений относительно зажимов источника (рис. 2.19, в):

$$I_3'' = \frac{E_3}{R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Наконец, ток, обусловленный током источника I_4 , определяется уравнением делителя тока (рис. 2.19, г):

$$I_3''' = -I_4 \frac{R_4}{R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Резльтирующий искомый ток I_3 получают в виде суммы парциальных токов, найденных ранее:

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3'''$$

Итак, использование метода наложения целесообразно при нахождении реакции в какой-либо ветви разветвленной цепи, содержащей несколько независимых источников тока и напряжения.

2.5. Метод узловых потенциалов

Описанный выше метод эквивалентных преобразований является весьма эффективным при анализе сравнительно простых цепей. В сложных разветвленных цепях выбрать, какие именно участки цепи и в каком порядке заменять эквивалентными, очень не просто, здесь четких рекомендаций нет.

Известны методы анализа, в которых все действия регламентированы — они применимы для любых структур радиосхем. Два из них используются наиболее часто: метод узловых потенциалов и метод контурных токов. Оба метода равноценны, однако первый более нагляден, и мы ограничимся рассмотрением именно этого метода.

В методе узловых потенциалов в качестве искомым величин выбираются потенциалы всех узлов цепи, отсчитанные относительно потенциала какого-либо одного узла, принятого за "общую шину". Этот

узел часто обозначается на схемах символом "корпус" ($\perp$). Составляется система уравнений, каждое из которых определяет потенциал одного какого-либо узла U_K через потенциалы всех других узлов, имеющих с узлом K общие ветви. Решение системы уравнений дает значения всех напряжений в схеме.

Если интерес представляют не все напряжения, а какое-то одно, например на выходе схемы, это никак не влияет на методику составления уравнений, но может быть учтено при решении системы.

Рассмотрим фрагмент некоторой цепи (рис. 2.20). К узлу K стягиваются три ветви: R_1 , R_2 , R_3 , две идут от узлов 1 и 2, третья — на общую шину. Уравнение Кирхгофа для токов, втекающих в узел K , имеет вид

$$I_1 + I_2 - I_K = 0. \quad (2.30)$$

По закону Ома токи в ветвях определяются разностью потенциалов:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_K}{R_1} = (U_1 - U_K) G_1;$$

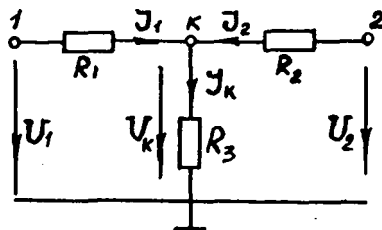


Рис. 2.20

$$\begin{aligned} I_2 &= (U_2 - U_K) G_2; \\ I_K &= U_K G_3. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подставляя (2.31) в (2.30) и разрешая относительно U_K , получим

$$U_K = U_1 \frac{G_1}{G_{K\Sigma}} + U_2 \frac{G_2}{G_{K\Sigma}}, \quad (2.32)$$

где $G_{K\Sigma} = G_1 + G_2 + G_3$ — суммарная проводимость всех ветвей, стягивающихся к узлу K , так называемая собственная проводимость узла.

Нетрудно обобщить приведенный пример на произвольное число ветвей и учесть наличие источников (независимых или управляемых) в ветвях, стягивающихся к данному узлу. Так, применительно к рис. 2.21 имеем

$$U_K = \sum_{i=1}^4 \frac{G_i}{G_{K\Sigma}} U_i + \frac{G_1}{G_{K\Sigma}} E + \frac{1}{G_{K\Sigma}} I, \quad (2.33)$$

где $G_{K\Sigma} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5$.

Следует отметить, что в (2.33) знаки первых членов, объединенные в Σ , всегда положительные, не зависят от выбора направлений токов в ветвях, а члены, учитывающие источники, могут иметь знаки как "+", так и "-" в зависимости от направления источника (к узлу "+", от узла "-").

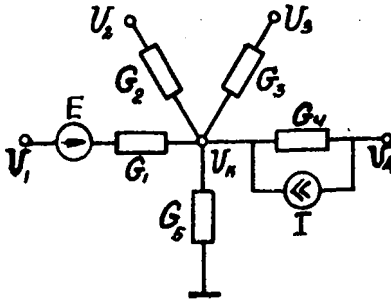


Рис. 2.21

Здесь U_i — отдельные воздействия (потенциалы соседних узлов, прилегающие источники); коэффициенты K_{iK} — коэффициенты передачи, определяющие реакцию узла K на воздействие i при "обнуленных" остальных воздействиях. Так, применительно к схеме рис. 2.21 принцип наложения иллюстрируется рис. 2.22.

Воздействиям U_i, E, I соответствуют коэффициенты передачи:

$$K_{1K} = \frac{G_1}{G_{K\Sigma}}, \quad K_{EK} = \frac{G_1}{G_{K\Sigma}}, \quad K_{IK} = \frac{1}{G_{K\Sigma}}.$$

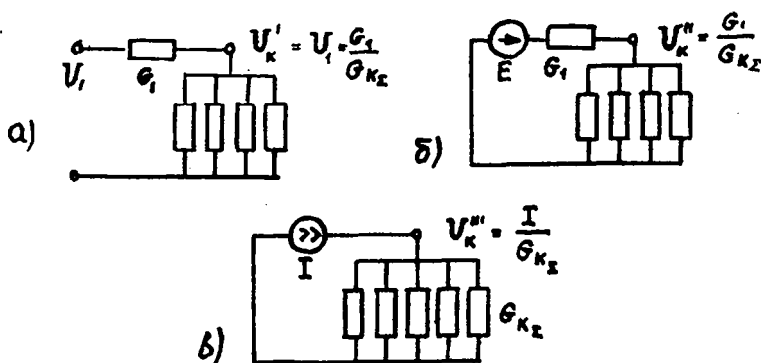


Рис. 2.22

Пример 2.8. Для схемы рис. 2.23 два уравнения относительно двух переменных U_1 и U_2 выглядят так:

$$U_1 = K_{E,1} E_1 - K_{E,2,1} E_2 + K_{I,1} U_2;$$

$$U_2 = K_{I,2} U_1 + K_{E,2,2} E_2 + K_{I,2} I.$$

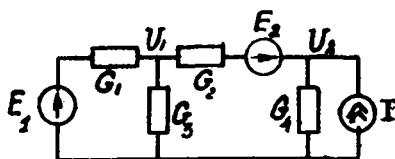


Рис. 2.23

Здесь

$$K_{E,1} = \frac{G_1}{G_{1\Sigma}}; \quad K_{E,2,1} = \frac{G_2}{G_{1\Sigma}}; \quad K_{I,1} = \frac{G_2}{G_{1\Sigma}};$$

$$K_{I,2} = \frac{G_2}{G_{2\Sigma}}; \quad K_{E,2,2} = \frac{G_2}{G_{2\Sigma}}; \quad K_{I,2} = \frac{1}{G_{2\Sigma}},$$

