

Р.А. Монзинго Т.У. Миллер

# Адаптивные антенные решетки

# **Introduction to Adaptive Arrays**

**Robert A. Monzingo**

**Thomas W. Miller**

*Hughes Aircraft Company  
Fullerton, California*

**A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION**

**John Wiley & Sons**

**New York · Chichester · Brisbane · Toronto**

Р.А. Монзинго Т.У. Миллер

# Адаптивные антенные решетки

Введение в теорию

Перевод с английского  
под редакцией В.А. Ленсаченко



Москва «Радио и связь» 1986

ББК 32.95

М 77

УДК 621.6.677.49—472.2

Перевод с английского В. Г. Челпанова, В. А. Лексаченко

Редакция переводной литературы

**Монзинго Р. А., Миллер Т. У.**

**М 77** Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию:  
Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1986. — 448 с., ил.

В пер.: 2 р. 40 к. 5000 экз.

В книге американских авторов рассмотрено применение адаптивных решеток в радио- и гидролокации. Большое внимание уделено алгоритмам адаптации систем с антенными решетками, способам их аппаратурной реализации и математическому моделированию. Проанализированы основные факторы, влияющие на эффективность адаптивных решеток. Показаны перспективные направления исследований в области адаптивных решеток.

Для инженерно-технических работников.

М 2402020000-031 51-85  
046(01)-86

ББК 32.95  
6Ф2.12

© 1980 by John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

© Перевод на русский язык, предисловие редактора перевода, примечания редактора и переводчика. Издательство «Радио и связь», 1986.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В радиолокации, гидролокации, радиосвязи и других областях техники в последние годы значительно возрос интерес к антенным решеткам. Их широкое применение объясняется рядом преимуществ перед антеннами других типов. Важнейшим из таких преимуществ является относительная простота формирования и изменения диаграммы направленности. Благодаря этим свойствам удалось создать качественно новый тип устройств пространственной обработки сигналов — адаптивные антенные решетки.

Адаптивная антенная решетка представляет собой систему, состоящую из антенной решетки и связанного с ней устройства обработки сигналов (процессора), изменяющего свои параметры в соответствии с информацией, заключенной в принимаемых сигналах. Именно процессор определяет основные характеристики системы, а антенная решетка играет в ней хотя и важную, но подчиненную роль многоканального датчика информации. Поэтому проблематика данной книги связана главным образом с многоканальной обработкой сигналов, а не с антеннами.

Несмотря на большое число журнальных публикаций по адаптивным антенным решеткам, вопросы многоканальной обработки сигналов скудно представлены в технической литературе. Между тем в последнее время наблюдается повышение интереса к подобным системам, так как в связи с развитием цифровой вычислительной техники (и в особенности микропроцессоров) появляется возможность реализации более сложных и более эффективных видов обработки сигналов. К тому же расширяется и область применения адаптивных решеток: они привлекают внимание геологов, сейсмологов и других специалистов. Поэтому не вызывает сомнения целесообразность издания книги по адаптивным решеткам, рассчитанной не только на специалистов, но и на широкий круг лиц, интересующихся обработкой сигналов, полученных от системы датчиков. Предлагаемая книга в определенной степени удовлетворяет этим требованиям. Она содержит обширную вводную часть, знакомящую неспециалистов с элементами теории адаптивных антенных решеток, подробный обзор известных методов обработки сигналов в этих системах и краткое рассмотрение некоторых перспективных направлений дальнейших исследований.

По уровню изложения книга вполне доступна радиоинженерам и студентам старших курсов технических вузов. Она полезна и как учебное пособие для начинающих, и как справочное руководство для специалистов по обработке сигналов. Следует отметить, что авторы придерживаются характера изложения, при котором часто главную роль играет скорее инженерная интуиция, а не стремление к точности и математической строгости выдвигаемых положений. Это вызвало опре-

деленные трудности при переводе, которые переводчик и редактор по мере сил стремились преодолеть.

В книге использованы в основном работы американских авторов, и мы не найдем здесь ссылок на работы советских авторов. Поэтому будет нелишне заметить, что тематика, связанная с адаптивными антенными решетками, широко представлена в отечественной научной литературе и в ряде случаев исследования советских специалистов опережают зарубежные. Так, например, первой работой, в которой было доказано основное утверждение теории адаптивных антенных решеток о том, что оптимальная система должна формировать диаграмму направленности с нулем в направлении на сильный точечный источник помехи, была статья Я. Д. Ширмана [П.1]. Рассмотренный в гл. 8 данной книги адаптивный предпроцессор Грама—Шмидта наряду с более общим устройством обработки — многоканальным фильтром-ортогонализатором был рассмотрен в статье [П.2], опубликованной ранее аналогичных работ американских авторов. Можно было бы привести и еще ряд примеров. Читателю, интересующемуся работами советских авторов в данной области, можно порекомендовать книги [П.3, П.4], в которых он найдет подробные ссылки на имеющиеся публикации.

Переводчик и редактор благодарны профессору Т. Миллеру, любезно представившему список опечаток в американском издании. Эти, а также другие опечатки и погрешности были устранены при переводе без специальных оговорок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ПРЕДИСЛОВИЮ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

- П.1. Ширман Я. Д. Статистический анализ оптимального разрешения. — Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, № 8, с. 1237.
- П.2. Лексаченко В. А., Шаталов А. А. Синтез многомерного выбеливающего фильтра по методу Грама—Шмидта. — Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 1, с. 112.
- П.3. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1981. — 416 с.
- П.4. Журавлев А. К., Лукошкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. — 239 с.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга задумана как введение в круг вопросов, связанных с адаптивными антенными решетками — системами, предназначенными для улучшения качества приема и обнаружения полезных сигналов. К хорошо известным достоинствам систем с антенными решетками относятся возможности быстрого формирования и изменения в широких пределах диаграммы направленности, в силу чего такие системы нашли применение в связи, радио- и гидролокации, радиоастрономии, сейсмологии и ультразвуковой акустике. Возрастающее значение адаптивных антенных решеток непосредственно связано с появлением недорогих мини-ЭВМ, позволяющих реализовать некоторые хорошо известные из теории обработки сигналов и теории управления методы самонастройки.

Области техники, связанные с адаптивными антенными решетками, развиваются довольно быстро и с расширением их применения появляются все большее число публикаций по различным аспектам таких систем. Есть даже несколько руководств, в которых кратко рассматриваются отдельные вопросы по этой теме, но до сих пор не было ни одной книги, полностью посвященной всестороннему рассмотрению адаптивных антенных решеток и позволяющей читателю легко ориентироваться в существующей литературе. Этим и объясняется решение авторов написать данную книгу. Главное внимание в ней уделено тем принципам и методам, которые наиболее важны при построении современных систем с адаптивными решетками. Основное содержание книги базируется на опубликованных в научной литературе результатах, однако в ней приводятся и некоторые оригинальные материалы.

По мнению авторов, эта книга может служить и как учебное пособие для студентов старших курсов, и как справочник для инженеров, научных работников и специалистов по системному анализу. Представленный материал будет наиболее понятен читателям, имеющим надлежащую подготовку по теории антенных решеток, обработке сигналов (теории связи и теории оценок), методам оптимизации, теории управления, теории вероятностей и математической статистике. Тем не менее читателю не обязательно иметь подготовку по всем перечисленным дисциплинам, поскольку в книге подробно излагаются основы теории и важнейшие методы из указанных разделов, а также даются ссылки на соответствующую литературу. Сначала излагаются основные понятия, иллюстрируемые примерами, а затем рассматриваются современные тенденции в области развития адаптивных антенных решеток. В конце каждой главы приведены задачи, иллюстрирующие и дополняющие основной материал. Эти дополнения знакомят читателя с актуальными проблемами, связанными с разработкой адаптивных решеток, и стимулируют дальнейшее их изучение по специаль-

ной литературе, на которую даются ссылки. Все это позволяет студентам и инженерам сравнительно быстро ознакомиться с теми возможностями, которые открываются при использовании адаптивных антенных решеток в реальных системах обработки сигналов.

Книга состоит из трех частей. В первой части (гл. 1—3) рассматриваются преимущества, которые дает использование адаптивных антенных решеток, определяются основные элементы систем и оцениваются теоретические пределы эффективности (в установленном режиме) систем с антенными решетками. Несмотря на то, что в литературе описано много разнообразных алгоритмов адаптации, сравнительный анализ этих алгоритмов практически не проводился. Поэтому во второй части (гл. 4—10) дается обзор адаптивных алгоритмов и приводятся характеристики для каждого типа алгоритма. Располагая этой информацией, разработчик может быстро определить те пути, которые наиболее просто приведут к успешному решению для конкретных условий приема сигналов и ограничений в системе. В третьей части (гл. 11, 12) рассматриваются проблема компенсации погрешностей, неизбежно возникающих в любой реальной системе с адаптивными антенными решетками, и современные тенденции в исследованиях, посвященных адаптивным решеткам. Надеемся, что использованный в книге математический аппарат позволит воспользоваться представленным в ней материалом широкому кругу читателей.

Авторы глубоко признательны всем помогавшим в подготовке рукописи. Заместитель декана инженерного факультета Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе проф. Мартин С. Роуден постоянно поддерживал и вдохновлял нас во время работы над этой книгой. Мы благодарны У. Педлеру и Дж. Сойерсу, просмотревшим части рукописи, а также Н. Ледфорд, которая предложила и подготовила ряд рисунков. Р. Нелсон оказал содействие в осуществлении математического моделирования адаптивных алгоритмов на ЭВМ. Мы благодарны также Л. Шенет, которая умело переработала рукописные материалы в окончательный вариант книги. Наконец, особую признательность мы выражаем нашим семьям за их понимание и поддержку во время написания этой книги.

**Фуллerton, шт. Калифорния**  
**Июль 1980**

**Роберт А. Монзинго**  
**Томас У. Миллер**



# Часть I

## АДАПТИВНЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ: ПРИМЕНЕНИЕ, ЭЛЕМЕНТЫ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

### Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

Прием сигнала с помощью многоэлементных антенных решеток в течение длительного времени остается одним из основных методов решения сложных задач обнаружения и оценивания, так как в отношении формируемой диаграммы направленности система с решеткой обладает преимуществами перед системой с одноэлементным антенным датчиком. Создание систем с антенными решетками, осуществляющих автоматическую подстройку характеристик в соответствии с изменяющимися условиями приема сигнала, стало возможным при появлении недорогих мини-ЭВМ, позволяющих реализовать на их основе известные результаты теории обнаружения, оценивания и управления. Способность к адаптации делает работу систем с антенными решетками более гибкой и (что более важно) позволяет повысить эффективность приема, что зачастую сложно осуществить другими путями.

#### 1.1. ПРИЧИНЫ ПРИМЕНЕНИЯ АДАПТИВНЫХ РЕШЕТОК

Обычные системы чувствительны к уменьшению отношения сигнал-шум (ОСШ), обусловленному неизбежным присутствием наряду с полезным сигналом нежелательных «шумовых» сигналов, поступающих на вход по боковым и (или) по главному лепесткам диаграммы направленности антенны. Эти сигналы могут создаваться передатчиками помех, отражениями от местных предметов и другими источниками шума. Уменьшение ОСШ, кроме того, может быть обусловлено движением антенны, неудачной ее установкой, эффектами многолучевого распространения и изменяющейся помеховой ситуацией.

Системы с адаптивными решетками остаются предметом интенсивных исследований, так как позволяют повысить эффективность приема полезных сигналов при наличии указанных помех в радио-, гидролокации, сейсмологии и связи. Основная причина пристального внимания к адаптивным антенным решеткам заключается в способности таких систем без априорной информации о помеховой ситуации автоматически обнаружить присутствие источников помех и подавлять их сигналы на выходе, улучшая тем самым прием полезного сигнала. В системах с адаптивными решетками могут дополнительно применяться другие методы подавления помех и при этом результирующая эффективность будет гораздо выше, чем при обычных широко извест-

ных способах, как, например, при использовании широкополосных сигналов или остронаправленных антенн.

Адаптивная антенная решетка представляет собой систему, состоящую из многоэлементной антенной решетки и адаптивного, работающего в реальном масштабе времени, приемно-решающего устройства — процессора, осуществляющего автоматическую подстройку диаграммы направленности для повышения эффективности приема полезного сигнала. Надежность систем с адаптивными антенными решетками выше, чем надежность систем с обычными антенными решетками. Диаграмма направленности обычной антенной решетки при выходе из строя одного из ее элементов может существенно исказиться из-за увеличения уровня боковых лепестков. В адаптивной же решетке за счет автоматической подстройки остальных элементов уровень боковых лепестков будет уменьшен до допустимого. Часто характеристики антенной решетки в большей степени зависят от эффектов рассеяния в ближней зоне, чем от диаграммы направленности в свободном пространстве. Например, если антенну с очень малым уровнем боковых лепестков установить на самолет, то из-за влияния крыльев и хвоста диаграмма направленности полностью изменится. Даже в условиях таких сильных искажений, обусловленных эффектами в ближней зоне, адаптивная решетка способна обеспечивать удовлетворительный прием сигнала.

Работа адаптивной антенной решетки наглядно характеризуется ее диаграммой направленности. Подавление помехового сигнала достигается за счет управления положениями нулей диаграммы направленности и уменьшения уровня боковых лепестков в направлении источников помех. Условия приема полезного сигнала при этом не ухудшаются из-за поддержания неизменной формы главного (или сигнального) лепестка диаграммы. Таким образом в адаптивных антенных решетках для увеличения выходного ОСШ используются различия пространственных характеристик сигналов и помех. Поскольку имеется возможность формирования очень глубоких нулей (очень малых значений коэффициентов передачи), то можно обеспечить и очень высокое подавление помеховых сигналов. Такая исключительная способность подавления помех является основным преимуществом систем с адаптивными антенными решетками перед другими системами, в которых для получения сравнимых величин подавления требуются, как правило, сигналы с большим произведением длительности полезного сигнала на полосу пропускания. Адаптивные антенные решетки иногда называют «самообучающимися», так как в них, в отличие от обычных решеток, осуществляется подстройка характеристик в соответствии с поступающей информацией о сигнале.

В этой книге будут рассматриваться возможности решения практических задач приема полезного сигнала на фоне помех с помощью адаптивных антенных решеток с учетом их способности выделять и различать сигналы в пространственной и частотной областях, а также по поляризации. В настоящее время основным достоинством таких систем считается адаптивное формирование нулей диаграммы направленности, обеспечивающее автоматическое подавление помех, дейст-

вующих по боковым лепесткам, что является важным средством борьбы с радиопротиводействием в радиолокации. Адаптивные антенные решетки могут быть спроектированы таким образом, чтобы обеспечивались такие традиционные возможности решеток, как самофокусировка при приеме и направленное переизлучение. Наряду с возможностями подавления помех и управления диаграммой направленности адаптивные решетки позволяют также реализовать на их основе системы радиолокационного картографирования с высокой угловой разрешающей способностью. Следует отличать адаптивные передающие антенные решетки, обеспечивающие самофокусировку и переизлучение, от адаптивных приемных антенных решеток, которые и будут рассматриваться в этой книге.

## 1.2. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Термин «адаптивная антенна» впервые был использован в работах [1, 2] для описания системы с самофазирующейся антенной, автоматически переизлучающей сигнал в направлении, с которого он был принят. Такая система действует как «переизлучающая» и для работы не требует априорной информации о направлении, в котором будет излучаться сигнал. Переизлучающие антенные решетки нашли применение в спутниковых системах связи, использующих сильные пилот-сигналы. Такие системы позволяют использовать достоинства многоэлементных антенных решеток и избегать недостатков обычных антенн в отношении ширины их диаграммы (и, следовательно, их направленности).

Появлению самонастраивающихся (или самофазируемых) адаптивных антенных решеток способствовало развитие систем фазовой автоподстройки [3]. Каждый элемент самофазируемой антенной решетки подстраивается независимо на основе принятой информации о сигналах. Например, в сложных системах, содержащих несколько приемных антенн с большим раскрытием, можно создать эффективный приемный раскрыт, равный сумме раскрытий отдельных антенн, с помощью автоматического фазирования по сигналам спутников или других космических объектов.

В начале 60-х годов Хауэлс [4, 5] обосновал возможность подавления помехи адаптивной антенной решеткой с помощью формирования нуля диаграммы в направлении ее источника. Позже Аппельбаум на основе анализа алгоритма, максимизирующего обобщенное ОСШ (МСШ), разработал закон управления применительно к схеме Хауэлса, обеспечивающей подавление помехи [6]. Одновременно Уидроу и другими были рассмотрены возможности применения в адаптивных антенных решетках управления с самообучением [7—9]. Режим управления с самообучением приводит к алгоритму минимальной средней квадратической ошибки (МСКО), основанному на методе наискорейшего спуска. Алгоритмы Аппельбаума и Уидроу очень похожи и оба сходятся к оптимальному винеровскому решению.