где

$$G_{1\Sigma} = G_1 + G_2 + G_3; \quad G_{2\Sigma} = G_2 + G_4.$$

Пример 2.9. Схема рис. 2.24,а известна как "масштабирующий" усилитель, обеспечивающий связь $U_2 = KU$, где "масштабный" коэффициент K точно задан стабильными резисторами R_1 и R_2 и не зависит от нестабильных параметров операционного усилителя (ОУ). На рис. 2.24,б он представлен реальным ИЧУН.

Заметим, что управляющее напряжение U_1 на схеме 2.24,а подано на инвертирующий вход ОУ ("−"). В схеме 2.24,б это отражено тем, что управляемый источник напряжения $\mathcal{E} = \alpha U_1$ направлен вниз (можно было бы направить вверх, но задать $\mathcal{E} = \alpha (-U_1)$).

Система уравнений для узловых потенциалов U_1 и U_2 :

$$U_1 = K_{E,1} E + K_{2,1} U_2; \quad (2.35)$$

$$U_2 = K_{1,2} U_1 - K_{\varepsilon,2} \varepsilon = (K_{1,2} - \alpha K_{\varepsilon,2}) U_1. \quad (2.36)$$

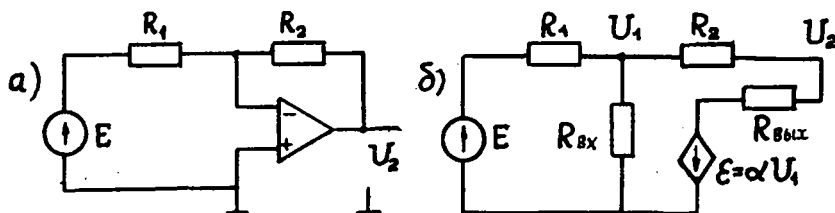


Рис. 2.24

Коэффициенты передачи

$$K_{E,1} = \frac{G_1}{G_{1\Sigma}}; \quad K_{1,2} = \frac{G_2}{G_{2\Sigma}}; \quad K_{2,1} = \frac{G_2}{G_{1\Sigma}}; \quad K_{\varepsilon,2} = \frac{G_{\text{вых}}}{G_{2\Sigma}}, \quad (2.37)$$

где $G_{1\Sigma} = G_1 + G_2 + G_{\text{вх}}$; $G_{2\Sigma} = G_2 + G_{\text{вых}}$.

Подставив (2.35) в (2.36) и разрешив относительно U_2 , получим

$$U_2 = \frac{K_{E,1} (K_{1,2} - \alpha K_{\varepsilon,2})}{1 - K_{1,2} K_{2,1} + \alpha K_{2,1} K_{\varepsilon,2}} E = KE. \quad (2.38)$$

Масштабный коэффициент K определяется всеми элементами схемы. Однако при достаточно большом усилении ОУ ($\alpha \rightarrow \infty$) наиболее значимыми становятся второй член в числителе и третий в знаменателе, остальными можно пренебречь:

$$K \approx \frac{-K_{E,1} \alpha K_{\varepsilon,2}}{\alpha K_{2,1} K_{\varepsilon,2}} = -\frac{K_{E,1}}{K_{2,1}} = -\frac{G_1}{G_2} = -\frac{R_2}{R_1}. \quad (2.39)$$

Как видим, коэффициент K почти не зависит от нестабильных параметров (лишь бы α был достаточно велик).

Мы рассмотрели метод узловых потенциалов применительно к цепям, содержащим только сопротивления. Однако метод подходит для расчета любых цепей, что будет показано ниже.

Метод узловых напряжений широко используется в машинных методах расчета цепей, т.к. он легко алгоритмизируется.

Исходными данными, вводимыми в компьютер, являются значения проводимостей ветвей, источников в этих ветвях, а также матрица

соединений, которая определяет структуру схемы в форме, "понятной" компьютеру.

2.6. Методика расчета лестничных структур

Наряду с общим, фундаментальным методом узловых потенциалов представляют интерес и некоторые частные методики, рассчитанные на определенный вид структуры схемы. Здесь реализуется удачная "догадка", приводящая к компактной и изящной записи, что немало важно для анализа.

Обратимся к методике расчета коэффициента передачи так называемых "лестничных" структур, часто встречающихся в реальных схемах (рис. 2.25). В качестве элементов могут быть R, L или C . Для простоты рассмотрим соединение резисторов. Ключевым моментом методики является то, что последовательные элементы задаются их сопротивлениями R_i , а параллельные — проводимостями G_i . При этом, переходя от сечения к сечению (сечения на рис. 2.25 обозначены пунктиром, их номера — римскими цифрами), удобно записывать входные сопротивления или проводимости в форме цепной (лестничной) дроби:

$$\begin{aligned} G_I &= G_1 ; \\ R_{II} &= R_2 + \frac{1}{G_I} ; \\ G_{III} &= G_3 + \frac{1}{R_{II}} = G_3 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{G_I}} ; \\ G_{IV} &= R_4 + \frac{1}{G_{III}} = R_4 + \frac{1}{G_3 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{G_I}}} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

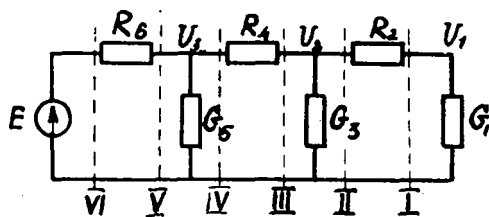


Рис. 2.25

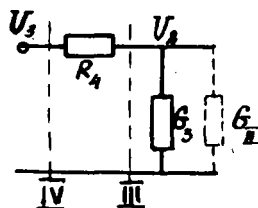


Рис. 2.26

Выделим мысленно одно из Γ -образных звеньев (рис. 2.26) и определим его коэффициент передачи как для делителя напряжения:

$$K_{\text{IV-III}} = \frac{U_2}{U_3} = \frac{\frac{1}{G_{\text{IV}}}}{R_4 + \frac{1}{G_{\text{III}}}} = \frac{1}{R_{\text{IV}} G_{\text{III}}}, \quad (2.41)$$

$R_{\text{IV}}, G_{\text{III}}$ — входное сопротивление и проводимость соответственно в сечениях IV и III.