До появления первых работ Аппельбаума и Уидроу многоэлементные антенные решетки в течение длительного времени обычно исполь-

зовались для приема сигналов в радио- и гириолокаторах [10, 11]. Сначала работы, посвященные обработке выходных сигналов антенных решеток, в основном касались формирования «желаемой» формы диаграммы направленности, и лишь позднее внимание было обращено на задачу увеличения ОСШ [12—14]. В этот же период времени разрабатывались антенные решетки для сейсмических исследований, поэтому в конце 60-х годов появились работы, описывающие применения таких решеток для обнаружения удаленных сейсмических явлений [15—17].

В настоящее время интерес к адаптивным антенным решеткам связан с их применением к задачам радиолокации и радиосвязи, где разработчики неизбежно сталкиваются с проблемой подавления помех [18]. Другой пример использования адаптивных решеток относится к пеленгации в условиях сильных помех [19, 20]. Адаптивные антенные решетки могут успешно решать задачи формирования требуемой диаграммы направленности в тех случаях, когда точное положение их элементов не известно [21]. Кроме того, в системах с большими антенными решетками при заранее не заданной структуре могут использоваться методы адаптивной подстройки для получения высокой угловой разрешающей способности [22, 23].

Поэтому разработчики систем должны хорошо знать сильные и слабые стороны различных алгоритмов подстройки и выбирать их в соответствии с ожидаемыми условиями работы. Одно из основных направлений исследований в течение последнего десятилетия состояло в создании адаптивных решеток, обеспечивающих на выходе удовлетворительное значение ОСШ при неполной информации об условиях приема сигналов. Другой важной задачей исследований было обеспечение наиболее быстрого переходного процесса (т. е. высокой скорости адаптации) при нестационарных условиях приема сигнала, особенно тогда, когда с помощью средств радиопротиводействия пытаются нарушить работу системы, искусно манипулируя несколькими совместно работающими передатчиками помех. Началась также разработка методов адаптивной фильтрации, применение которых наряду с адаптивным подавлением помех, действующих по боковым лепесткам диаграммы направленности, позволяет создавать высокоэффективные системы приема сигналов при воздействии помех различных типов, в том числе и обусловленных отражениями от местных предметов.

### 1.3. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

На рис. 1.1 приведена функциональная схема адаптивной антенной решетки и показаны ее основные элементы, обеспечивающие улучшение приема полезного сигнала и подавление нежелательных сигналов помех. Такими основными элементами являются: антенная решетка, диаграммообразующая схема и блок адаптивного управления диаграммой направленности (или адаптивный процессор), осуществляющий подстройку весовых коэффициентов в диаграммообразующей схеме. В блоке адаптивного управления диаграммой направленности для удобства анализа можно выделить процессор сигнала и устройство, реализующее алгоритм управления. Особенности выполнения основных эле-

ментов системы связаны с реальными условиями ее работы и зависят от характеристик среды распространения сигналов, интересующего спектра частот и знания условий приема сигнала.

Антенна выполнена в виде решетки, состоящей из  $N$  элементов, и предназначена для приема (и излучения) сигнала в соответствующей среде распространения. Элементы размещены так, чтобы обеспечить формирование требуемой диаграммы направленности в задан-

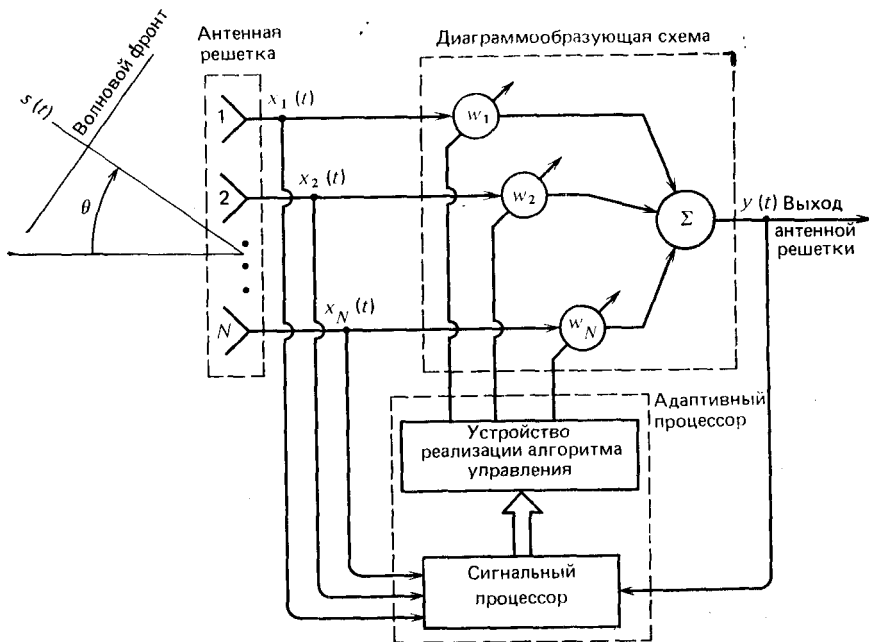


Рис. 1.1. Структурная схема  $N$ -элементной адаптивной антенной решетки

ной области пространства. Характеристики элементов и их фактическое расположение в решетке налагают основные ограничения на результирующие свойства системы с адаптивной решеткой. Выходные сигналы каждого элемента поступают в диаграммообразующую схему, где они сначала умножаются на комплексные весовые коэффициенты (с учетом амплитуды и фазы), а затем суммируются и образуют в результате выходной сигнал антенной решетки. Весовые коэффициенты диаграммообразующей схемы также (наряду с характеристиками элементов и их фактическим расположением) влияют на результирующую диаграмму направленности, а это, в свою очередь, определяет и возможность обеспечения системой заданных требований.

Структура адаптивного процессора в очень сильной степени зависит от полноты априорной информации об условиях приема сигнала. По мере того, как количество априорной информации об условиях приема сигнала (например, о положении источника полезного сигнала,

об уровнях мощности помех и т. д.) уменьшается, все большее значение приобретает выбор алгоритма управления. В том случае, когда характер всех принимаемых сигналов точно известен и известны направления прихода этих сигналов, а также характеристики элементов антенной решетки, можно обойтись без адаптивного процессора и на основе простых расчетов определить значения весовых коэффициентов диаграммообразующей схемы, обеспечивающие улучшение приема полезного сигнала или подавление помехи. Поскольку такой детальной априорной информации на практике нет, адаптивный процессор должен обладать способностью автоматической подстройки к любым изменениям (в широких пределах) условий приема сигнала. Если какие-либо сведения об условиях приема сигнала оказываются известными или могут быть разумно сформулированы, то такая информация может стать полезной для определения структуры адаптивного процессора.

#### 1.4. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С АДАПТИВНЫМИ АНТЕННЫМИ РЕШЕТКАМИ

Основная задача, стоящая перед разработчиком адаптивной антенной решетки, заключается в улучшении приема полезного сигнала при наличии нежелательных сигналов помех. Термины «полезный сигнал» и «сигнал помехи» означают, что характеристики сигналов этих двух классов в некотором смысле различны и что это различие может быть использовано для улучшения эффективности приема полезного сигнала. Например, если направление прихода полезного сигнала известно (или может быть установлено), то любые сигналы, поступающие с других направлений, могут быть подавлены с помощью формирования нулей диаграммы направленности антенной решетки в этих направлениях. Аналогично, если спектр полезного сигнала занимает известную часть частотного диапазона, помеховые сигналы, лежащие вне его, могут быть подавлены с помощью полосовых фильтров. Поскольку полезный сигнал должен быть достаточно хорошо известным (чтобы была возможность отличить его от сигналов помех), то можно считать, что природа сигнала известна, хотя его отдельные параметры (такие как направление прихода, амплитуда и фаза) могут подлежать оценке. Если основной задачей разработчика является подавление помеховых сигналов, то эффективность приема полезного сигнала может при этом ухудшаться. Аналогично, если главное внимание обращается на улучшение эффективности приема полезного сигнала, то может одновременно улучшаться эффективность приема и помехового сигнала. Поэтому две (и иногда противоречивые) задачи улучшения эффективности приема полезного сигнала и подавления помех должны решаться одновременно и так, чтобы результирующая эффективность приема полезного сигнала увеличивалась. Во многих случаях наилучшей характеристикой результирующей эффективности приема оказывается выходное ОСШ. В пассивных приемных системах, однако, главной задачей является определение присутствия (отсутствия) полезного сигнала на фоне сигналов помех и шума. Определение факта присутствия или отсутствия сигнала требует принятия соответствующего решения,

которое не обеспечивается простой максимизацией выходного ОСШ. Теория статистических решений обеспечивает получение решения для задач этого типа на основе минимизации среднего риска, связанного с неправильными решениями. Оптимальные процессоры, синтезированные на основе теории статистических решений, близки к процессорам, полученным при максимизации выходного ОСШ, что подчеркивает сходство решаемых такими процессорами задач, которые вначале казались совершенно различными.

Для реализации на практике потенциальных возможностей эффективного приема полезного сигнала разработчик системы с адаптивной антенной решеткой должен так выбрать ее основные элементы (конфигурацию решетки, диаграммообразующую схему, процессор сигнала и алгоритм адаптивного управления весовыми коэффициентами), чтобы система удовлетворяла нескольким различным требованиям и при этом была по возможности простой и недорогой. Требования, предъявляемые к работе системы, удобно разделить: на требования к переходному и установившемуся режимам. Переходный режим определяется как промежуток времени, необходимый для подстройки адаптивной системы, в результате которой достигается установившийся режим или система успешно отслеживает изменение условий приема сигнала. Установившийся режим наступает после завершения переходного режима и может определяться различными характеристиками, к числу которых обычно относятся форма результирующей диаграммы направленности и выходное отношение мощности сигнала к сумме мощностей помехи и шума. В гл. 3 подробно рассматриваются наиболее употребимые критерии эффективности работы систем. Характеристики системы с адаптивной антенной решеткой в переходном режиме сложным образом зависят от выбранного алгоритма подстройки и условий приема сигнала. Характеристики же системы в установившемся режиме могут быть легко определены на основе данных о значениях комплексных весовых коэффициентов, об условиях приема сигнала и о структуре антенной решетки.

Определенная взаимосвязь существует между скоростью изменения нестационарного шумового поля и характеристиками адаптивной системы в установившемся режиме; в общем случае, чем медленнее такие изменения, тем лучше характеристики системы. Поэтому при разработке любой адаптивной системы необходимо находить оптимальное компромиссное решение между скоростью и точностью адаптации.

Требования, предъявляемые к системе, накладывают определенные ограничения на допустимый диапазон изменения скоростей переходного процесса. В самолетных системах радиосвязи, например, наибольшая скорость переходного процесса ограничена частотой модуляции сигнала (поскольку при очень высокой скорости модуляции сигнала будет влиять на весовые коэффициенты). Наименьшая же скорость переходного процесса определяется из условия обеспечения (достаточно быстрой) компенсации эффектов, обусловленных собственным движением самолета.

Весовые коэффициенты в системах с адаптивными антенными решетками могут подстраиваться с помощью одного из многочисленных ал-

горитмов; некоторые из них могут быть выполнены как в аналоговой, так и цифровой форме, тогда как другие могут быть реализованы только в цифровом виде, для чего предполагается использование, по крайней мере, небольшой цифровой ЭВМ. «Наилучший» алгоритм для заданного применения выбирается с учетом многих факторов, включая: характеристики сигнала, имеющуюся априорную информацию, оптимизируемые параметры системы, необходимую скорость адаптации процессора, схемную сложность, технологические требования и стоимость. Для многих используемых на практике систем радиосвязи аналоговые методы построения более пригодны, чем цифровые, так как они обеспечивают более высокое быстродействие и меньшую стоимость. Кроме того, аналого-цифровое преобразование широкополосных сигналов, требуемое для некоторых цифровых алгоритмов, может оказаться невыполнимым при достаточно высоких частотах, используемых во многих системах радиосвязи. Однако если требуемая скорость поступления входных данных оказывается относительно невысокой (около 1 Мбит/с или меньше, как, например, в антенных решетках гидролокаторов), то более предпочтительной будет цифровая реализация.

Как следует из рис. 1.1, сигнал, принимаемый антенной решеткой, поступает на ее элементы в различные моменты времени, определяемые направлением прихода сигнала и расположением элементов решетки. Во многих практических случаях реальный принимаемый сигнал состоит из модулированной несущей и переносимая информация заключена только в ее комплексной огибающей. Если  $s(t)$  обозначает сигнал в виде модулированной несущей, то  $s(t)$  обычно используется для обозначения комплексной огибающей  $s(t)$  (см. приложение Б). В дальнейшем для простоты будем считать, что все сигналы представляются их комплексными огибающими. Поэтому будем полагать, что сигнал каждого из  $N$  каналов  $x_k(t)$  описывается комплексной огибающей, получаемой на выходе элементов антенной решетки, и содержит компоненты сигнала и шума, т. е.

$$x_k(t) = s_k(t) + n_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

В линейной эквидистантной антенной решетке при идеальных условиях распространения величина  $s_k(t)$  определяется направлением прихода полезного сигнала. Например, если направление прихода полезного сигнала составляет угол  $\theta$  относительно положения равносигнального направления, то (для узкополосного сигнала)

$$s_k(t) = s(t) \exp \left\{ j \frac{2\pi kd}{\lambda} \sin \theta \right\}, \quad (1.2)$$

где  $d$  — межэлементное расстояние;  $\lambda$  — длина волны, имеющей плоский фронт; предполагается, что все элементы решетки идентичны.

Выходной сигнал адаптивной антенной решетки с диаграммообразующей схемой (рис. 1.1) можно записать как

$$y(t) = \sum_{k=1}^N w_k x_k(t). \quad (1.3)$$



Выражение (1.3) можно представить в более удобной матричной форме:

$$y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{w}, \quad (1.4)$$

где  $T$  обозначает операцию транспонирования, а векторы  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{x}$  определяются выражениями:

$$\mathbf{w}^T = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_N], \quad (1.5)$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1 x_2 \dots x_N]. \quad (1.6)$$

В дальнейшем полужирным шрифтом будут обозначаться: строчными буквами — векторы, а прописными — матрицы.

Основной задачей адаптивного процессора является такая подстройка переменных весовых коэффициентов, при которой оптимизируется определенный критерий эффективности. Критерий эффективности определяет работу адаптивного процессора и должен выбираться исходя из требуемых характеристик системы в установившемся режиме. К числу наиболее широко используемых критериев эффективности можно отнести: среднюю квадратическую ошибку (СКО) [9, 24—27]; ОСШ [6, 14, 28—30]; мощность выходного шума [31]; максимальный коэффициент передачи антенной решетки [32, 33]; минимальное искажение сигнала [34, 35], а также модификации этих критериев, в которых вводятся различные ограничения [16, 36—39]. В гл. 3 критерии эффективности формулируются с помощью характеристик сигнала, описываемых соотношениями (1.1)—(1.4). Получаемые решения определяют оптимальный выбор комплексного весового вектора и соответствующее оптимальное значение критерия эффективности. Будет показано, что на эффективность работы решающее влияние оказывают фактические условия приема сигнала, при описании которых должно быть обязательно учтено размещение элементов в решетке. Поскольку конфигурация антенной решетки может оказывать сильное влияние на результирующую эффективность системы, целесообразно сначала рассмотреть влияние размещения элементов в решетке, а затем продолжить анализ, используя полученные результаты. Влияние конфигурации антенной решетки на характеристики системы рассматривается в гл. 2.

## 1.5. СОВРЕМЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИСПОЛНЕНИЕ

Несмотря на то, что подавляющее большинство адаптивных антенных решеток разрабатывается сегодня для применения в связных, радио- и гидролокационных системах, используемые при этом методы пригодны также для задач радиоастрономии, сейсмологии и ультразвуковой техники [40]. Чтобы получить общее представление о современном техническом исполнении, целесообразно обратиться к краткому рассмотрению элементов радио- и гидролокационных систем. В обеих системах сначала излучается сигнал, а затем по отраженным сигналам обнаруживается цель. Поэтому нет ничего удивительного в том, что основные принципы построения радиолокаторов в равной степени применимы и для создания гидролокационных систем [41].

В любой системе измерения дальности с использованием отраженного сигнала максимальная дальность обнаружения  $R_{\max}$  связана

с минимальным периодом  $T_{\min}$  между последовательно излучаемыми импульсами (и следовательно, частотой повторения импульсов) соотношением

$$T_{\min} = 2R_{\max}/v, \quad (1.7)$$

где  $v$  — скорость распространения излученного сигнала.

При гидролокационных измерениях скорость распространения звука в воде меняется в широких пределах при изменении температуры, однако для приближенных вычислений можно пользоваться номинальным значением скорости, равной 1500 м/с [42]. Скорость распространения электромагнитных волн в атмосфере может быть выбрана примерно равной скорости света,  $3 \cdot 10^8$  м/с.

Если разрешающая способность по дальности выбирается равной  $r_d$ , то максимальная длительность импульса  $t_{\max}$  (при отсутствии сжатия импульса) определяется выражением

$$t_{\max} = 2r_d/v. \quad (1.8)$$

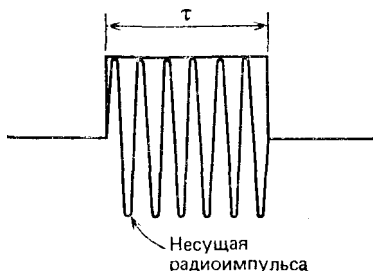


Рис. 1.2. Сигнал в виде радиоимпульса

Необходимо отметить, что  $r_d$  соответствует также минимальной начальной дальности, в пределах которой невозможно обнаружение цели из-за потери работоспособности приемника на время восстановления разрядника антенного переключателя после излучения. Поскольку полоса частот импульсного сигнала обратно пропорциональна его длительности, то нетрудно видеть, что разрешающая способность по дальности также зависит от полосы пропускания основных элементов приемно-передающей части системы.

Излучаемые сигналы имеют форму импульсной последовательности, в которой каждый импульс представляет собой модулированную несущую, как показано на рис. 1.2. Частота несущей  $f_0$ , в свою очередь, определяет длину волны, так как

$$\lambda_0 = v/f_0. \quad (1.9)$$

В гидролокационных системах обычно используются частоты, лежащие в диапазоне 100—100 000 Гц [42], тогда как в радиолокационных область рабочих частот может простираться от нескольких мегагерц вплоть до оптического или ультрафиолетового диапазонов, хотя большая часть оборудования разрабатывается для диапазона 1—40 ГГц. Длина волны является важным параметром, поскольку межэлементное расстояние (измеряемое в единицах  $\lambda_0$ ) оказывается одной из основных характеристик, определяющих диаграмму направленности антенной решетки.

### 1.5.1. Радиолокационная техника

Наблюдаются постоянное расширение областей применения радиолокационных систем и увеличение требований к их эффективности в случаях применения как для военных, так и для гражданских целей. Радиолокационные системы военного назначения должны обеспечивать одновременное решение ряда задач, которые еще в недавнем прошлом выполнялись отдельными радиолокаторами. Например, в радиолокационной системе управления стрельбой может потребоваться выполнение следующих функций: обзор пространства; обнаружение и сопровождение как малоскоростных, так и высокоскоростных целей, находя-

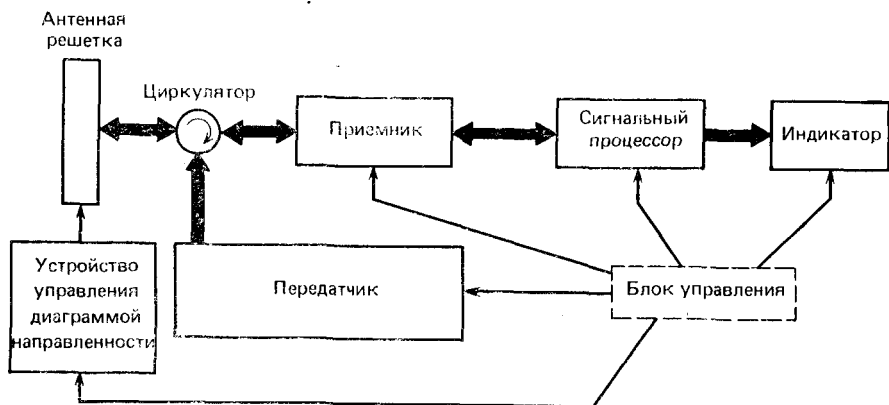


Рис. 1.3. Упрощенная структурная схема типовой радиолокационной системы

щихся на очень малых или на очень больших высотах; управление стрельбой ракетами или орудиями по воздушным и наземным (наводным) целям и, кроме этого, выполнение задач навигации и разведки. К задачам радиолокационных систем гражданской авиации относятся: управление воздушным движением; предотвращение столкновений в воздухе; обеспечение посадки по приборам; метеорологическая разведка и навигация. Расширяется применение радиолокаторов для контроля за дорожным движением и перевозками, а также для исследований земных ресурсов [43].

Повышенные требования к эффективности и гибкости современных радиолокационных систем обуславливают их высокую сложность и многофункциональность. Появление надежных недорогих цифровых электронных микросхем сделало возможным использование для обработки сигнала, принятия решения и управления цифровых устройств, которые считались непрактичными и слишком дорогими еще несколько лет тому назад. Несмотря на сложность и специфику, присущие современным радиолокационным системам, такие системы все еще удобно рассматривать состоящими из отдельных блоков, каждый из которых выполняет определенную функцию в работе системы. На рис. 1.3 показана упрощенная структурная схема радиолокационной системы с цифровым управлением, содержащая пять основных блоков [43], функции кото-

Таблица 1.1

Название блока	Функции блока
Передатчик	Генерирование высокочастотных сигналов с высоким уровнем мощности
Антенна	Формирование передающей и приемной диаграмм направленности
Приемник	Преобразование частоты и усиление при низком уровне шума
Сигнальный процессор	Обнаружение цели, слежение за целью на фоне отражений от местности и определение траектории цели
Индикатор	Преобразование обработанных в процессоре сигналов в смысловую тактическую информацию

рых указаны в табл. 1.1. Наибольший интерес представляют антенна, приемник и сигнальный процессор, которые будут кратко рассмотрены далее.

**Излучающие элементы и антенные решетки.** Чрезвычайно большие диапазоны рабочих частот и уровней мощности современных радиолокационных систем привели к большому разнообразию излучающих элементов, к которым относятся: огромные параболические рефлекторы и сравнительно небольшие рупоры; простые диполи; петлевые и многопетлевые конструкции [44]; спирали [45] и логопериодические излучатели [46]. Антенны с большим раскрывом обеспечивают формирование узких диаграмм направленности, необходимых для обнаружения целей на больших дальностях и для обеспечения высокой разрешающей способности. Диапазон СВЧ является наиболее подходящим для радиолокационного применения, поскольку физические размеры раскрыва антенны оказываются малыми (хотя и во много раз превосходят значение длины волны).

Антенны радиолокационных систем обычно отличаются от антенн систем радиосвязи. Для антенн радиолокаторов характерны остронаправленные сканирующие диаграммы направленности, тогда как для большинства систем связи требуются ненаправленные или направленные, но фиксированные диаграммы. Первые радиолокаторы (созданные в период второй мировой войны) работали в диапазонах высоких и сверхвысоких частот и использовали антенны в виде решеток. В радиолокационных системах диапазона СВЧ широко используются антенны с параболическими рефлекторами, хотя и линзовые антенны также находят применение. Для применения в бортовых радиолокационных системах наиболее подходящими оказываются встроенные антенны и антенны поверхностных волн, так как они не выступают за пределы обшивки корпуса.

Антенна в виде решетки существенно отличается по принципу действия от антенн с рефлекторами и линзовых. В антеннах как линзовых, так и рефлекторного типа волновой фронт на выходе облучателя является сферическим и преобразуется в плоский волновой фронт за счет действия линзы или рефлектора. В антенных же решетках благодаря соответствующим фазовым соотношениям, обеспечиваемым до излу-

чения сигнала, всегда излучается волна с плоским фронтом. Для радиолокационных применений наибольшее распространение получили два типа антенных решеток: линейная и плоская.

Линейная решетка состоит из элементов, расположенных на прямой линии. Плоская же решетка является двухмерной, в которой элементы расположены на плоскости. Линейная антенная решетка наиболее часто используется для формирования веерной диаграммы и оказывается полезной там, где желательно иметь значительную ширину диаграммы направленности в одной плоскости и малую ширину — в ортогональной ей плоскости. Плоская антенная решетка используется в радиолокационных приложениях наиболее часто, так как обладает наилучшими функциональными возможностями, чем антенны других типов. Веерная диаграмма направленности легко формируется решеткой с прямоугольным раскрытием. Остронаправленный луч можно получить с помощью раскрытия квадратной или круговой формы. За счет соответствующего управления весовыми коэффициентами в антенной решетке можно осуществить режим одновременного формирования нескольких лучей для обзора и (или) сопровождения, используя один и тот же раскрыт. Такая возможность обеспечивается многими индивидуально управляемыми элементами решетки и делает последнюю привлекательной (хотя сложной и дорогой) для радиолокационных применений. Появление относительно недорогих устройств цифрового управления, а также использование частично адаптивных решеток [47—49] может в скором времени привести к резкому снижению стоимости системы, связанной, в первую очередь, с управлением диаграммой решетки и обработкой сигнала.

Для сканирования диаграммы направленности необходимо обеспечивать соответствующие фазовые сдвиги сигнала на каждом элементе антенной решетки. Фазосдвигающие устройства можно классифицировать как: 1) устройства с фиксированным сдвигом фаз, 2) механически управляемые фазовращатели и 3) электронно управляемые фазовращатели [50]. Для современных систем наиболее важны электронные фазовращатели. В диапазоне СВЧ регулируемый фазовый сдвиг может быть реализован при использовании ферритовых материалов,  $p-i-n$  диодов, газонаполненных разрядников или ламп бегущей волны [51].

Антенные решетки могут быть выполнены очень компактно и поэтому особенно привлекательны для применений на борту кораблей [52]. Пример вращающейся линейной антенной решетки, состоящей из 80 волноводных рупоров, описан в [53]. Управление диаграммой плоской антенной решетки осуществляется с помощью фазовращателей в радиолокаторе типа FH MUSA в период второй мировой войны [54, 55]. Примером радиолокатора с электронно-сканирующей диаграммой направленности является радар типа ESAR, имеющий примерно 16-метровую плоскую антенную решетку, содержащую 8000 элементов, управляемых с помощью схемы фазирования с преобразованием частоты [50].

**Приемники.** Шум и его устранение являются главными условиями, из которых исходят при разработке радиолокационного приемника. Поэтому проектирование приемника наиболее часто базируется на обеспечении максимального ОСШ на выходе его линейной части. Такой подход приводит к построению приемника в виде согласованного фильтра

или коррелятора. В радиолокационных приложениях использовались приемники различных типов, включая супергетеродинные, суперрегеративные и прямого усиления [56]. Наиболее известным и широко используемым типом приемника является супергетеродинный, который оказывается наиболее полезным в тех случаях, когда простота и компактность оказываются особенно важными [50]. Принимаемый сигнал с выхода антенны проходит через циркулятор и усиливается малошумящим усилителем радиочастоты (УРЧ). После УРЧ сигнал поступает на преобразователь частоты, с помощью которого осуществляется перенос спектра сигнала с высокой на более низкую промежуточную частоту (ПЧ). На ПЧ проще обеспечить требуемое усиление и фильтрацию; эти операции выполняются в усилителе ПЧ.

**Обработка сигнала.** Обеспечив в приемнике максимальное ОСШ, необходимо выполнить с помощью соответствующей обработки сигналов следующие операции: 1) обнаружение целей и 2) извлечение информации из принятого сигнала для получения данных о траектории цели (ее положении и скорости). Задача обнаружения сигнала на фоне шумового поля решается на основе теории статистических решений. Аналогичным образом, задача извлечения информации из радиолокационных сигналов может рассматриваться как проблема статистического оценивания параметров. Несмотря на то, что многие методы математической статистики были известны и ранее, их непосредственное применение к задачам обработки радиолокационных сигналов считалось непрактичным и слишком дорогостоящим еще несколько лет назад. Разработка надежных, недорогих цифровых микросхем коренным образом изменила подход к созданию устройств обработки сигналов современных радиолокаторов, в результате чего на практике стали использоваться такие довольно сложные методы обработки, как методы селекции движущихся целей (СДЦ) и методы, основанные на поточном быстром преобразовании Фурье (БПФ) [57]. Благодаря успехам в технологии производства цифровых схем обычными операциями стали: квадратурная обработка сигналов в биполярных видеоканалах; когерентная СДЦ; импульсно-доплеровская обработка; сжатие импульсных сигналов, а также цифровая фильтрация.

Следует иметь в виду, что существующие системы СДЦ, успешно подавляя пассивные помехи (отражения от местности, от облаков и т. д.), одновременно в некоторой степени подавляют и полезные сигналы, а сигналы от некоторых нежелательных движущихся объектов (например, стай птиц и автомобилей) могут проходить на выход таких систем [58]. Была разработана система обнаружения малоразмерных целей на фоне отражений от местности, лишенная указанных недостатков [59].

### 1.5.2. Гидролокационная техника

Среди существующих активных гидролокационных систем можно выделить следующие: 1) с последовательным обзором (прожекторного типа), 2) сканирующие и 3) с параллельным обзором [60]. Гидролокатор с последовательным обзором имеет очень узкие передающую и приемную диаграммы направленности и обладает возможностью производить об-

зор в азимутальной плоскости за счёт механического вращения антенной решетки гидрофонов. Поскольку сканирование и наведение осуществляются механически, то скорость поступления данных невелика и такая система не может обеспечить обнаружение и сопровождение многих целей. Особенности работы, обусловленные механическим способом наведения по углу, налагают ограничения на размеры решетки, в связи с чем рабочие частоты в таких системах обычно превышают 15 кГц, что, в свою очередь, увеличивает потери в среде распространения.

Недостатки гидролокаторов с последовательным обзором преодолеваются в сканирующих гидролокационных системах, в которых излучаются короткие импульсы во всех направлениях и используется электронный способ сканирования узкой приемной диаграммы направленности в секторе  $360^\circ$  по азимуту. Принятые сигналы поступают на панорамный индикатор, который широко используется как в радио-, так и гидролокационных системах. Гидролокационные системы сканирующего типа могут обнаруживать и сопровождать несколько целей; в них могут использоваться низкие рабочие частоты, что, в свою очередь, уменьшает потери в среде распространения. Скорость сканирования приемного луча выбирается так, чтобы обеспечивался компромисс между требуемым разрешением полезных целей и допустимой шириной полосы пропускания приемника (или минимальным ОСШ на входе).

В гидролокационной системе с параллельным обзором используется направленное или ненаправленное излучение, а прием осуществляется несколькими предварительно сформированными диаграммами направленности. Поэтому в таких системах имеется возможность обеспечить одновременно как высокие направленные свойства при излучении, так и сравнительно высокие скорости поступления данных при приеме на низких рабочих частотах. Таким образом, системам с параллельным обзором присущи достоинства гидролокаторов первых двух типов. Приемник гидролокатора с параллельным обзором может иметь более узкую полосу пропускания, чем приемник со сканирующей диаграммой, за счет чего можно повысить ОСШ. К тому же в такой системе можно компенсировать доплеровский сдвиг частоты, обусловленный собственным движением корабля, используя так называемый метод «обнуления собственных доплеровских частот», тогда как в системах сканирующего типа такую коррекцию выполнить нельзя.

Главные элементы гидролокационного приемника показаны на его структурной схеме (рис. 1.4). Ими являются: антенная решетка гидрофонов; диаграммообразующая схема; сигнальный и информационный процессоры. Каждый из этих основных элементов (за исключением информационного процессора, который осуществляет формирование сигналов изображения и другие функции, в том числе и функцию управления) будет поочередно кратко рассмотрены далее.

**Приемопередающие элементы и гидрофоны.** Если чувствительный элемент антенны гидролокатора предназначен лишь для приема акустических сигналов, то он называется гидрофоном. Если же с помощью такого элемента обеспечивается как прием, так и излучение акустических сигналов, то он называется приемопередающим элементом или пре-

образователем. Для гидролокационных применений используется очень широкий диапазон рабочих частот от 10 Гц до 1 МГц и выше [61]. Излучаемая мощность акустических колебаний изменяется в диапазоне от нескольких ватт до нескольких тысяч ватт на глубинах около 6000 м [62].

Основными физическими принципами и эффектами, используемыми при построении преобразователей, являются:

1. Применение подвижной катушки для преобразования энергии. Этот способ давно известен своим применением в динамических громкоговорителях. В гидролокации он широко используется при излучении очень низких частот.