Общий коэффициент передачи схемы определяется произведением передач отдельных звеньев:

$$K_{\text{общ}} = \frac{U_1}{E} = \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_3} \cdot \frac{U_3}{E} = K_{\text{I-I}} \cdot K_{\text{IV-III}} \cdot K_{\text{V-IV}}. \quad (2.42)$$

Из структуры (2.41) ясно, что

$$K_{\text{общ}} = \frac{1}{R_{\text{I}} G_{\text{I}} R_{\text{IV}} G_{\text{III}} R_{\text{V}} G_{\text{V}}} = \frac{1}{G_{\text{I}} R_{\text{I}} G_{\text{III}} R_{\text{IV}} G_{\text{V}} R_{\text{V}}}. \quad (2.43)$$

Проследим последовательно цепочку значений R и G (2.40), приводя их к виду обычных дробей:

$$G_{\text{I}} = G_1;$$

$$R_{\text{I}} = R_2 + \frac{1}{G_1} = \frac{R_2 G_1 + 1}{G_1} = \frac{B_1}{G_1}, \quad B_1 = R_2 G_1 + 1,$$

$$G_{\text{III}} = G_3 + \frac{1}{R_{\text{I}}} = \frac{G_3 R_{\text{I}} + 1}{R_{\text{I}}} = \frac{B_2 G_1}{B_1}, \quad B_2 = G_3 R_{\text{I}} + 1,$$

$$R_{\text{IV}} = R_4 + \frac{1}{G_{\text{III}}} = \frac{R_4 G_{\text{III}} + 1}{G_{\text{III}}} = \frac{B_3 B_1}{B_2 G_1}, \quad B_3 = R_4 G_{\text{III}} + 1,$$

$$G_{\text{V}} = G_5 + \frac{1}{R_{\text{IV}}} = \frac{G_5 R_{\text{IV}} + 1}{R_{\text{IV}}} = \frac{B_4 B_2 G_1}{B_1 B_3}, \quad B_4 = G_5 R_{\text{IV}} + 1,$$

$$R_{\text{V}} = R_6 + \frac{1}{G_{\text{V}}} = \frac{R_6 G_{\text{V}} + 1}{G_{\text{V}}} = \frac{B_1 B_3 B_5}{B_2 B_4 G_1}, \quad B_5 = R_6 G_{\text{V}} + 1.$$

Заметим, что знаменатель каждой последующей дроби равен числителю предыдущей и при подстановке в (2.43) все они сокращаются. Остается

$$K_{\text{общ}} = \frac{1}{B_1 B_3 B_5},$$

но это выражение обратно числителю R_{V} .

Итак, чтобы определить коэффициент передачи, достаточно найти числитель дроби в выражении для общего входного сопротивления. При этом должна быть соблюдена определенная форма записи входного сопротивления. Ее легко получить из лестничной дроби записи входного сопротивления (2.40).

Пример 2.10. Определим коэффициент передачи цепи рис. 2.27, где последовательные элементы имеют сопротивление 10 Ом, а параллельные — 2 Ома. Запишем входное сопротивление в виде цепной дроби (заметьте, что в ней фигурируют проводимости 0,5 I/Ом):

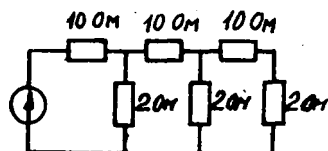


Рис. 2.27

$$R_{\text{вх}} = 10 + \frac{I}{0,5 + \frac{I}{10 + \frac{I}{0,5 + \frac{I}{10 + \frac{I}{0,5}}}}} = \frac{28I}{24 \text{ I/Ом}}$$

Коэффициент передачи цепи $K = \frac{I}{28I}$.

При определении K весьма распространена следующая ошибка: коэффициенты деления звеньев ($\frac{2}{10+2} = \frac{I}{6}$) перемножаются без учета входных сопротивлений последующих звеньев

$$K = \frac{I}{6} \cdot \frac{I}{6} \cdot \frac{I}{6} = \frac{I}{216}$$

3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ РЕШЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задана цепь и совокупность воздействий на нее. Требуется определить интересующие вас реакции. При этом под воздействиями понимаются внешние по отношению к цепи сигналы, моделируемые независимыми источниками тока или напряжения, а реакциями являются токи или напряжения ветвей цепи.

В радиоэлектронных цепях, как правило, можно явно выделить вход и выход цепи. Ко входу подключается источник сигнала, например головка звукоснимателя или каскад усилителя, к выходу — на-

грузка в виде оконечного устройства, например акустической системы. В этом случае воздействие — это ток или напряжение на входе, а реакция — напряжение или ток через нагрузку. Под нагрузкой понимается линейная цепь, моделирующая свойства оконечного устройства.

Особенности анализа линейных цепей решением динамических уравнений состоят в следующем. Во-первых, линейная цепь описывается динамическим уравнением, содержащим в левой части линейную комбинацию искомой реакции как функции времени и ее производных или интегралов, а в правой — линейную комбинацию известного воздействия и его производных (интегралов). Очевидно, что если в результате анализа требуется найти несколько реакций, то вместо одного динамического уравнения необходимо составить систему их.

Вторая особенность состоит в форме представления воздействия. Дело в том, что "классический" метод решения динамических уравнений позволяет представить решение, т.е. интересующую нас реакцию, в виде суммы двух функций. Первая соответствует решению однородного динамического уравнения и называется общим решением. Эта часть не зависит от формы воздействия. Вторая функция, являющаяся частным решением, зависит от воздействия и может быть определена в замкнутой форме в том случае, если, например, воздействие является экспонентой Ae^{pt} , где A и p могут быть любыми, в том числе и комплексными числами.

Третья особенность заключается в необходимости точного знания "состояния" цепи в какой-либо один конкретный момент времени t_0 , который принято считать началом отсчета. (Под состоянием цепи понимается совокупность значений токов через индуктивности и напряжений на емкостях цепи в конкретный момент времени.) Очевидно, что состояние цепи можно также характеризовать соответствующим количеством независимых линейных комбинаций указанных токов и напряжений.