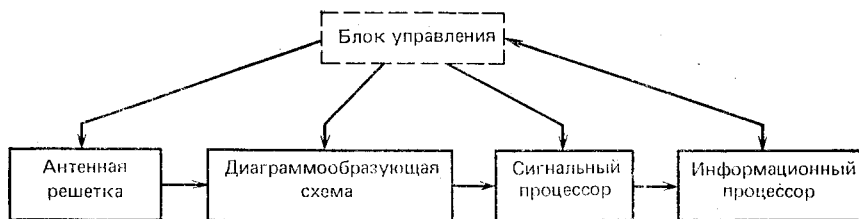


Рис. 1.4. Структурная схема приемника гидролокатора

2. Эффект магнитострикции, проявляющийся в возникновении колебаний магнитных материалов, помещенных в изменяющееся магнитное поле. Магнитострикционные материалы обладают высокой прочностью и хорошо обрабатываются. Преобразователи, построенные на основе магнитострикционных материалов, в больших количествах выпускались и широко применялись в период второй мировой войны.

3. Пьезоэлектрический эффект, характеризующийся появлением механических колебаний специальных материалов, имеющих кристаллическую структуру, когда на них воздействует переменный ток или изменяющееся магнитное поле. Некоторым керамическим материалам также свойствен аналогичный эффект; причем они обладают очень высокими электромеханическими свойствами. Поэтому в течение последнего десятилетия основная масса гидролокационных преобразователей строилась на базе пьезокерамических устройств, работающих в широком диапазоне частот и обладающих как высокой чувствительностью, так и значительным коэффициентом полезного действия.

В некоторых экспериментальных работах использовались преобразователи гидродинамического типа, а также построенные на основе переменного магнитного сопротивления. Однако в гидролокации такие устройства не смогли составить конкуренцию пьезокерамическим преобразователям [61].

**Антенные решетки гидролокаторов.** В настоящее время стали применяться более совершенные антенные решетки преобразователей с управляемыми диаграммами направленности, имеющими низкий уровень боковых лепестков. Существует множество разнообразных типов антенных решеток гидролокаторов: линейные, плоские, цилиндрические,



сферические, конформные, объемные, рефлекторные, а также акустические линзы [63]. Антенные решетки различных типов могут использоваться как буксируемые, так и конформные (когда поверхность решетки повторяет форму подводной части корабля). Такие антенные решетки могут применяться в системах с управляемой диаграммой направленности, в гидролокаторах бокового обзора, а также в системах с синтезированным раскрытием.

Простая плоская антенная решетка размером  $0,6 \times 1,2$  м, имеющая более 500 элементов и предназначенная для работы на больших глубинах, показана на рис. 1.5. В поисках возможностей использования большой мощности и низких рабочих частот (обуславливающих малые потери, связанные с затуханием в среде распространения) были созданы антенные системы, состоящие из нескольких антенных решеток, имеющие очень большие физические размеры (достигающих нескольких длин волн). Одна из таких плоских антенных решеток имела размеры  $10,5 \times 15$  м, массу 150 т, работала на низкой частоте и обладала мощностью излучения около 1 МВт [63]. В настоящее время нет точной теории, описывающей работу излучателей, размеры которых соизмеримы с длиной волны. Было установлено, что в больших антенных решетках со значительным числом близко расположенных элементов образуются участки с аномальным полным сопротивлением. Это явление, обусловленное взаимным влиянием элементов в решетке, многими разработчиками не учитывалось. В связи с этим возникло понятие «управления колебательной скоростью элемента» [64, 65] для предохранения отдельных элементов решетки преобразователей от влияния чрезмерных изменений полного сопротивления.

В современном корабельном гидролокаторе используется обтекатель, расположенный в носовой подводной части корпуса и имеющий обычно сферическую форму, внутри которого помещается цилиндрическая антенная решетка, подобная показанной на рис. 1.6. В этой антенне используются стержневые преобразователи с продольным типом колебаний, состоящие из излучающей передней накладки с малой массой, тяжелой тыльной накладки и расположенного между ними активного пьезокерамического материала в виде колец или дисков [63]. Осевая симметрия цилиндрической антенной решетки позволяет довольно просто управлять диаграммой направленности в азимутальной плоскости. Симметрия решетки дает возможность также использовать однотипное электронное оборудование для выполнения фазирования и задержки при формировании диаграммы направленности в любом азимутальном направлении. Плоские антенные решетки не обладают этим достоинством.

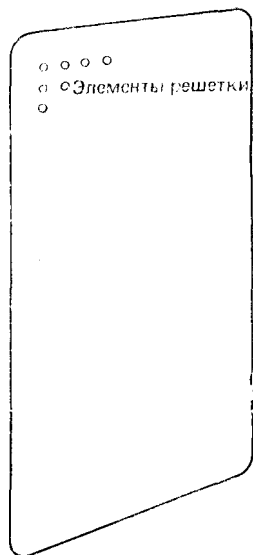


Рис. 1.5. Плоская прямоугольная 500-элементная антенная решетка гидролокатора

вом, так как формирование каждого нового направления в пространстве (по азимуту или по углу места) требует использования другого электронного оборудования.

Рассмотрение свойств симметрии антенной решетки приводит к заключению, что идеальной формой для наибольшего диапазона перекрытия по всем направлениям является сферическая антенная решетка, аналогичная показанной на рис. 1.7, имеющая в диаметре 5 м и содержащая более 1000 приемопередающих элементов. Такая сферическая антенная решетка может быть размещена в носовой части подводной лодки под акустически прозрачным обтекателем, обеспечивающим минимальные искажения диаграммы направленности.

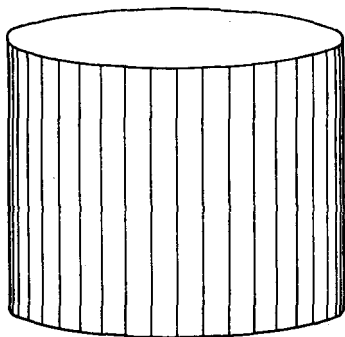


Рис. 1.6. Цилиндрическая антенная решетка гидролокатора, устанавливаемая внутри обтекателя в носовой части корабля

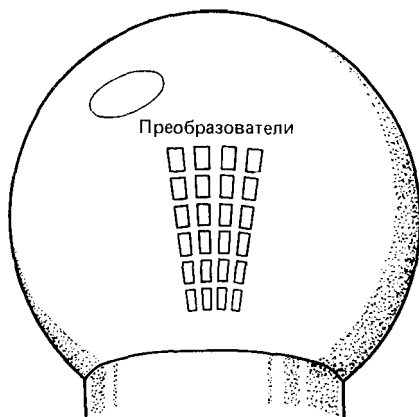


Рис. 1.7. Сферическая антенная решетка диаметром 5 м, содержащая более 1000 преобразователей

**Диаграммообразующая схема.** Быстрый прогресс в физике полупроводников обусловил революционные изменения в радиоэлектронике. Эти достижения позволили создать компактные цифровые ЭВМ, нашедшие применение на подводных лодках и небольших кораблях типа эсминцев. В результате изделия цифровой техники стали применяться для цифрового формирования диаграмм направленности гидролокаторов, а также последующей обработки и распознавания акустических сигналов.

Обычно формирование диаграммы направленности многоэлементной антенной решетки сводится к созданию нескольких лучей с помощью соответствующих задержек и матриц весовых коэффициентов. При этом такие лучи могут быть фиксированными или управляемыми по направлению. Классические гидролокационные системы 50-х и 60-х годов состояли, главным образом, из независимых приемников для каждого преобразователя антенной решетки. Позднее возможности более сложной обработки сигналов многоэлементных антенных решеток с помощью ЭВМ привели к созданию комплексных гидролокационных систем с обработкой данных от нескольких антенных решеток [66, 67]. Для

работы в таких системах требуется универсальная цифровая ЭВМ, являющаяся основой цифровой диаграммообразующей схемы, с помощью которой осуществляется программируемая задержка и формируются матрицы весовых коэффициентов. Несколько таких цифровых программируемых диаграммообразующих схем может использоваться для всех решеток комплексной системы. Кроме того, программируемые матрицы весовых коэффициентов диаграммообразующей схемы позволяют адаптировать приемную диаграмму направленности к изменяющейся структуре маскирующего шумового фона.

**Сигнальный процессор.** Обработка сигнала включает фильтрацию, спектральный анализ, корреляцию и связанные с ними операции сжатия динамического диапазона и нормировки, обеспечивающие «согласование» принятых антенной решеткой сигналов с функциями информационного процессора (рис. 1.4) [60, 68]. За счет сжатия динамического диапазона и нормировки устраняется нежелательное влияние некоторых пространственных и временных характеристик акустического канала. От того, насколько успешно решена эта задача, зависит работа системы в целом.

Современные тенденции в обработке сигналов требуют использования больших программируемых сигнальных процессоров, обладающих высокой надежностью [67]. Одним из основных достоинств применения таких процессоров является возможность построения с их помощью многопроцессорных систем.

## 1.6. ПОСТРОЕНИЕ КНИГИ

*Часть I.* В гл. 2 вводятся основные понятия, относящиеся к работе адаптивной решетки. Сначала рассматриваются условия приема сигналов, при которых можно ожидать улучшения приема полезного сигнала за счет использования адаптивной решетки. Затем анализируются структура решетки и влияние выбора конкретной структуры на достижимую эффективность системы. Показаны потенциальные возможности увеличения выходного ОСШ за счет подстройки весовых коэффициентов в диаграммообразующей схеме решетки.

Для того чтобы охарактеризовать способность адаптивной антенной решетки автоматически реагировать на изменяющиеся условия приема, прежде всего необходимо определить критерий эффективности системы. Этот критерий эффективности является величиной, которая должна максимизироваться (или минимизироваться) при работе адаптивной решетки. В гл. 3 приводятся несколько широко используемых критериев эффективности как для широкополосных, так и для узкополосных сигналов и систем, основанных на функциональной модели адаптивной антенной решетки.

Пределы эффективности любой системы с адаптивной антенной решеткой обусловлены:

- 1) физической структурой решетки;
- 2) условиями приема сигнала.

Указанные факторы влияют на эффективность решетки, достигаемую после завершения автоматического процесса адаптации, протека-

ющего сравнительно продолжительный отрезок времени до достижения установившегося режима. Для каждого критерия эффективности может быть получено аналитическое решение в установившемся режиме применительно к задаче управления адаптивной решеткой, что позволяет разработчику оценить пределы эффективности системы в целом. Приводятся необходимое математическое обоснование аналитических решений в установившемся режиме при различных критериях эффективности и соотношения между полученными результатами и оптимальным винеровским решением.

*Часть II.* Основой системы с адаптивной антенной решеткой, определяющей ее способность к адаптации, является алгоритм адаптивного управления, с помощью которого диаграмма направленности подстраивается в соответствии с информацией о сигнале, получаемой с выходов элементов решетки. Во второй части книги, куда входят гл. 4—10, рассматриваются различные классы алгоритмов адаптации. В некоторых случаях алгоритмы адаптации могут выбираться на основании имеющейся априорной информации. Эта информация может заключаться в том, что:

- 1) принимаемый полезный сигнал известен;
- 2) принимаемый полезный сигнал неизвестен, однако направление его прихода известно;
- 3) принимаемый полезный сигнал и направление его прихода неизвестны, но известен уровень его мощности.

Наконец, возможен случай, когда априорные данные о полезном сигнале отсутствуют, однако необходимая информация приобретается в процессе работы («обучения») адаптивной антенной решеткой. Выбор алгоритма адаптации (или подстройки) оказывает важное влияние на эффективность системы в переходном режиме.

Анализируется сходимость различных алгоритмов адаптации, сравнивается их эффективность и рассматриваются достоинства и недостатки алгоритмов адаптации при определенных условиях работы. Для удобства дается сводка результатов, помогающая разработчику оценить, какой из имеющихся алгоритмов наиболее соответствует конкретным условиям приема сигнала и требованиям, предъявляемым к системе.

*Часть III.* Рассматриваемые до сих пор условия работы адаптивной решетки были неидеальными только в том смысле, что сопровождалась присутствием помех, которые решеткой должны подавляться. В действительности же ряд других факторов зачастую может привести к недопустимому снижению эффективности, если не принять специальных мер. Такими факторами являются: широкополосность обрабатываемых сигналов; эффекты многолучевого распространения; рассогласование в каналах, а также задержка распространения сигнала в решетке. Рассматривается способ, позволяющий ослабить влияние этих факторов с помощью обработки сигналов на основе многоотводных линий задержки, и даются рекомендации по проектированию таких линий, обеспечивающих необходимый уровень компенсации. В заключение обсуждаются направления исследований в данной области и тенденции развития систем с адаптивными антенными решетками.

Итак, рассмотрены основные аргументы в пользу применения систем с адаптивными антенными решетками. Определены главные элементы адаптивной решетки и приведены наиболее важные проблемы, с которыми встречается разработчик таких систем. При создании адаптивной антенной решетки должны учитываться следующие противоречивые требования [69]:

1. Аппаратурная сложность и стоимость.
2. Скорость обработки данных.
3. Максимальная дальность обнаружения (для радио- и гидролокаторов).
4. Разрешающая способность по угловой координате (а также по дальности и доплеровской частоте для радио- и гидролокаторов).
5. Точность измерения дальности, пеленга и доплеровской частоты (для радио- и гидролокаторов).
6. Требования к эффективности системы с адаптивной решеткой в переходном и установившемся режимах.

Поскольку подавление помех с помощью создания нулей диаграммы в направлении их источников в настоящее время считается одним из принципиальных достоинств адаптивных решеток, то имеет смысл рассмотреть показатели эффективности таких систем, обеспечиваемые с помощью современной техники.

Подоптимальный процессор гидролокационной системы с антенной решеткой, известный под названием DICANNE, применялся при испытаниях для борьбы с помехами, создаваемыми кораблями, и формировал нули диаграммы направленности глубиной 10—15 дБ [60]. Использование оптимального широкополосного процессора, принцип действия которого основан на критерии минимума искажений полезного сигнала, при моделировании на ЭВМ работы гидролокатора обеспечивало эффективное подавление сильного когерентного помехового сигнала за счет формирования нулей диаграммы глубиной 50 дБ [60]. Оказалось, что эффективность подавления помех сильно зависит: 1) от изменений углового положения источника помехи относительно решетки, 2) от незначительных погрешностей адаптивных весовых коэффициентов и 3) от случайных флуктуаций оценки корреляции за счет конечного времени интегрирования.

В работе [70] описана малогабаритная (массой примерно 0,4 кг) четырехэлементная адаптивная антенная решетка, построенная на гибридных интегральных микросхемах СВЧ диапазона и предназначенная для работы в системах радиосвязи. В этой адаптивной решетке использовался алгоритм управления нулями диаграммы направленности, предназначенный для когерентного подавления помехи, действующей по боковым лепесткам, на 25—30 дБ в широком диапазоне частот (60—100 МГц) при слабом полезном сигнале и сильной помехе. Для достижения такой высокой степени подавления помехи требовалось очень хорошее согласование характеристик элементов в каналах (в пределах 20% полосы частот).

Была также испытана и другая четырехэлементная экспериментальная система с адаптивной решеткой, предназначенная для подавления помех в системах связи [44]. Если угловое рассогласование между источниками полезного сигнала и помехи достаточно велико (превышает угловую разрешающую способность антенной решетки), то нетрудно сформировать нули глубиной 10—20 дБ в частотном диапазоне 200—400 МГц. При этом предполагается, что рассматриваемая система не обладает способностью распознавания сигналов по их поляризации. В том случае, когда поляризация полезного сигнала и помехи различна и антенная решетка позволяет выявить эти различия, можно обеспечить подавление помехи и улучшить эффективность приема полезного сигнала, даже при одинаковом угловом направлении их излучения. Еще одна система с цифровым управлением была разработана для применения в СВЧ каналах радиосвязи и обеспечивала подавление помех на 20—32 дБ [71].

Таким образом, на практике обеспечивается надежное подавление помех на 10—20 дБ. Более трудной, но тем не менее практически осуществимой задачей является достижение подавления на 20—35 дБ и, как правило, в реальных системах невозможно добиться подавления помехи более 35 дБ.