Теперь становится ясным круг проблем, которые нужно уметь решить, чтобы научиться анализировать линейные цепи решением динамических уравнений, а также ограничения, присущие этому методу анализа. Если известно состояние цепи в некоторый момент времени t_0 , а воздействие имеет экспоненциальную форму, реакция может быть определена в виде функции времени для $t \geq t_0$.

На первый взгляд, рассматриваемый метод анализа имеет очень узкую область применения, однако это не так. Существует большое

количество модификаций классического метода; непосредственно из него вытекают все современные методы анализа линейных цепей, да и для целого ряда практически важных задач классический метод предоставляет наиболее простое и наглядное решение.

3.1. Динамические уравнения линейных цепей

Обычно радиоэлектронная цепь задается в виде электрической схемы, представляющей графическое изображение взаимосвязей элементов цепи. Предположим, что цепь содержит N элементов, тогда в общем случае необходимо определить $2N$ неизвестных функций, — ток и напряжение в каждом элементе. Для этого надо составить систему из $2N$ независимых уравнений, содержащих неизвестные функции.

N уравнений дают соотношения между током и напряжением в каждом элементе цепи. Недостающие N уравнений составляются по законам Кирхгофа для токов и напряжений. Первые N уравнений принято называть уравнениями элементов, вторые N уравнений — уравнениями соединений.

После того как составлена система динамических уравнений, одну из функций принимают за воздействие, другую — за реакцию. Исключая все промежуточные переменные, систему уравнений сводят к одному динамическому уравнению.

П р и м е р 3.1. В цепи, изображенной на рис. 3.1, входное воздействие задает идеальный источник напряжения $e(t)$, а реакцией является ток $i_R(t)$ через сопротивление R .

Прежде всего необходимо обозначить на схеме направление токов ветвей $i_L(t)$, $i_C(t)$ и $i_R(t)$. Напряжения на элементах имеют согласование с токами направления. Записываем уравнения элементов:

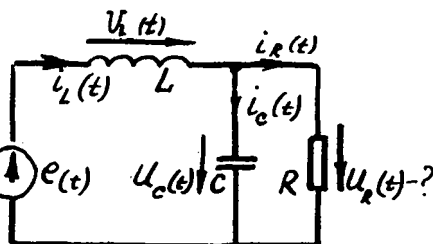


Рис. 3.1

$$\begin{cases} u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \\ i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}; \\ u_R(t) = R i_R(t). \end{cases}$$

Согласно закону Кирхгофа для токов имеем $i_L(t) = i_R(t) + i_C(t)$. Закон Кирхгофа для напряжений дает два уравнения по числу независимых контуров

$$\begin{cases} u(t) + u_C(t) = e(t); \\ u_C(t) = u_R(t). \end{cases}$$

Итак, получим шесть уравнений с шестью неизвестными функциями. Такого числа уравнений достаточно для цепи из трех элементов. Разрешив систему относительно искомой реакции тока $i_R(t)$, получим динамическое уравнение цепи:

$$\frac{di_R(t)}{dt} + \frac{1}{CR} i_R(t) + \frac{1}{LC} \int_{-\infty}^t i_R(\tau) d\tau = \frac{1}{LCR} \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

При всей кажущейся простоте метод непосредственного составления динамического уравнения с помощью законов Кирхгофа довольно громоздок при большом числе элементов. Это объясняется трудностями разрешения системы большого количества уравнений относительно одной переменной.

Существует довольно много методов составления систем динамических уравнений, содержащих значительно меньшее количество переменных. В практике анализа линейных радиоэлектронных цепей наиболее широко используются метод узловых напряжений и метод переменных состояния.

Метод узловых напряжений состоит из трех этапов.

1. Выбор опорного узла. В качестве опорного может быть принят любой узел цепи. Наиболее часто за опорный узел принимают узел, соединенный с общей шиной, называемой землей или корпусом. Однако система будет наиболее простой, если за опорный принять узел, в котором сходится наибольшее количество ветвей и/или наибольшее число источников напряжения.

2. Обозначение узловых напряжений. Узловым напряжением называется напряжение между данным узлом схемы и опорным узлом. Такое определение однозначно задает положительное направление для каждого узлового напряжения. Общее число узловых напряжений равно числу узлов в схеме, не считая опорного узла, минус число источников напряжения. Из двух узлов, которыми включаются в схему источники напряжения, обозначается как узловое напряжение только один узел; если в схеме имеется цепочка из последовательно соединенных источников напряжения, то обозначается один из узлов цепочки.

3. Для каждого обозначенного узла составляется уравнение в соответствии с законом Кирхгофа для токов. При этом токи ветвей выражаются через узловые напряжения, и все токи удобно считать вытекающими из данного узла. Если к узлу подключен один или несколько источников напряжения, то уравнение закона Кирхгофа составляется для сечения, включающего данный узел и соединенные с ним источники напряжения.

В результате получится система динамических уравнений, переменными функциями в ней являются узловые напряжения, количество которых значительно меньше, чем удвоенное число ветвей схемы, поэтому дальнейшее решение системы оказывается проще. В заключение по найденным узловым напряжениям можно определить любую интересующую вас реакцию в виде тока или напряжения ветви.

Пример 3.2. На рис. 3.2 приведена схема с управляемым источником напряжения $ku(t)$, искомой реакцией является ток $i(t)$. Составим динамическое уравнение для тока, используя метод узловых напряжений.

1) В качестве опорного выбираем узел 0, в котором сходится наибольшее число ветвей.

2) Всего в схеме пять узлов и два источника напряжения, значит, необходимо обозначить два узловых напряжения $U_1(t)$ и $U_2(t)$.

3) Записываем уравнения для токов по закону Кирхгофа. Для узла I

$$\frac{U_1(t) - e(t)}{R_1} + \frac{U_1(t)}{R_2} + C_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + C_2 \frac{d[U_1(t) - U_2(t)]}{dt} = 0.$$

Для сечения, включающего узел 2,

$$C_2 \frac{d[U_2(t) - U_1(t)]}{dt} + \frac{U_2(t) + KU_1(t)}{R_3} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t U_2(\tau) d\tau + \frac{U_2(t)}{R_4} = 0.$$

Дальнейшие преобразования сводятся к разрешению системы относительно $U_2(t)$, в результате чего получится динамическое уравнение 3-го порядка.

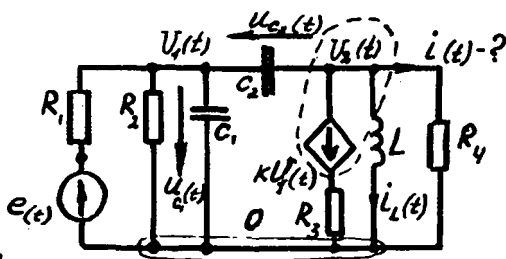


Рис. 3.2

Пример 3.3. Схема, представленная на рис. 3.3, содержит операционные усилители. Чтобы составить динамические уравнения, необходимо воспользоваться моделью ОУ.

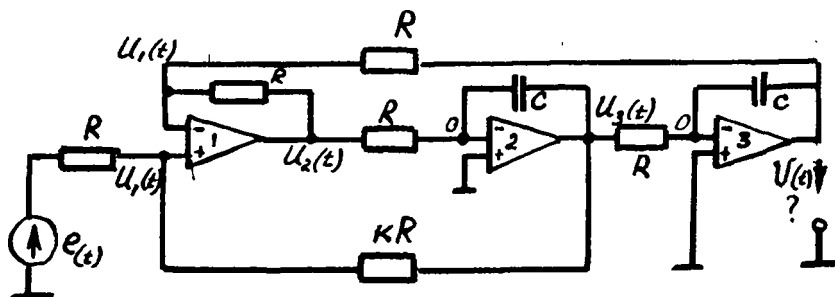


Рис. 3.3

Если принять простейшую модель идеального ОУ в активном режиме, то можно составить узловые уравнения непосредственно по схеме. Для этого необходимо запомнить несколько простых правил:

- напряжения инвертирующего и неинвертирующего входов равны;
- входы операционного усилителя не потребляют тока;
- нельзя составлять уравнения для узлов, соединенных с выходом ОУ.

1) В качестве опорного узла выберем общую шину, соединенную с землей.

2) Обозначим узловые напряжения с учетом свойств операционного усилителя. Отметим, что если один из входов ОУ соединен с землей, то потенциал другого входа равен нулю, но это не значит, что для такого узла не надо составлять уравнение Кирхгофа.

3) Составляем узловые уравнения. Для узла, соединенного с неинвертирующим входом первого ОУ,

$$\frac{u_1(t) - 0(t)}{R} + \frac{u_1(t) - u_3(t)}{KR} = 0.$$

Другой узел первого ОУ дает уравнение

$$\frac{u_1(t) - u_2(t)}{R} - \frac{u_1(t) - U(t)}{R} = 0.$$

Для инвертирующего узла второго ОУ имеем

$$\frac{0 - u_2(t)}{R} + C \frac{d(0 - u_3(t))}{dt} = 0.$$

Аналогичное уравнение получится и для узла третьего ОУ:

$$\frac{0 - u_3(t)}{R} + C \frac{d(0 - U(t))}{dt} = 0$$

После преобразования получим дифференциальное уравнение, связывающее входное воздействие и выходную реакцию, "вход - выход":

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \frac{1}{CR(K+1)} \frac{dU(t)}{dt} + \frac{1}{(CR)^2} U(t) = \frac{K}{(CR)^2(K+1)} e(t). \quad (3.2)$$

Как видим, уравнение имеет второй порядок. Если вернуться к рассмотренным примерам, нетрудно заметить, что порядок динамического уравнения совпадает с числом реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в схеме цепи. Здесь мы подошли к важному понятию "порядок цепи", который действительно всегда совпадает с порядком динамического уравнения, но может быть меньше числа реактивных элементов. Почему? Об этом лучше поговорить после рассмотрения метода переменных состояния.

Метод переменных состояния дает возможность составить систему дифференциальных уравнений цепи в наиболее компактной и рациональной форме. Во-первых, число уравнений равно порядку цепи, во-вторых, каждое уравнение системы имеет первый порядок, причем производная записывается в левой части. Напомним, что переменными состояния в электрических цепях являются ток через индуктивность и напряжение на емкости, поскольку мгновенные значения этих переменных полностью определяют энергию, накопленную в реактивных элементах. Метод состоит из трех этапов.

1. Переменные состояния (ток или напряжение) в соответствии с принципом замещения изображаются на схеме в виде источников тока или напряжения соответственно. Если в результате замены в цепи образуется контур из одних источников напряжения или сечение из источников тока, значит, реактивные элементы зависимы, и необходимо один из источников сечения или контура преобразовать обратно в исходную индуктивность или емкость.

2. В цепи, полученной в результате замещения, определяются токи через введенные источники напряжения (токи $i_c(t)$) и напряжения на введенных источниках тока $u_L(t)$. В результате получают систему уравнений, в левой части которой будут токи через емкости и напряжения на индуктивностях, а в правой - взвешенные суммы напряжений на емкостях, токов через индуктивности (т.е. переменные состояния $u_C(t)$, $i_L(t)$) и независимых источников.

3. Левые части составленных уравнений заменяются производными в соответствии с выражениями, связывающими токи $i_L(t) = \mathcal{L} \frac{d u_L(t)}{dt}$ и напряжения $u_L(t) = \mathcal{L} \frac{d i_L(t)}{dt}$ в емкостях и индуктивностях. После преобразования коэффициентов получают систему дифференциальных уравнений в форме Копи, которые являются уравнениями состояния цепи.

Пример 3.4. Рассмотрим еще раз цепь, представленную на рис. 3.2, применив для анализа метод переменных состояния.

1. Составляем схему, в которой емкости и индуктивности заменим идеальными источниками (рис. 3.4). Направление введенных источников $u_{C_1}(t)$, $u_{C_2}(t)$ и $i_L(t)$ должно быть согласованным с положительным направлением для переменных состояния, которые обязательно нужно нанести на исходной схеме цепи (см. рис. 3.2). При этом направления ЭДС $u_C(t)$ обратны направлению тока $i_L(t)$, а направления источников тока совпадают с $u_L(t)$. Поскольку в полученной эквивалентной схеме нет ни одного контура из источников напряжения или сечения из источников тока, переходим ко второму этапу.