В настоящее время наибольшее влияние на развитие систем приема сигналов оказывает быстрый прогресс в области цифровой техники. Всеобъемлющее использование цифровой техники при обработке полезных сигналов и их распознавании позволяет реализовать на практике вытекающие из теории потенциальные возможности систем. Применение цифровых процессоров и устройств памяти позволило осуществлять с высокой скоростью обработку (корреляцию и классификацию) данных, получаемых при обзоре больших объемов пространства, что явилось основой новых методов обзора. Первоначально в адаптивных антенных решетках использовалось ограниченное число элементов. В дальнейшем при увеличении числа элементов и сложности обработки, вероятно, произойдет слияние методов этой обработки с методами оптической и акустической голографии [68, 72]. Со своей стороны, голографические методы приближаются к методам обработки сигналов в антенных решетках, так как в них наблюдается постепенный переход от бесконечной непрерывной совокупности данных (как в оптической голографии) к конечному числу выборочных отсчетов (как в случае акустической голографии).

## ЗАДАЧИ

1. Предположим, что необходимо выбрать параметры сигнала импульсного радиолокатора, обеспечивающего разрешение двух шариков для игры в пинг-понг, находящихся на расстоянии 6,3 см друг от друга и на расстоянии до 10 м от антенны.

А. Какова должна быть частота повторения импульсов?

Б. Какой должна быть ширина полосы пропускания приемного канала радиолокатора?

В. Какое значение частоты несущей радиопередатчика должно быть выбрано в системе, если желательно сохранить неизменным межэлементное расстояние в решетке  $d = 2$  см (где  $d = \lambda_0/2$ )?

2. При разработке реальной гидролокаторной системы должны быть учтены многие факторы: все параметры гидролокатора (излучаемая мощность, отражающие свойства цели и т. д.) и характеристики среды распространения. Влияние характеристик в основном зависит от рабочей частоты. Сильно упрощая ситуацию, будем считать, что единственными факторами, влияющими на эффективность приема сигнала, являются затухание сигнала при распространении в среде и шум. Пусть коэффициент затухания  $\alpha$  определяется выражением

$$\lg(\alpha) = \frac{1}{4} [-21 + 5 \lg(f)].$$

Кроме того, пусть спектральная плотность шума  $N_0$  определяется формулой

$$10 \lg(N_0) = \frac{1}{3} [20 - 50 \lg(f)].$$

Какое значение частоты несущей радиоимпульса необходимо выбрать для оптимизации системы, если критерием эффективности является величина  $J = C_1 \alpha + C_2 N_0$  (где  $C_1$  и  $C_2$  — относительные стоимости указанных факторов)?

## Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Для того чтобы понять суть потенциальных возможностей повышения эффективности приема сигналов антенной решеткой в присутствии помех, создаваемых несколькими источниками, а также способ реализации этих возможностей, необходимо рассмотреть природу принимаемых сигналов и свойства самой решетки. К тому же характеристики элементов решетки и их расположение непосредственно влияют на эффективность работы адаптивной системы с решеткой. Поэтому сначала в данной главе рассматриваются характеристики сигналов и помех, а также эффекты, связанные с условиями распространения сигналов. Затем рассматриваются основные свойства антенных решеток и показываются возможности подстройки их диаграмм направленности с целью улучшения приема полезного сигнала. Приводятся компромиссные рекомендации по определению наиболее экономичной конфигурации линейных и плоских решеток.

При разработке адаптивной антенной решетки необходимо учитывать ограничения, накладываемые ее свойствами и свойствами других элементов, входящих в систему, на систему, а также требования, которым должна удовлетворять проектируемая адаптивная система в целом. Требования, предъявляемые к системе с адаптивной решеткой, зависят от способа формирования весовых коэффициентов и формируются отдельно 1) для установившегося и 2) для переходного режимов. В первом случае предполагается, что условия приема сигнала стационарны и весовые коэффициенты достигают значений, соответствующих установившемуся режиму; во втором — весовые коэффициенты подстраиваются в соответствии с изменением условий приема сигнала. Поскольку предъявляемые к системе требования должны быть реальными, они не должны превосходить потенциально возможных пределов эффективности. В этой главе анализируются ограничения, обусловленные антенной решеткой. Пределы эффективности в установившемся режиме рассматриваются в гл. 3. Во второй части книги дается опреде-

ление пределов эффективности в переходном режиме. Для анализа пределов эффективности систем с адаптивными решетками необходимо разработать их общую аналитическую модель. Получение такой модели связано с параметрами сигнала и последующей обработкой, необходимой для получения требуемых выходных характеристик системы.

## 2.1. УСЛОВИЯ ПРИЕМА СИГНАЛА

Здесь рассматривается общая проблема обработки данных, поступающих из антенной решетки, с целью повышения общей эффективности приема полезного сигнала. Разработчик решетки должен использовать существенные различия параметров полезного сигнала и помехи для того, чтобы реализовать потенциальные возможности системы. Важными в этом смысле параметрами сигнала являются: направления прихода, амплитуда, фаза, а также спектральные, модуляционные и поляризационные характеристики. Поэтому имеет смысл рассмотреть различные характеристики полезного сигнала и помех.

### 2.1.1. Сигналы в активных и пассивных системах

Активные системы, такие как радио- и гидролокационные, генерируют импульс (пакет импульсов), распространяющийся через среду и отражающийся некоторой частью в обратном (к источнику излучения) направлении. Особенностью таких систем является то, что в течение большей части времени приема полезный сигнал отсутствует (в отличие от систем связи), хотя его параметры и направление прихода известны, так что распознать полезный сигнал при его поступлении довольно просто. В дополнение к полезному отраженному сигналу могут присутствовать также сигналы, обусловленные отражениями от местных предметов и многолучевым характером распространения [1]. В радиолокационных системах диффузное рассеяние при многолучевом распространении может привести к появлению ложных сигналов, а передатчик помех может преднамеренно генерировать мешающий сигнал. Применительно к активным гидролокационным системам двумя основными типами помех являются шум окружающей среды и шум реверберации [2].

Реверберация аналогична отражению от местных предметов в радиолокационных системах и обусловленный ею шум может рассматриваться как шум, порожденный самим сигналом и образующийся при взаимодействии излученного сигнала с различными диффузно рассеивающими акустическую энергию объектами. Реверберационные сигналы классифицируются как поверхностные, донные и объемные в зависимости от того, где они образуются. Кроме того, сигналы многолучевого распространения могут возникать за счет сигналов, отраженных недиффузно рассеивающими отражателями. Другими причинами, обуславливающими искажения гидролокационного сигнала и связанными с распространением, являются: затухание, множественность путей распространения энергии, доплеровский сдвиг частоты и др. [3].

В пассивных приемных системах полезный сигнал генерируется самой целью и во многих случаях может присутствовать в течение боль-



шей части времени приема. Основной проблемой для пассивной системы является различение полезного сигнала цели на фоне шума [4]. В противоположность активным системам направление прихода полезного сигнала в пассивных системах может быть неизвестно и сам полезный сигнал следует считать в некотором смысле неизвестным. Широко распространенный метод различения полезного сигнала от помех основан на знании диапазона частот сигнала. В некоторых случаях уровень мощности полезного сигнала может быть известен и может служить в качестве информативного параметра для различения. В системах радиосвязи с использованием широкополосных сигналов обычно применяется псевдослучимый код для модуляции излучаемого сигнала; этот же код затем служит для различения полезного сигнала.

### 2.1.2. Модели сигнала

В пассивной гидролокационной системе сигнал от цели может создаваться различными источниками, такими как шум двигателя или шум гребного винта [5]. Следовательно, источник сигнала по своей природе имеет случайный характер. Аналогично при приеме неизвестного сигнала в системе связи источник такого сигнала может рассматриваться как случайный. Тепловой шум антенного датчика, шум окружающей среды и источники сигналов помех по своей природе также являются случайными. Эти шумы, как правило, образуются в результате совместного действия многих независимых источников. Поэтому на основании центральной предельной теоремы [6] можно получить модель результирующего шумового сигнала в виде гауссовского (и обычно стационарного) случайного процесса. Довольно часто физическая природа явления обуславливает случайный характер рассматриваемых сигналов и дает основание считать их гауссовскими случайными процессами. Гауссовская модель сигнала удобна тем, что первый и второй моменты дают полное описание такой модели.

В других случаях, представляющих интерес, может оказаться затруднительным приписать какие-либо статистические свойства сигналу и считать его случайным. Тогда ставится задача разработки процессора антенной решетки, оптимального для неслучайного сигнала. При этом во многих случаях могут быть достигнуты довольно хорошие результаты при использовании вместо полезного сигнала некоторого опорного сигнала, даже когда такой опорный сигнал не является точной копией полезного (лишь бы опорный сигнал был сильно коррелирован с полезным сигналом и некоррелирован с помехами). В этих ситуациях приемлема модель неслучайного сигнала.

Иногда полезный сигнал может быть известен полностью, как в случае когерентного радиолокатора и цели, расположенной на известной дальности и обладающей известными характеристиками. В других случаях параметры полезного сигнала могут быть известны за исключением некоторых, таких как амплитуда и фаза. Прием сигнала, известного с точностью до фазы, характерен для обычного импульсного радиолокатора, когда дальность до цели и ее характеристики известны. Другой характерный случай, когда сигнал известен с точностью до амплитуды

и фазы, встречается при работе аналогичного импульсного радиолокатора и цели, обладающей известными характеристиками, но расположенной на неизвестной дальности. Сигналы в системах связи обычно имеют известные частотные характеристики, и информация о них может быть получена с помощью пилот-сигнала.

Приемная  $N$ -элементная антенная решетка формирует на выходе каждого из  $N$  элементов сигналы  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ . Эти выходные сигналы удобно представлять в виде вектора принятого сигнала

$$\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \quad \text{для } 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

где  $[0, T]$  — интервал наблюдения. Составляющую полезного сигнала в векторе принятого сигнала можно обозначить через  $\mathbf{s}(t)$ , а составляющую шума — через  $\mathbf{n}(t)$ . Поэтому при наличии полезного сигнала вектор принятого сигнала можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

Вектор как случайного, так и неслучайного полезного сигналов можно представить как

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_N(t) \end{bmatrix} \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

где отдельные составляющие сигнала могут быть известны либо полностью, либо приближенно, либо только в статистическом смысле.

Шумовые поля помех в лучшем случае являются стационарными и неизвестными, однако их характеристики обычно изменяются во времени. Адаптивные процессоры антенных решеток, автоматически реагирующие на изменения помеховой ситуации, должны отслеживать такие изменения. Существующие методы адаптивной обработки основаны на предположении о том, что шумовое поле окружающей среды является гауссовским и его характеристики медленно изменяются во времени. Адаптивные процессоры, разработанные для гауссовского шума, характерны тем, что их свойства зависят только от вторых моментов распределения шума. Поэтому, когда необходимо иметь дело с негауссовскими полями шума, наиболее удобным подходом к решению проблемы является разработка подоптимальной адаптивной системы, основанной на использовании информации о моментах второго порядка.

В общем случае, чем медленнее изменяются характеристики поля шума, тем выше результирующая эффективность адаптивной системы. В настоящее время считается, что изменения характеристик реверберационного поля, связанного с движением платформы гидролокатора, оказываются слишком быстрыми и не могут быть отслежены с помощью

существующих адаптивных методов. В то же время при неподвижной платформе гидролокатора вариации поля реверберации становятся достаточно медленными и могут быть обработаны адаптивными методами [7].

### 2.1.3. Модель идеального распространения сигналов

Для сигнала обычно считается, что вектор сигнала  $s(t)$ , создаваемого точечным источником, связан со скалярным сигналом  $s(t)$ , характеризующим поле, соотношением вида [8]

$$s(t) = \int m(t - \tau) s(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где  $i$ -я составляющая  $m_i(t)$  вектора  $m(t)$  характеризует эффекты распространения энергии от источника до  $i$ -го элемента антенны, а также свойства самого элемента. В идеальном случае недисперсного распространения и неискажающих элементов приемной антенны  $m_i(t) = \delta(t - \tau_i)$  характеризует просто время запаздывания или задержку. При этом составляющие полезного сигнала на выходе каждого элемента совпадают по форме и отличаются лишь задержкой и выражение (2.4) можно записать в виде

$$s(t) = \begin{bmatrix} s(t - \tau_1) \\ s(t - \tau_2) \\ \vdots \\ s(t - \tau_N) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Для практики большой интерес представляет случай, когда полезный сигнал распространяется в виде плоской волны, поступающей с направления, определяемого единичным вектором  $\alpha$ , как показано на рис. 2.1.

В этом случае времена задержки сигнала для отдельных элементов антенны будут равны [7]

$$\tau_i = \alpha \cdot \mathbf{r}_i / v, \quad (2.6)$$

где  $v$  — скорость распространения. Координата каждого элемента определяется вектором  $\mathbf{r}_i$ ;  $\alpha \cdot \mathbf{r}_i$  обозначает скалярное произведение

$$\alpha \cdot \mathbf{r}_i \triangleq \alpha^T \mathbf{r}_i, \quad (2.7)$$

а  $T$  — операцию транспонирования.

Измеряя относительное время задержки для каждого элемента антенны, можно определить заранее неизвестное направление прихода

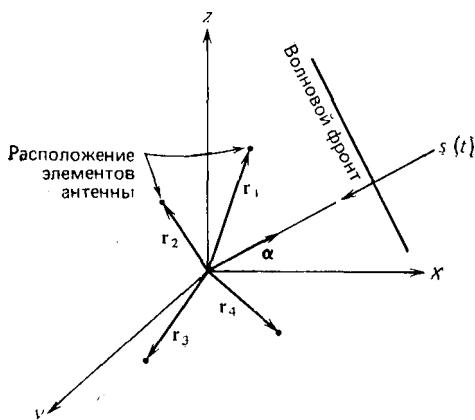


Рис. 2.1. Геометрические соотношения для трехмерной антенной решетки при плоском волновом фронте сигнала

полезного сигнала  $s(t)$ . В следующих разделах, посвященных свойствам антенных решеток, показано, что описанные эффекты распространения плоской волны оказывают решающее влияние на характеристики антенных решеток. Следует отметить также, что соотношения (2.5) и (2.6) справедливы как для неслучайных, так и для случайных сигналов, распространяющихся в виде плоских волн.

## 2.2. РАСПОЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

Ранее отмечалось, что при использовании антенной решетки можно преодолеть ограничения, свойственные одноэлементным антеннам, а также осуществлять изменение формы диаграммы направленности. Для иллюстрации указанных возможностей сначала будут рассмотрены характеристики двухэлементной антенной решетки, затем свойства эквидистантной линейной решетки и в заключение будет дан анализ плоской двумерной решетки. После рассмотрения влияния расположения элементов решетки на ее характеристики, будет исследовано влияние выбора конфигурации решетки на ее эффективность. Расположение элементов в решетке определяет ее разрешающую способность и неоднозначность определения угловых координат [9]. В общем случае разрешающая способность возрастает с ростом размеров решетки (или расстояний между элементами). За счет высокой разрешающей способности антенной решетки увеличивается выходное ОСШ, даже когда угловое разнесение источников полезного сигнала и помехи невелико. Высокая разрешающая способность сопровождается появлением глубоких нулей в диаграмме направленности, однако при этом одновременно уменьшается возможность подавления помех групповых источников за счет создания относительно широких «нулевых зон» в диаграмме. Линейная  $N$ -элементная антенная решетка обладает  $N - 1$  степенями свободы, и поэтому с помощью такой решетки могут быть сформированы  $N - 1$  независимо управляемых нулей диаграммы направленности.