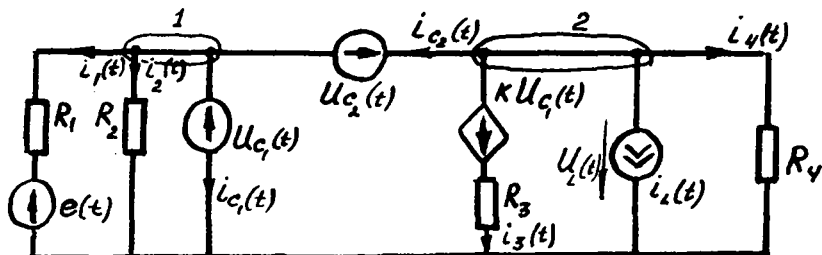


Рис. 3.4

2. Обозначаем согласованные направления токов $i_{C_1}(t)$ и $i_{C_2}(t)$ и напряжения $u_L(t)$ на введенных источниках (см. рис. 3.4). Теперь любым методом нужно составить уравнения для $i_{C_1}(t)$, $i_{C_2}(t)$ и $u_L(t)$, считая заданными все источники. Зададимся положительными направлениями токов через сопротивления и определим их через напряжения источников:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{1}{R_2} u_{C_1}(t) ; & i_1(t) &= \frac{u_{C_1}(t) - \mathcal{E}(t)}{R_1} ; \\ i_3(t) &= \frac{u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) + K u_{C_1}(t)}{R_3} ; & i_4(t) &= \frac{u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t)}{R_4} . \end{aligned}$$

Теперь найдем напряжение на источнике тока:

$$u_L(t) = R_4 i_4(t) = u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t). \quad (3.3)$$

Ток $i_{C_2}(t)$ находится из уравнения Кирхгофа для узла 2:

$$i_{C_2}(t) + i_3(t) + i_L(t) + i_4(t) = 0.$$

Отсюда

$$i_{C_2}(t) = - \left(\frac{K+1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{C_1}(t) - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{C_2}(t) - i_L(t). \quad (3.4)$$

Ток $i_{C_1}(t)$ можно определить, составляя уравнение для токов узла 1:

$$i_{C_1}(t) = i_{C_2}(t) - i_2(t) - i_1(t).$$

Учитывая полученное выражение для $i_{C_2}(t)$, получим

$$i_{C_1}(t) = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{K+1}{R_3} \right) u_{C_1}(t) - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{C_2}(t) - i_L(t) + \frac{1}{R_1} \ell(t). \quad (3.5)$$

3. Проводим замену в левой части уравнений (3.3) - (3.5) переменных на производные переменных состояния:

$$u_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt}; \quad i_{C_1}(t) = C_1 \frac{d u_{C_1}(t)}{dt}; \quad i_{C_2}(t) = C_2 \frac{d u_{C_2}(t)}{dt}.$$

и запишем систему уравнений состояния в упорядоченной форме:

$$\frac{d i_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_{C_1}(t) + \frac{1}{L} u_{C_2}(t);$$

$$\frac{d u_{C_1}(t)}{dt} = - \frac{1}{C_1} i_L(t) - \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{K+1}{R_3} \right) u_{C_1}(t) - \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{C_2}(t) + \frac{1}{R_1 C_1} \ell(t);$$

$$\frac{d u_{C_2}(t)}{dt} = - \frac{1}{C_2} i_L(t) - \frac{1}{C_2} \left(\frac{K+1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{C_1}(t) - \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{C_2}(t).$$

Упорядоченность уравнений состояния позволяет использовать компактную матричную форму записи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0; & \frac{1}{L}; & \frac{1}{L}; \\ -\frac{1}{C_1}; & -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{K+1}{R_3} \right); & -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right); \\ -\frac{1}{C_2}; & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{K+1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right); & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} \ell(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вводя обозначения матриц, получим

$$\dot{X} = AX + B\ell,$$

где X — вектор переменных состояния; ℓ — вектор воздействий; A — матрица параметров цепи; B — матрица параметров воздействия.

Пример 3.5. Составим уравнения состояния для цепи, имеющей один контур, составленный из емкостей (рис. 3.5).

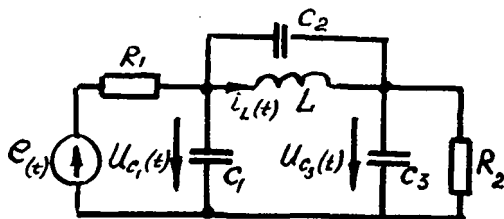


Рис. 3.5

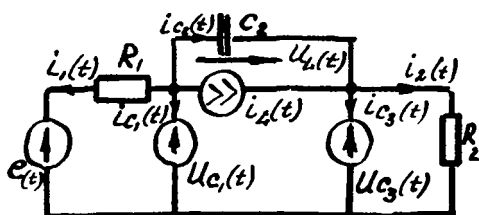


Рис. 3.6

1. При введении источников, описывающих переменные состояния, одну из емкостей, например C_2 , замещать не следует. Обозначим на схеме положительные направления для напряжений на емкостях C_1 и C_3 , а также направление тока через индуктивность. Схема эквивалентно преобразуется к виду, изображенному на рис. 3.6.

2. Составляем уравнения для токов через введенные источники напряжения $i_{C_1}(t)$ и $i_{C_3}(t)$, а также напряжения на источнике тока $u_L(t)$:

$$u_L(t) = u_{C_1}(t) - u_{C_3}(t);$$

$$i_{C_1}(t) = -i_L(t) - i_1(t) - i_{C_2}(t) = -i_L(t) - \frac{u_{C_1}(t) - \ell(t)}{R_1} - C_2 \frac{du_L(t)}{dt};$$

$$i_{C_3}(t) = i_L(t) + i_{C_2}(t) - i_2(t) = i_L(t) + C_2 \frac{du_L(t)}{dt} - \frac{u_{C_3}(t)}{R_2}.$$

3. После подстановки в левую часть производных переменных состояния и алгебраических преобразований получим систему уравнений состояния в форме Коши:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_{C_1}(t) - \frac{1}{L} u_{C_3}(t);$$

$$\frac{du_{C_1}(t)}{dt} = -\frac{1}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \left[C_3 i_L(t) + \frac{C_2 + C_3}{R_1} u_{C_1}(t) + \frac{C_2}{R_2} u_{C_3}(t) - \frac{C_2 + C_3}{R_1} e(t) \right]; \quad (3.7)$$

$$\frac{du_{C_3}(t)}{dt} = \frac{1}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \left[C_1 i_L(t) - \frac{C_2}{R_1} u_{C_1}(t) - \frac{C_1 + C_2}{R_2} u_{C_3}(t) + \frac{C_2}{R_1} e(t) \right].$$

Рассмотрев метод переменных состояния, можно сделать следующий вывод: порядок цепи определяется числом независимых переменных состояния, которое совпадает с числом реактивных элементов в цепи за вычетом числа емкостных контуров и индуктивных сечений, имеющих в цепи.

Следует отметить, что выбор в качестве переменных состояния напряжений емкостных и токов индуктивных элементов не является единственно возможным. В качестве переменных состояния может быть использовано соответствующее число независимых линейных комбинаций указанных переменных.

В заключение можно констатировать, что составление уравнений методом переменных состояния сложнее, чем методом узловых напряжений. Однако сложности эти оправданы, во-первых, тем, что описание цепи через переменные состояния дает более полную картину поведения цепи, во-вторых, упорядоченная форма записи более пригодна для создания алгоритмов численного моделирования линейных цепей на ЭВМ; кроме того, уравнения состояния удобнее использовать при анализе общих свойств линейных цепей.

3.2. Решение динамических уравнений линейных цепей

Мы уже убедились в том, что динамические уравнения, описывающие линейную цепь, являются дифференциальными уравнениями, которые в неявном виде содержат интересующую нас реакцию. Решение состоит в определении этой реакции в виде явной функции времени, включающей воздействия на цепь.

Согласно теории дифференциальных уравнений решение будет единственным только в том случае, если известны начальные условия (т.е. начальное состояние цепи). Кроме того, решение включает комбинацию двух реакций, одна из которых определена для нулевых воздействий

и называется собственной реакцией (решение однородного дифференциального уравнения), другая определяется для экспоненциальных во времени воздействий (частная реакция).

Начнем рассмотрение методики решения динамических уравнений с определения собственной реакции. Можно показать, что при нулевых воздействиях токи и напряжения ветвей линейной цепи будут иметь ненулевые значения только в том случае, когда они являются суммой экспоненциальных функций времени, называемых собственными модами. Постоянные времени собственных мод образуют совокупность чисел (возможно, комплексных), обратные значения которых называются собственными частотами цепи. Интересно отметить, что максимальное число собственных мод и собственных частот равно порядку цепи.

Все эти теоретические положения лучше всего рассмотреть на примере.

Пример 3.6. Вернемся к динамическому уравнению (3.1), полученному для цепи рис. 3.1, и найдем собственную реакцию тока через сопротивление. Для этого полагаем правую часть динамического уравнения равной нулю. Продифференцируем уравнение и получим

$$\frac{d^2 i_R(t)}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{d i_R(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_R(t) = 0.$$

Согласно теории, собственное решение может содержать сумму экспоненциальных функций вида $i_R(t) = A e^{p t}$. Подставим его в уравнение и после сокращения ненулевых функций и коэффициентов получим алгебраическое уравнение относительно p :

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0, \quad (3.8)$$

$$\text{где } 2\alpha = \frac{1}{RC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Решение этого уравнения дает значения собственных частот p_1 и p_2 , определяющие собственные моды данной цепи:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \quad i_R^{(1)}(t) = A e^{p_1 t}; \quad i_R^{(2)}(t) = B e^{p_2 t}.$$

Если p_1 и p_2 — разные числа, собственное решение является суммой собственных мод:

$$i_R(t) = i_R^{(1)}(t) + i_R^{(2)}(t) = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t} \quad (3.9)$$

Полученное выражение для собственной реакции является неопределенным, поскольку коэффициенты А и В могут быть любыми, в том числе и комплексными числами. В принципе их можно определить из заданных начальных условий, и тогда свободное решение станет вполне определенной функцией, называемой реакцией при нулевом входном сигнале (РНВ).

Зададимся численными значениями элементов цепи и начальными условиями с тем, чтобы найти РНВ и выяснить его физический смысл. Пусть $R = 1 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $L = 1 \text{ мГ}$, $i_L(0) = -1 \text{ мА}$, $u_C(0) = 2 \text{ В}$. Начальные условия для переменных состояния называются независимыми начальными условиями. Поскольку наше динамическое уравнение имеет переменную $i_R(t)$, необходимо сначала пересчитать независимые начальные условия в зависимые, определяющие значения $i_R(0)$ и $\frac{di_R(0)}{dt}$. Это можно сделать непосредственно по схеме цепи. С одной стороны, $i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R}$. Отсюда $i_R(0) = \frac{u_C(0)}{R} = 2 \text{ мА}$. С другой стороны, $\frac{di_R(t)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} i_C(t) = \frac{1}{RC} (i_L(t) - i_R(t))$. Итак, $\frac{di_R(0)}{dt} = \frac{1}{RC} (i_L(0) - \frac{u_C(0)}{R}) = -3 \frac{1}{C}$.

Вернемся теперь к полученной ранее общей реакции (3.9). Составим систему уравнений для определения коэффициентов А и В, используя для этого найденные зависимые начальные условия:

$$i_R(0) = A e^{p_1 0} + B e^{p_2 0} = A + B = 2 \text{ мА};$$

$$\frac{di_R(0)}{dt} = p_1 A e^{p_1 0} + p_2 B e^{p_2 0} = p_1 A + p_2 B = -3 \frac{1}{C}$$

Решая эту систему с учетом значений $p_{1,2} = -0,5 \cdot 10^3 \pm \pm j 866 \text{ (рад/с)}$, получим $A = B^* = 2,517 \cdot 10^{-3} e^{j 66,6^\circ}$. Таким образом, реакция при нулевом воздействии (РНВ)

$$i_R(t) \text{ РНВ} = 5,034 e^{-0,5 \cdot 10^3 t} \cos(866 t + 66,6^\circ).$$

График этой функции представлен на рис. 3.7.

Анализируя график РНВ, отметим сначала, что его начальное значение и наклон в начале координат соответствуют найденным $i_R(0)$ и $\frac{di_R(0)}{dt}$. Дальнейшее поведение РНВ в виде быстро затухающей косинусоиды говорит о том, что цепь является низкооборотным резонансным контуром. Для выявления его параметров полезно изобразить собственные частоты на плоскости комплексной частоты (рис. 3.8).