### 2.2.1. Характеристики двухэлементной антенной решетки

Рассмотрим два идентичных ненаправленных элемента антенной решетки, расположенные на расстоянии  $d$  друг от друга, как показано на рис. 2.2. Предположим, что источник сигнала  $x(t)$  располагается под углом  $\theta$  относительно нормали к оси решетки. Из рис. 2.2 видно, что фронт плоской волны приходит ко второму элементу с временем задержки относительно первого, равным

$$\tau = (d \sin \theta)/v. \quad (2.8)$$

Будем считать, что выходной сигнал антенной решетки  $y(t)$  равен сумме сигналов от обоих элементов, т. е.

$$y(t) = x(t) + x(t - \tau). \quad (2.9)$$

При узкополосном сигнале  $x(t)$  с центральной частотой спектра  $f_0$  время задержки  $\tau$  сводится к фазовому сдвигу  $2\pi (d/\lambda_0) \sin \theta$ , где  $\lambda_0$  — длина волны, соответствующая частоте  $f_0$ :

$$\lambda_0 = v/f_0. \quad (2.10)$$

Тогда результирующий выходной сигнал решетки может быть получен в виде суммы сигналов от каждого элемента с учетом фазового сдвига, т. е. векторной суммы

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 x(t) e^{j(i-1)\psi}, \quad (2.11)$$

где

$$\psi = 2\pi (d/\lambda_0) \sin \theta. \quad (2.12)$$

Диаграмма направленности решетки определяется соотношением

$$A(\theta) = \sum_{i=1}^2 e^{j(i-1)\psi}. \quad (2.13)$$

Нормированная диаграмма направленности двухэлементной решетки, измеряемая в децибелах, определяется как

$$G(\theta) [\text{дБ}] = 10 \lg \{|A(\theta)|^2/4\}. \quad (2.14)$$

График  $G(\theta)$  для двухэлементной решетки показан на рис. 2.3 при отношениях  $d/\lambda_0 = 0,5; 1,0; 1,5$ . Из рис. 2.3, а видно, что при  $d/\lambda_0 = 0,5$  диаграмма направленности имеет один основной (или главный) лепесток

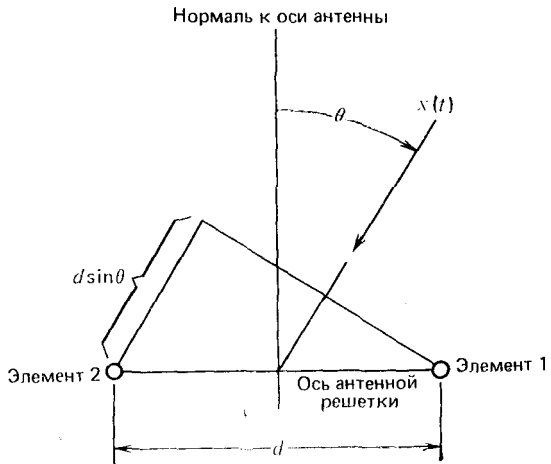


Рис. 2.2. Антенная решетка, состоящая из двух ненаправленных элементов

ток шириной  $60^\circ$  по уровню 3 дБ и нули при  $\theta = \pm 90^\circ$ . Образование нулей при  $\theta = \pm 90^\circ$  происходит потому, что фронт падающей волны проходит между элементами решетки расстояние, равное точно  $\lambda_0/2$ , что соответствует сдвигу по фазе  $\psi = 180^\circ$ , при котором, как видно из (2.11), происходит полное подавление сигнала на выходе. Если же расстояние  $d$  между элементами решетки меньше  $\lambda_0/2$ , то полного подавления

ния сигнала при  $\theta = \pm 90^\circ$  не происходит, и в пределе при  $d \rightarrow 0$  (без учета эффектов взаимной связи между элементами решетки) диаграмма становится ненаправленной, как у одиночного элемента. Известно, что различие между диаграммами направленности одного и двух близко расположенных (менее, чем на  $\lambda_0/4$ ) элементов невелико. Поэтому решетки, содержащие много близко расположенных элементов,

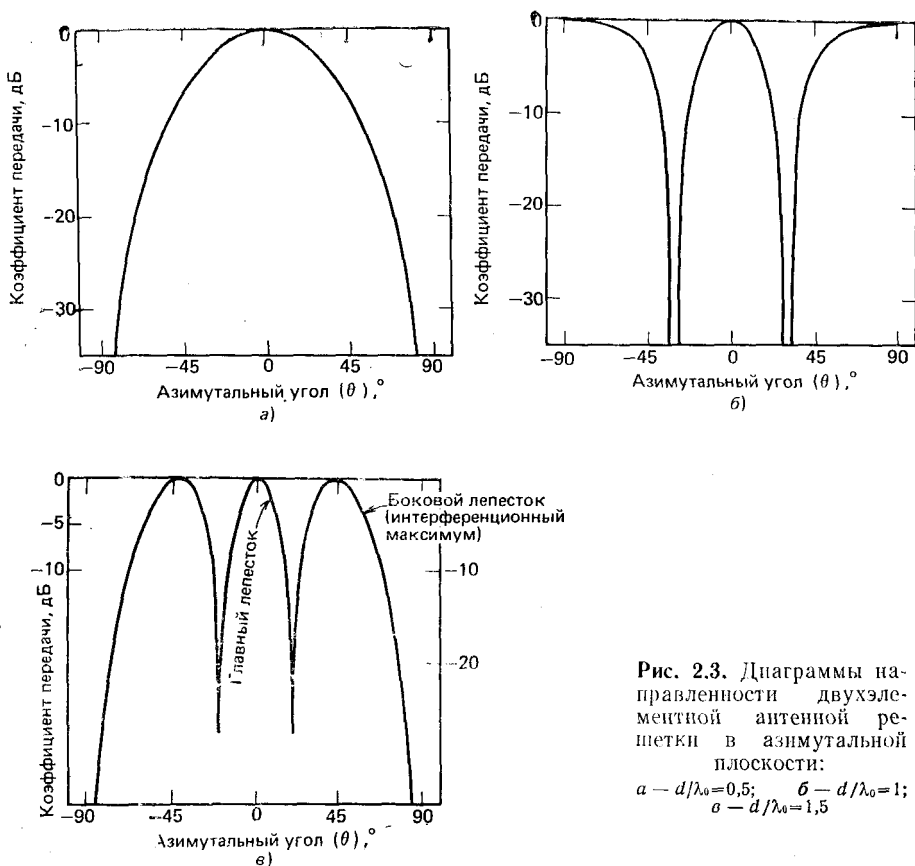


Рис. 2.3. Диаграммы направленности двухэлементной антенной решетки в азимутальной плоскости:

а —  $d/\lambda_0 = 0,5$ ; б —  $d/\lambda_0 = 1$ ;  
в —  $d/\lambda_0 = 1,5$

считаются «неэффективными» в том смысле, что они содержат гораздо большее число элементов, чем это необходимо для формирования заданного уровня боковых лепестков и ширины диаграммы направленности. Если расстояние между элементами решетки выбрать больше  $0,5 \lambda_0$ , то нули диаграммы направленности переместятся из положений  $\theta = \pm 90^\circ$  при  $d = 0,5 \lambda_0$  в положения  $\theta = \pm 30^\circ$  при  $d = \lambda_0$ , как показано на рис. 2.3, б. Появление нулей при  $\theta = \pm 30^\circ$  на рис. 2.3, б объясняется тем, что фазовый сдвиг между сигналами от первого и второго элементов вновь равен  $180^\circ$ , что, в свою очередь, приводит к полному подавлению сигнала на выходе. Кроме главного лепестка при  $\theta = 0$  образуются два боковых при  $\theta = \pm 90^\circ$ , имеющие такие же амплитуды,

как и главный; в максимумах боковых лепестков фазовый сдвиг между выходными сигналами элементов равен  $360^\circ$ . При увеличении расстояния между элементами до величины  $1,5 \lambda_0$  ширина главного лепестка уменьшается, наблюдается смещение нулей главного лепестка и появление двух новых нулей у боковых лепестков при  $\theta = \pm 90^\circ$ , как показано на рис. 2.3, в. Дальнейшее увеличение межэлементного расстояния  $d$  приводит к появлению дополнительных нулей, возникновению боковых лепестков и уменьшению ширины главного лепестка диаграммы направленности.

## 2.2.2. Линейные антенные решетки

Сигнал на выходе линейной эквидистантной  $N$ -элементной антенной решетки можно представить аналогично (2.11) в виде векторной суммы его составляющих от отдельных элементов:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N x(t) e^{j(i-1)\psi}. \quad (2.15)$$

Тогда диаграмма направленности (множитель решетки) в плоскости, содержащей решетку, может быть определена выражением

$$A(\theta) = \sum_{i=1}^N e^{j(i-1)\psi}, \quad (2.16)$$

а нормированная диаграмма направленности — соответственно выражением вида

$$G(\theta) = 10 \lg \{|A(\theta)|^2/N^2\}. \quad (2.17)$$

Если элементы решетки обладают направленными свойствами, то в формулу (2.16) необходимо ввести дополнительный множитель  $F(f_0, \theta)$  — диаграмму направленности элементов [9]. Таким образом, диаграмма направленности антенной решетки, состоящей из идентичных элементов, может быть найдена следующим образом: 1) заменой каждого элемента исходной решетки ненаправленным элементом (в той же точке), 2) определением диаграммы направленности решетки, состоящей из ненаправленных элементов, и 3) умножением диаграммы направленности, полученной в п. 2, на диаграмму направленности отдельных элементов исходной решетки. Векторная сумма, соответствующая (2.16), имеет максимальное значение при  $\sin \theta = 0$  или  $\theta = k2\pi$ , когда все комплексные векторы параллельны друг другу. Эта сумма будет равна нулю при

$$2\pi (d/\lambda_0) \sin \theta = 2\pi/N, \quad (2.18)$$

что соответствует направлению  $\theta_1$ , определяемому выражением

$$\sin \theta_1 = (\lambda_0/d)/N. \quad (2.19)$$

Обозначив через  $L = (N - 1)d$  длину антенной решетки, можно (2.19) переписать в виде

$$\theta_1 = \arcsin \left( \frac{\lambda_0}{L+d} \right). \quad (2.20)$$

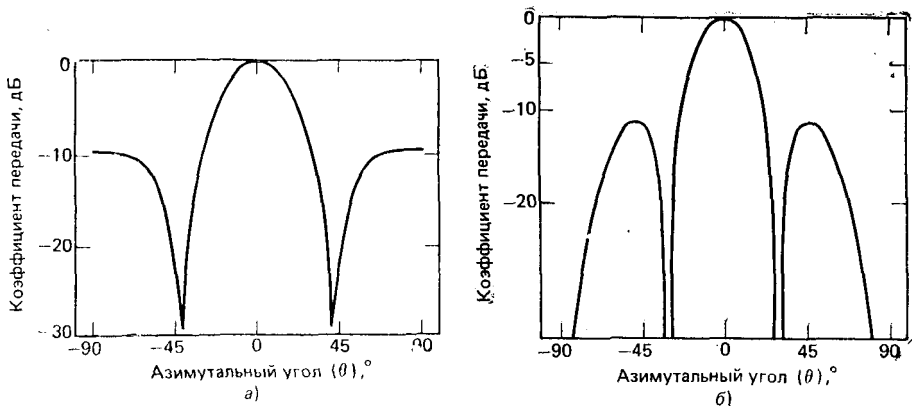
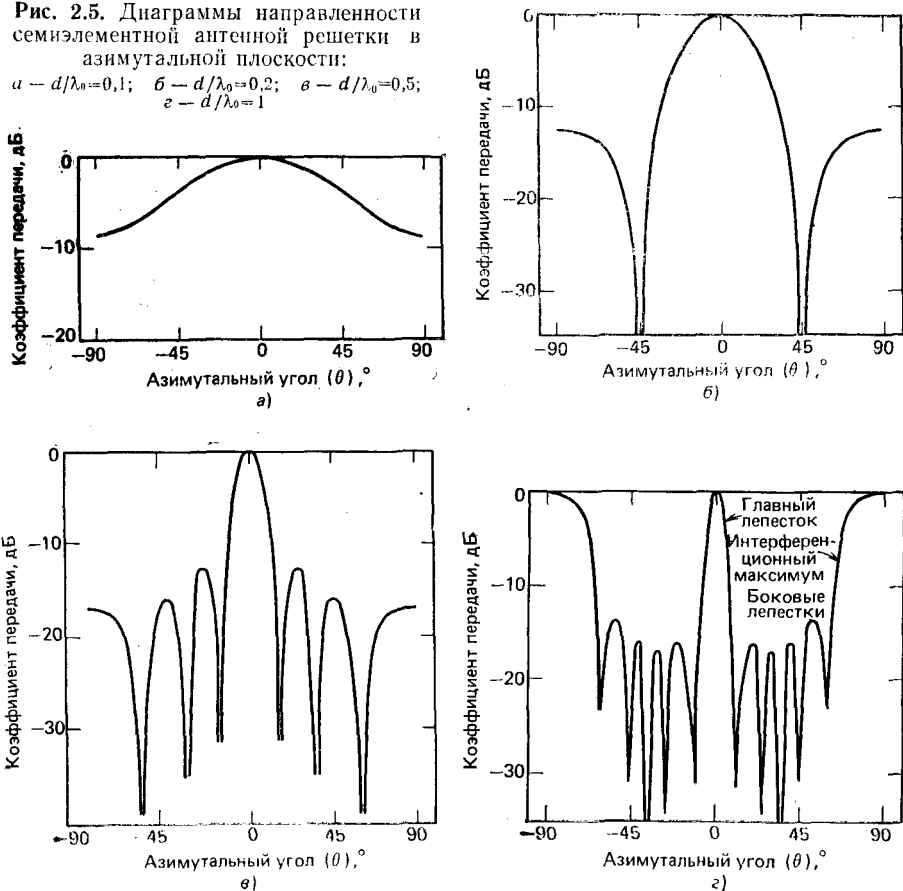


Рис. 2.4. Диаграммы направленности линейных антенных решеток в азимутальной плоскости при  $d/\lambda_0=0,5$ :

*a* — трехэлементная решетка; *б* — четырехэлементная решетка

Рис. 2.5. Диаграммы направленности семиэлементной антенной решетки в азимутальной плоскости:

*a* —  $d/\lambda_0=0,1$ ; *б* —  $d/\lambda_0=0,2$ ; *в* —  $d/\lambda_0=0,5$ ;  
*г* —  $d/\lambda_0=1$





Нормированные диаграммы направленности (2.17) антенных решеток с тремя и четырьмя идентичными ненаправленными элементами при  $d/\lambda_0 = 0,5$  представлены на рис. 2.4. Как видно из рис. 2.4, с увеличением числа элементов решетки ширина главного лепестка диаграммы уменьшается, а число боковых лепестков и нулей растет.

Для иллюстрации влияния на форму диаграммы направленности линейной антенной решетки расположения ее элементов на рис. 2.5, *a* — *г* показаны диаграммы направленности семиэлементной решетки

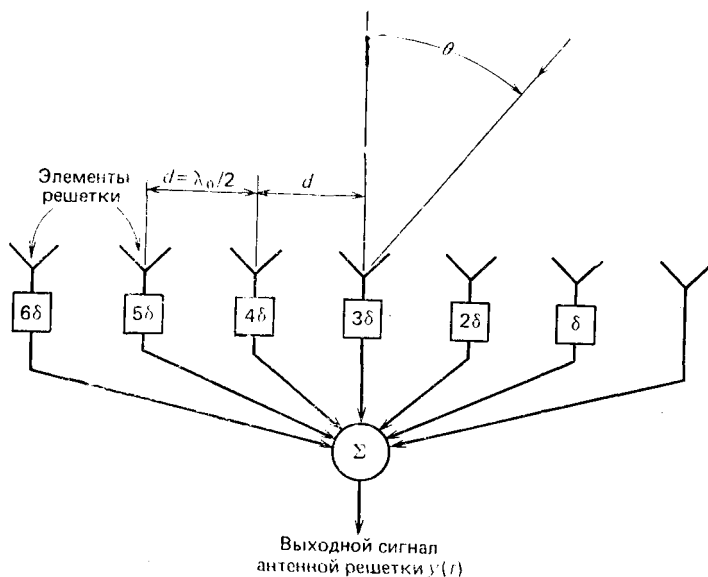


рис. 2.6. Линейная семиэлементная антенная решетка с фазовым управлением диаграммы направленности

в азимутальной плоскости при изменении отношения  $d/\lambda_0$  в диапазоне от 0,1 до 1,0. Для отношений  $d/\lambda_0$ , меньших 1/7, диаграммы направленности не имеют явно выраженных нулей. Для  $d/\lambda_0 = 0,1$  такие нули глубиной — 8,5 дБ появляются при  $\theta = \pm 90^\circ$ , как показано на рис.2.5, *a*. Когда межэлементное расстояние увеличивается и  $d/\lambda_0$  становится больше 1/7, начинают появляться нули и боковые лепестки диаграммы направленности. Дальнейшее увеличение  $d/\lambda_0$  приводит к еще большему росту числа лепестков и нулей диаграммы направленности, которая приобретает форму, характерную для интерферометра. Когда отношение  $d/\lambda_0 = 1$ , боковые лепестки с максимумами при  $\theta = \pm 90^\circ$  характеризуются таким же усилением, что и главный лепесток, поскольку все семь комплексных векторов сигнала параллельны друг другу и суммируются когерентно.

Предположим, что в линейной антенной решетке (рис. 2.6) суммирование сигналов с выходов элементов осуществляется с фазовыми сдвигами (эквивалентными временами задержки):  $\delta$  — во втором элементе,

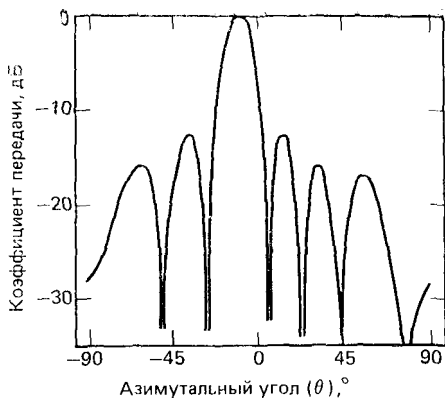


Рис. 2.7. Диаграмма направленности семиэлементной антенной решетки в азимутальной плоскости при  $d/\lambda_0 = 0,5$  и  $\delta = 30^\circ$

$2\delta$  — в третьем,  $(n - 1)\delta$  — в  $n$ -м элементе. Введение таких фазовых сдвигов приводит к перемещению главного лепестка на угол

$$\theta = \arcsin \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_0}{d} \right) \delta \right]. \quad (2.21)$$

Таким образом, изменяя эти фазовые сдвиги, можно управлять диаграммой направленности. Смещение диаграммы направленности при введении фазового сдвига  $\delta = 30^\circ$  можно увидеть, сравнивая рис. 2.7 и 2.5 ( $d/\lambda_0 = 0,5$ ).

### 2.2.3. Плоские антенные решетки

Рассмотрим плоскую прямоугольную антенную решетку, элементы которой расположены в плоскости  $x - y$ , причем начало координат совпадает с центральным элементом, как показано на рис. 2.8. В направлении оси  $x$  решетка имеет  $N_x$  элементов, расположенных параллельными столбцами на расстоянии  $d_x$  друг от друга. В направлении

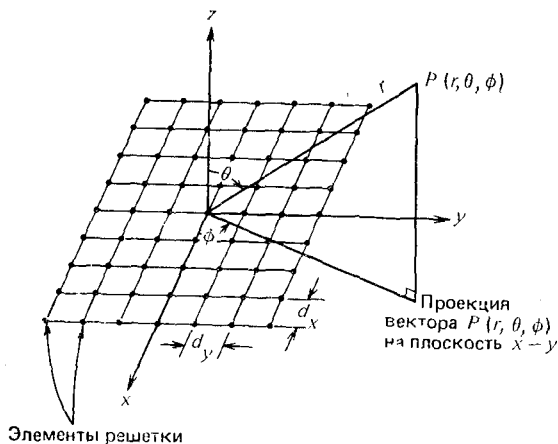


Рис. 2.8. Плоская антенная решетка прямоугольной формы

оси  $y$  размещены  $N_y$  элементов в виде параллельных строк с расстоянием  $d_y$ . Общее число элементов решетки равно произведению  $N_x N_y$ .

Векторная сумма составляющих сигналов от элементов каждого отдельного столбца такой решетки, очевидно, равна соответствующей сумме сигналов линейной решетки и определяется выражением

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N_x} x(t) e^{j(i-1)\psi_x}, \quad (2.22)$$

где теперь

$$\psi_x = 2\pi \left( \frac{d_x}{\lambda_0} \right) \sin \theta \cos \varphi, \quad \psi_y = 2\pi \left( \frac{d_y}{\lambda_0} \right) \sin \theta \sin \varphi. \quad (2.23)$$

Нетрудно видеть, что выходной сигнал плоской решетки зависит от азимута  $\varphi$  и угла места  $\theta$  источника сигнала. Результирующая векторная сумма составляющих сигналов для всех элементов решетки

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} x(t) e^{j(i-1)\psi_x} e^{j(k-1)\psi_y}. \quad (2.24)$$

Поэтому выражение для диаграммы направленности плоской решетки может быть представлено в виде

$$A(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} e^{j(i-1)\psi_x} e^{j(k-1)\psi_y} = A_x(\theta, \varphi) A_y(\theta, \varphi), \quad (2.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_x(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_x} e^{j(i-1)\psi_x}, \\ A_y(\theta, \varphi) &= \sum_{k=1}^{N_y} e^{j(k-1)\psi_y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Из (2.25) следует, что диаграмма направленности плоской антенной решетки является произведением диаграмм направленности двух линейных антенных решеток, элементы которых размещены вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ . Поэтому требования к выбору межэлементных расстояний  $d_x$  и  $d_y$  в данном случае сохраняются теми же, что и в линейных решетках.

Как и в линейных решетках, в плоской антенной решетке можно управлять диаграммами направленности  $A_x(\theta, \varphi)$  и  $A_y(\theta, \varphi)$ , создавая соответствующие фазовые сдвиги сигналов для элементов в столбцах и строках. При практическом применении плоской антенной решетки обычно требуется, чтобы главные лучи  $A_x(\theta, \varphi)$  и  $A_y(\theta, \varphi)$  пересекались, хотя безусловно есть возможность создания таких фазовых сдвигов, когда главные лучи не пересекаются. Основное достоинство плоской антенной решетки заключается в возможности создания управляемых лучей конической формы. Такой решеткой формируются два

остронаправленных луча, один из которых направлен вверх, а другой вниз относительно ее плоскости. Нижний луч можно устранить либо при соответствующем выборе диаграммы направленности элементов, либо при использовании рефлектора.

Наряду с прямоугольными антенными решетками используются также решетки кольцевой и эллиптической формы, обладающие определенными достоинствами. Детальный анализ и синтез плоских антенных решеток выходит за рамки данной книги, поэтому читателям, интересующимся этими вопросами, следует обратиться к книге [10].

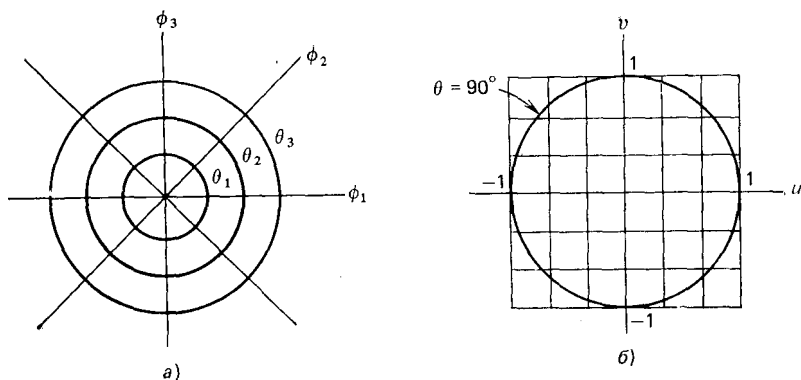


Рис. 2.9. Способы графического представления двумерных диаграмм направленности антенной решетки:

*a* — в полярных координатах; *б* — в прямоугольных координатах

Из предыдущего ясно, что такие характеристики плоской антенной решетки, как ширина главного луча и его направление, а также уровень боковых лепестков, могут быть проанализированы тем же способом, что и для линейных решеток. Поскольку результирующий луч плоской антенной решетки является двумерным (т. е. зависит от координат азимут ( $\varphi$ ) — угол места ( $\theta$ )), то для представления диаграммы удобно пользоваться ее сечениями в полярной системе координат, как показано на рис. 2.9, *a*. При этом диапазоны изменения координат составляют: по углу места  $\theta$  от  $0$  до  $90^\circ$  и по азимуту  $\varphi$  от  $0$  до  $360^\circ$ . Такое представление обладает двумя недостатками: трудностью интерполяции из-за нелинейного характера координатной системы и невозможностью использования графопостроителя, управляемого ЭВМ, который, как правило, предназначен для построения в прямоугольных координатах.

Для преодоления трудностей, встречающихся при представлении диаграммы направленности плоской антенной решетки в полярных координатах, целесообразно воспользоваться преобразованием вида

$$\left. \begin{aligned} u &= \sin \theta \cos \varphi, \\ v &= \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

которое сводит представление в полярных координатах ( $\theta$  —  $\varphi$ ) к представлению в прямоугольных координатах ( $u$  —  $v$ ), как показано на рис. 2.9, б. При этом значения  $u$ ,  $v$  изменяются в диапазоне от  $-1$  до  $1$ . Система прямоугольных координат очень удобна для графических построений и интерполирования и поэтому наиболее часто используется для представления двумерных диаграмм направленности плоских антенных решеток.

### 2.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

Ранее было показано, что многоэлементная антенная решетка имеет более высокие разрешающую способность и чувствительность, чем одноэлементная антенна. Попытаемся рассмотреть теперь, за счет чего такая решетка может повысить эффективность приема полезного сигнала и обеспечить подавление помехи. При выборе конфигурации антенной решетки необходимо учитывать следующие факторы:

- 1) разрешающую способность,
- 2) сектор обзора по угловым координатам,
- 3) число элементов решетки,
- 4) уровень боковых лепестков.

В том случае, когда антенная решетка имеет небольшое число элементов, формирование нулей диаграммы направленности для подавления помехи может привести к существенному снижению чувствительности во всем секторе обзора по угловым координатам. Одним из путей преодоления указанного недостатка при одновременном сохранении возможности адаптивного формирования нулей является обеспечение более высокой угловой разрешающей способности за счет использования большего числа элементов. Однако с увеличением числа элементов антенной решетки растут также ее сложность и стоимость. Поэтому существует компромисс между разрешающей способностью, уровнем боковых лепестков и числом элементов решетки (при заданном секторе обзора по угловым координатам). Эти компромиссные соображения рассматриваются на примерах линейной и плоской антенных решеток.

#### 2.3.1. Повышение эффективности приема сигнала за счет подстройки диаграммы направленности антенной решетки

Возможность управления и изменения формы диаграммы направленности антенной решетки с целью улучшения качества приема полезного сигнала и одновременного подавления помех за счет соответствующего выбора комплексных весовых коэффициентов иллюстрируется следующим примером. Рассмотрим антенную решетку, состоящую из двух ненаправленных элементов, показанную на рис. 2.10. Полезный сигнал поступает по направлению нормали к линии, соединяющей элементы решетки,  $\theta = 0$ , а помеха — под углом к нормали  $\theta = \pi/6$ . Для простоты полагается, что полезный сигнал и помеха имеют одинаковую частоту  $f_0$ . Кроме того, считается, что в точке, расположенной точно посередине между элементами решетки, полезный сигнал и помеха находятся в фазе (это предположение не является обязательным, но оно упрощает анализ). Сигналы от каждого элемента поступают на весовые усилители с изменяемыми комплексными коэффициентами передачи, затем суммируются, образуя выходной сигнал антенной решетки.

Рассмотрим теперь, как с помощью подстройки комплексных весов можно улучшить эффективность приема полезного сигнала  $p(t)$  и подавить помеху  $I(t)$ . Полезный сигнал на выходе решетки определяется выражением

$$Pe^{j\omega_0 t} \{[\omega_1 + \omega_3] + j[\omega_2 + \omega_4]\}. \quad (2.28)$$

Для того чтобы выходной сигнал (2.28) был равен  $p(t) = Pe^{j\omega_0 t}$ , должны выполняться условия

$$\omega_1 + \omega_3 = 1, \omega_2 + \omega_4 = 0. \quad (2.29)$$

По отношению к средней точке раскрыва помеха появляется с опережением по фазе, равным  $2\pi(1/4)\sin(\pi/6) = \pi/4$ , в усилителе с весовым коэффициентом  $(\omega_3 + j\omega_4)$  и с отставанием по фазе на  $-\pi/4$  во втором усилителе. Следовательно, помеха на выходе решетки будет определяться выражением

$$N\{\exp[j(\omega_0 t - \pi/4)]\}[\omega_1 + j\omega_2] + N\{\exp[j(\omega_0 t + \pi/4)]\}[\omega_3 + j\omega_4]. \quad (2.30)$$

Так как

$$e^{j(\omega_0 t - \pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{j\omega_0 t(1-f)}],$$

$$e^{j(\omega_0 t + \pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{j\omega_0 t(1+f)}],$$

то для получения на выходе решетки нулевого значения помехи необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 &= 0, \\ -\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Из совместного решения (2.29) и (2.31) получим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1/2, \omega_2 = -1/2, \omega_3 = \\ &= 1/2, \omega_4 = 1/2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

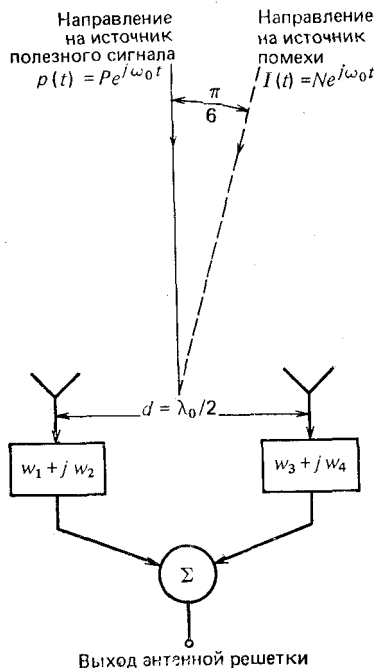


Рис. 2.10. Двухэлементная антенная решетка (к примеру подавления помехового сигнала)

При указанных весовых коэффициентах антенная решетка будет обеспечивать прием полезного сигнала с одновременным подавлением помехи.

Несмотря на то, что комплексные весовые коэффициенты для получения требуемой диаграммы направленности могут быть найдены с помощью указанных вычислений, этот путь нельзя считать практически пригодным для решения проблемы построения адаптивной антенной решетки. Метод, описанный в примере, основан на предположениях, что

источник помехи действует только с одного направления, полезный сигнал и помеха являются монохроматическими, и на использовании априорной информации о частоте и угловых координатах каждого источника. Практическая обработка сигналов не может быть основана на столь подробной информации о расположении, числе и характере источников сигналов. Тем не менее данный пример показывает, что с помощью подстройки комплексных весовых коэффициентов обеспечивается решение стоящих перед системой задач. И поэтому на практике процессор адаптивной антенной решетки используется именно для осуществления подстройки комплексных весовых коэффициентов. Вторая часть книги посвящена рассмотрению таких адаптивных процессоров.

Для управления диаграммой направленности наряду с рассмотренным методом весового суммирования, иллюстрируемого рис. 2.10, иногда применяют другой метод, обеспечивающий формирование нулей диаграммы в направлениях на источники помех с помощью так называемого «дерева» нулей [11]. Если через  $K$  обозначить число источников помех, подлежащих подавлению, через  $M$  — число элементов, используемых для формирования главного луча диаграммы направленности, то общее число элементов, требуемое для всей антенной решетки, составит  $N = M + K$ . Метод, основанный на применении «дерева» нулей, состоит в использовании одинаковых фазовращателей в многослойной структуре. При этом каждый слой будет формировать один нуль диаграммы и для создания «дерева» нулей необходимое число фазовращателей будет

$$N_{\phi} = KN - K_{\lambda}(K + 1)/2. \quad (2.33)$$

Каждый нуль в такой структуре может управляться независимо от других нулей. Операции формирования диаграммы и сканирования главным лучом могут выполняться с помощью слоя  $M$  комплексных весовых коэффициентов, следующих за слоями фазовращателей. Указанный способ обладает недостатком, связанным с тем, что число устройств управления, требуемых для подстройки фазовращателей, формирующих нули диаграммы, превышает число степеней свободы и в этом смысле оказывается неэффективным. В связи с этим метод управления диаграммой направленности, осуществляемый с помощью комплексных весовых коэффициентов, считается обычно более предпочтительным, чем метод, основанный на применении «дерева» нулей. В этой книге в дальнейшем считается, что диаграмма направленности формируется с помощью метода комплексного взвешивания.

При анализе возможностей изменения формы и адаптации результирующей диаграммы направленности антенной решетки отмечалось, что при межэлементном расстоянии, превышающем  $\lambda_0/2$ , возникает интерферометрический эффект. При использовании эквидистантной линейной антенной решетки этот эффект проявляется в том, что наряду с формированием нуля в направлении  $\theta_0$  на источник помехи будут одновременно образовываться и другие нули. Например, если необходимо «настроить» диаграмму направленности на направление источника помехи  $\theta_0$ , то для  $\theta_0$  будет справедливо выражение (2.19). Поскольку ука-

занное условие равенства нулю векторной суммы может быть переписано в виде

$$2\pi (d \lambda_0) \sin \theta_k = (2\pi/N) \pm 2\pi k, \quad (2.34)$$

где  $k$  — любое целое число, то нули диаграммы направленности будут также формироваться и на направлениях  $\theta_k$ , удовлетворяющих условию

$$\sin \theta_k = \frac{1}{N} \left( \frac{\lambda_0}{d} \right) \pm k \left( \frac{\lambda_0}{d} \right). \quad (2.35)$$

Из этой формулы видно, что не существует других действительных величин  $\theta_k$ , кроме требуемого направления  $\theta_0$ , если межэлементное расстояние меньше  $\lambda_0/2$ . Можно заметить также, что число дополнительных нулей диаграммы направленности, образующихся наряду с нулем в направлении  $\theta_0$ , пропорционально межэлементному расстоянию. Если диаграмма направленности антенной решетки имеет дополнительные нули, то может случиться так, что направление полезного сигнала совпадет с одним из дополнительных нулей, что приведет к резкому уменьшению выходного ОСШ. В связи с этим максимальное межэлементное расстояние обычно не превышает  $\lambda_0/2$  (в решетках с «полным набором» элементов). Иногда для специальных приложений, когда высокая разрешающая способность антенной решетки должна быть обеспечена без использования большого числа элементов, межэлементное расстояние может превышать  $\lambda_0/2$  (в «прореженных» решетках). В этих случаях нежелательные эффекты, связанные с появлением дополнительных нулей, могут быть ослаблены неравномерным размещением элементов антенной решетки, приводящим к нарушению ее периодической структуры [12—17].