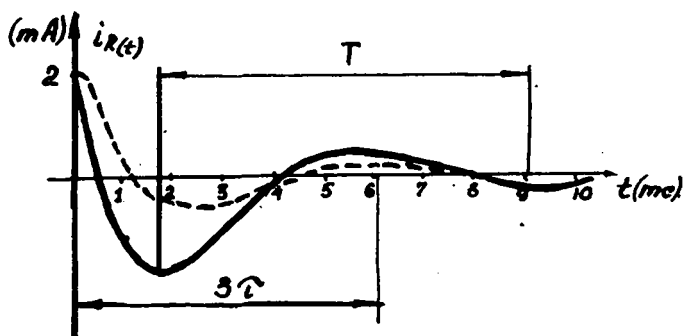


Рис. 3.7

Во-первых, резонансная частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^3$ рад/с равна длине отрезка, соединяющего начало координат и точку, соответствующую собственной частоте. На графике РНВ период времени T соответствует проекции собственной частоты на мнимую ось

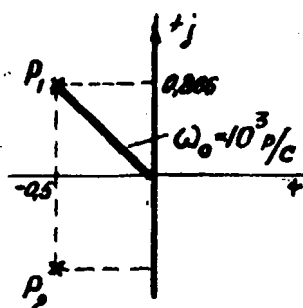


Рис. 3.8

$$T = \frac{2\pi}{0.866} \cdot 10^{-3} \approx 7,25 \text{ мс.}$$

Время, за которое РНВ затухает практически до нуля, оценивается как $3\tau = 3 \frac{1}{0,5 \cdot 10^3} \approx$

≈ 6 мс, где τ — величина, обратная проекции собственной частоты на действительную ось. Как видно, собственные частоты определяют основные свойства РНВ, в то время как начальные условия дают конкретный вид функции РНВ. Чтобы убедиться в этом, найдем РНВ той же цепи при начальных условиях $i_R(0) = 2$ мА;

$\frac{di_R(0)}{dt} = 0$. График изображен пунктирной линией на рис. 3.7.

Несколько иной получается форма собственных мод, если решением уравнения (3.8) является корень второй кратности $p_1 = p_2 = p_0$.

$$i_R(t) = A e^{p_0 t} + B t e^{p_0 t}. \quad (3.10)$$

Если кратность корня характеристического уравнения равна N , то собственная реакция включает собственные моды вида $A_1 e^{p_0 t}$, $A_2 t e^{p_0 t}$, ..., $A_N t^{(N-1)} e^{p_0 t}$.

В заключение следует отметить, что, если в процессе решения не нужно находить РНВ, а требуется найти общее решение с учетом входного воздействия и начальных условий, то можно собственное решение оставить с неопределенными коэффициентами и конкретизировать их после нахождения частного решения.

Как уже говорилось, частное вынужденное решение будем находить только для воздействий, имеющих экспоненциальную форму. В действительности это ограничение не является чересчур жестким, поскольку довольно широкий класс сигналов можно представить в виде суммы экспоненциальных членов (разложение по Фурье), а линейные цепи удовлетворяют принципу суперпозиции. Нетрудно догадаться, что если в правой части динамического уравнения в качестве воздействия подставляется экспоненциальная функция вида $e^{p_c t}$, где p_c — комплексная частота сигнала, то решение уравнения может быть тоже экспоненциальным с той же частотой. Это решение и называется частным решением.

Здесь следует отметить, что существует одно исключение из правила. Проявляется оно в случае совпадения частоты воздействия с одной из собственных частот линейной цепи, т.е., если кратность этой собственной частоты равна M , частное или вынужденное решение будет иметь форму $Ct^M e^{p_c t}$.

Нахождение вынужденной реакции рассмотрим на примере.

П р и м е р 3.7. Вернемся к примеру 3.3, в котором рассматривалась цепь с операционными усилителями. Воспользуемся полученным ранее дифференциальным уравнением (3.2). Пусть воздействие имеет форму $e(t) = B e^{p_c t}$, где p_c — частота воздействия, не совпадающая с собственной частотой цепи. Тогда частное решение для $U(t)$ будет иметь вид $D e^{p_c t}$. Подставив его в уравнение (3.2), получим

$$D p_c^2 e^{p_c t} + \frac{D}{CR(K+1)} p_c e^{p_c t} + \frac{1}{(CR)^2} e^{p_c t} = \frac{KB}{(CR)^2(K+1)} e^{p_c t}$$

Отсюда можно найти конкретное значение D :

$$D = \frac{KB / (CR)^2(K+1)}{p_c^2 + p_c / CR(K+1) + 1 / (CR)^2}$$

Таким образом, частное решение найдено.

Для случая, когда цепь описывается системой уравнений состояния (см. пример 3.4), решение также состоит из двух частей: одно-

родного (собственного) решения, которое ищется при нулевом внешнем воздействии (в примере 3.4 $\ell(t) = 0$), и частного решения при экспоненциальном воздействии. При этом система дифференциальных уравнений первого порядка преобразуется в алгебраическую систему уравнений, решаемую в соответствии с методами линейной алгебры (правило Крамера, метод Гаусса и т.п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. М а т х а н о в П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. - М.: Высш. школа, 1990.
2. С и б е р т У.М. Цепи, сигналы, системы. - М.: Мир, 1988.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Основные понятия теории радиоэлектронных цепей.	3
1.1. Модели идеализированных элементов.	4
1.2. Модели полупроводниковых приборов.	14
1.3. Модели сигналов.	18
2. Анализ линейных цепей методами преобразований	22
2.1. Основные принципы анализа линейных цепей	24
2.2. Эквивалентные преобразования цепей с параллельным и последовательным соединением элементов	26
2.3. Эквивалентные преобразования источников.	30
2.4. Метод наложения.	34
2.5. Метод узловых потенциалов.	37
2.6. Методика расчета лестничных структур	41
3. Анализ линейных цепей решением динамических уравнений	43
3.1. Динамические уравнения линейных цепей.	45
3.2. Решение динамических уравнений линейных цепей.	53
Литература	58

Тем. план 1992, поз. 9.

Кузнецов Юрий Владимирович

Тронин Юрий Владимирович

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ
РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ
(ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ)

Редактор М.С. Винниченко

Техн. редактор Н.Б. Карякина

Подписано в печать 17.06.92

Бум. офсетная. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная

Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,68. Тираж 1000

Зак. 2400/440. Цена 45 к.

Типография издательства МАИ

125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4