### 2.3.2. Универсальные кривые для расчета характеристик антенной решетки

Для построения современных высокоэффективных систем обработки сигналов требуются антенны, обладающие высокой разрешающей способностью, большим коэффициентом направленного действия (КНД) и низким уровнем боковых лепестков. Для достижения этих целей были созданы большие (диаметром до 60—90 м) антенны с управляемыми рефлекторами, а также большие фазированные антенные решетки, которые не столь дороги, как антенны первого типа. При обычном построении антенных решеток, когда все элементы располагаются на одинаковом расстоянии друг от друга, это расстояние не должно превышать некоторого верхнего предела (см. подразд. 2.3.1). Поэтому требуемое число элементов для таких антенн становится астрономически большим, если необходимо обеспечить ширину луча, равную примерно одной минуте.

При расчете любой антенной решетки неизбежно приходится делать выбор между требуемым числом элементов, разрешающей способностью и достижимым уровнем боковых лепестков. Известно, что при слу-



чайном расположении элементов со сравнительно большим (в несколько длин волн) средним межэлементным расстоянием, когда эффекты взаимного влияния элементов пренебрежимо малы, можно получить диаграмму антенной решетки с узким главным лепестком, малым уровнем боковых лепестков и очень широкой полосой пропускания при не большом числе элементов [11, 18, 19]. Теория антенных решеток со случайным расположением элементов, разработанная автором работ [18, 19], дает возможность предсказать (в вероятностном смысле) характеристики решеток при различных способах расположения элементов. Такая предварительная информация может быть получена до выполнения детальных расчетов и дает хорошую оценку возможности обеспечения заданных характеристик. Окончательно характеристики антенной решетки оцениваются после получения удовлетворительных результатов ориентировочных расчетов. Антенная решетка со случайным расположением элементов обладает следующими свойствами:

- 1) необходимое число элементов главным образом зависит от заданного уровня боковых лепестков; оно обычно намного меньше того, которое требуется при эквидистантном расположении элементов;
- 2) разрешающая способность в основном определяется размерами раскрыва;
- 3) КНД пропорционален числу используемых элементов;
- 4) при фиксированном числе элементов разрешающая способность может быть улучшена и полоса пропускания увеличена в 10, 100 и более раз за счет использования случайного размещения элементов без существенного риска увеличения уровня боковых лепестков.

Для сравнительной оценки различных способов размещения элементов в больших антенных решетках можно воспользоваться теоретическими результатами, определяющими компромиссный выбор между числом элементов, разрешающей способностью и уровнем боковых лепестков. При использовании решеток со случайным расположением элементов необходимо учитывать два важных условия, а именно: элементы должны находиться достаточно далеко друг от друга и их число должно быть сравнительно велико (более 50).

Для линейной антенной решетки функция распределения уровня боковых лепестков определяется выражением

$$P_r(\text{уровень боковых лепестков} < r) = (1 - e^{-Nr^2})E[4a] + 1, \quad (2.36)$$

где  $P_r$  обозначает вероятность;  $E[\cdot]$  обозначает целую часть числа в скобках;  $N$  — общее число элементов решетки;  $a$  — размеры раскрыва в единицах длины волн;  $r$  — нормированный (к уровню главного) уровень боковых лепестков.

Выражение (2.36) графически можно представить семейством универсальных кривых (рис. 2.11), представляющих собой зависимость вероятности неперевышения боковыми лепестками уровня  $r$  от  $r\sqrt{N}$  для различных значений параметра  $q = \lg(a)$ . График зависимости параметра  $q$  от величины  $r\sqrt{N}$  для вероятности неперевышения боковыми лепестками уровня  $r$ , равной 0,9, приведен на рис. 2.12. С помощью это-

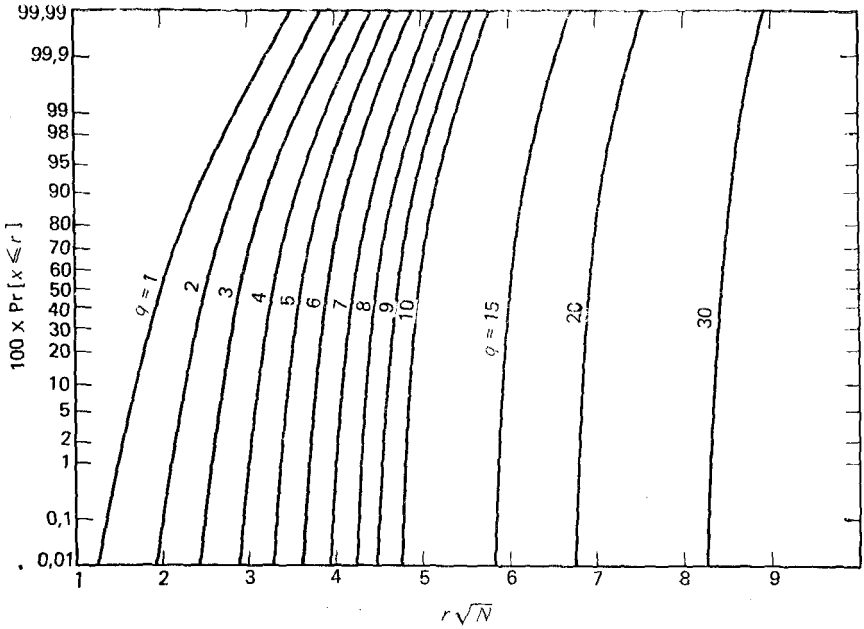


Рис. 2.11. Зависимость вероятности превышения боковыми лепестками уровня  $r$  от величины  $r\sqrt{N}$

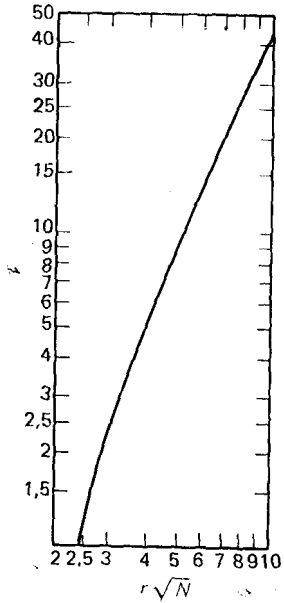


Рис. 2.12. Зависимость параметра  $q$  от величины  $r\sqrt{N}$  при  $\text{Pr}[x \leq r] = 0.9$

го графика для заданных уровня боковых лепестков и размера раскры-  
ва можно найти необходимое число элементов решетки.

Кривые на рис. 2.11 могут быть использованы также для расчета  
двухмерной антенной решетки с размерами (в длинах волн)  $a = 10^q$  и  
 $b = 10^p$ , если заменить  $q$  на  $p+q$  и преобразовать шкалу значений ин-  
тегральной вероятности. Шкала преобразовывается следующим обра-  
зом. Заданному значению вероятности  $Pr_1$  на новой шкале соответст-

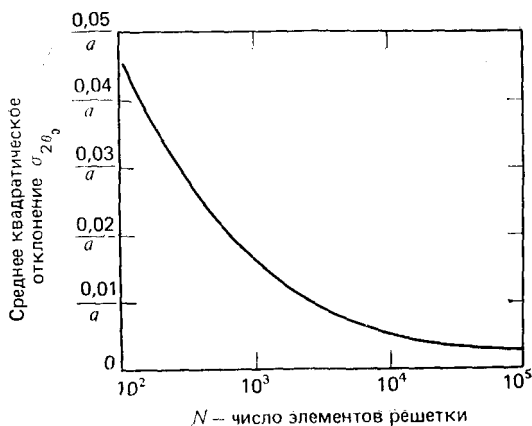


Рис. 2.13. Зависимость среднего квадратического отклонения ширины главного лепестка, измеряемого по уровню половинной мощности,  $\sigma_{2\theta_0}$ , от числа элементов при их случайном расположении в решетке

ует значение вероятности  $Pr_2$  на старой шкале рис. 2.11. Для нахождения  $Pr_2$  сначала определяется  $x$  из уравнения

$$Pr_1 = 1 - \exp(-x^2), \quad (2.37)$$

а затем вычисляется  $Pr_2$  по формуле

$$Pr_2 = \operatorname{erf}(x), \quad (2.38)$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (2.39)$$

Разрешающая способность антенной решетки при случайном расположении элементов характеризуется средним значением ширины главного лепестка по половинной мощности  $2\theta_0$ , где [18]

$$E \{2\theta_0\} [\text{град}] = 0,73/a. \quad (2.40)$$

Среднее квадратическое отклонение ширины главного лепестка относительно среднего значения, определяемого формулой (2.40), зависит от числа элементов решетки (рис. 2.13).

Для эквидистантной двухмерной антенной решетки с размерами  $a = b = 50 \lambda$  (при этом  $p = q \approx 1,7$ ) при межэлементном расстоянии  $\lambda/2$  потребуется  $10^4$  элементов. Предположим, что теперь используется случайное расположение элементов в решетке и требуется с вероятностью 0,9 сохранить боковые лепестки на уровне, меньшем  $r = 0,245$

(приблизительно таком же, что и в эквидистантной решетке с межэлементным расстоянием  $\lambda/2$ ). Соответствующее значение вероятности определяется по кривым на рис. 2.11 и равно  $\text{Pr} [x \leq 0,245] = 0,968$ , а значению  $q = 3,4$  соответствует  $r/\sqrt{N} = 3,55$ . Следовательно, число элементов решетки, требуемое для сохранения того же самого уровня боковых лепестков,  $N = (3,55)^2/(0,245)^2 \simeq 210$ . Таким образом, число элементов решетки при их случайном расположении примерно в 50 раз меньше числа элементов в эквидистантной решетке с межэлементным расстоянием, равным  $\lambda/2$ . При уровне боковых лепестков на 20 дБ ( $r = 0,1$ ) ниже уровня главного число элементов решетки со случайным их расположением примерно равно 1260, что в 8 раз меньше необходимого числа элементов эквидистантной решетки. Можно показать, что ширина главного лепестка диаграммы направленности решетки со случайным расположением элементов оказывается соизмеримой с шириной главного лепестка эквидистантной решетки с межэлементным расстоянием  $\lambda/2$ .

В заключение необходимо заметить, что для плоских антенных решеток с треугольным или прямоугольным расположением элементов существует простой аналитический метод расчета [20], позволяющий минимизировать число необходимых элементов и избежать формирования нежелательных боковых лепестков. Подробное описание методов оптимизации антенных решеток можно найти в [21].

#### 2.4. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОДАВЛЕНИЯ ПОМЕХ АНТЕННОЙ РЕШЕТКОЙ

Основным показателем, характеризующим эффективность подавления помехи адаптивной антенной решеткой, является зависимость отношения суммарной мощности выходного шума  $P_0$  к мощности собственного шума приемника  $P_N$  от частоты. Рассмотрим простой пример с

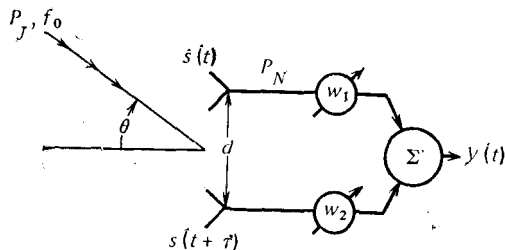


Рис. 2.14. Адаптивная двухэлементная антенная решетка. Источник помехи расположен под углом  $\theta$  относительно оси антенной системы

двухэлементной решеткой, показанной на рис. 2.14. Если обозначить сигнал помехи, поступающий с направления  $\theta$ , на выходе первого элемента решетки через  $s(t)$ , то этот же сигнал на выходе второго элемента будет иметь вид  $s(t + \tau)$ , где  $\tau = (d/v) \sin \theta$  и  $v$  — скорость распространения волнового фронта.

Сигналы помехи, получаемые на выходе каждого элемента решетки, затем взвешиваются и суммируются, образуя в результате выходной сигнал

$$y(t) = w_1 s(t) + w_2 s(t + \tau). \quad (2.41)$$

Соотношение (2.41) в частотной области имеет вид

$$Y(\omega) = S(\omega) [\omega_1 + \omega_2 e^{-j\omega\tau}]. \quad (2.42)$$

Для того чтобы на выходе полностью подавить сигнал помехи на частоте  $f_0$  ( $f_0$  — центральная частота спектра помехи), необходимо иметь

$$\omega_2 = -\omega_1 e^{j\omega_0\tau}. \quad (2.43)$$

Если выбрать адаптивные веса так, чтобы выполнялось условие (2.43), то составляющая помехи на выходе решетки для любой частоты будет определяться выражением

$$Y(\omega) = S(\omega) \omega_1 [1 - e^{-j\tau(\omega - \omega_0)}] \quad (2.44)$$

и, следовательно, зависимость мощности помехи на выходе от частоты может быть представлена как

$$|Y(\omega)|^2 = |S(\omega)|^2 |\omega_1|^2 \{2 - 2 \cos [\tau(\omega - \omega_0)]\}. \quad (2.45)$$

Если положить  $|S(\omega)|^2 = P_J$  и через  $P_N$  обозначить постоянную спектральную плотность собственного шума в каждом канале, то суммарную плотность на выходе  $P_0(\omega)$  можно представить в виде

$$P_0(\omega) = 2|\omega_1|^2 [1 - \cos(\tau(\omega - \omega_0))] P_J + 2|\omega_1|^2 P_N. \quad (2.46)$$

Если учесть, что выходная спектральная плотность собственного шума канала равна  $P_n = 2|\omega_1|^2 P_N$ , и разделить обе части предыдущего выражения на  $P_n$ , то выходное отношение (помеха + шум)-шум можно записать в виде

$$\frac{P_0}{P_n}(\omega) = 1 + \frac{\{1 - \cos[\tau(\omega - \omega_0)]\} P_J}{P_N}, \quad (2.47)$$

где  $P_J/P_N$  — отношение помеха-шум в канале;  $\tau = (d/v) \sin \theta$ ;  $d$  — расстояние между элементами;  $\theta$  — угловое положение источника помехи относительно нормали к решетке;  $\omega_0$  — центральная частота спектра помехи.

На центральной частоте  $f_0$  отношение  $P_0/P_n = 1$  (0 дБ). В том случае, когда спектр помехи кроме частоты  $f_0$  содержит и другие частоты, то подавление помехи на выходе решетки не будет. Зависимости отношения  $P_0/P_n$  от частоты, определяемые (2.47), для двух значений мощности помехи с полосой частот 10 МГц и углом  $\theta = 90^\circ$  для двухэлементной антенной решетки с  $d = \lambda_0/2$  приведены на рис. 2.15. Из рис. 2.15 видно, что при  $P_J/P_N = 40$  дБ уровень нескомпенсированных составляющих помехи на краях частотного диапазона составляет примерно 12 дБ. Таким образом результирующее подавление помехи составит 40—12 = 28 дБ.

Из выражения (2.47) и рис. 2.15 также следует, что область частот, для которых  $P_0/P_n \approx 0$  дБ, сужается при увеличении расстояния между элементами решетки и угла визирования источника помехи. Говоря точнее, ширина этой области частот обратно пропорциональна межэлементному расстоянию решетки  $d$  и синусу угла визирования источника помехи.

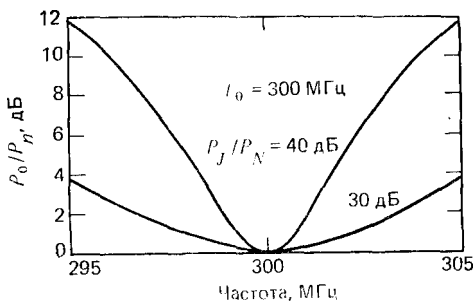


Рис. 2.15. Эффективность подавления помехи двухэлементной антенной решеткой, характеризуемая зависимостью отношения  $P_0/P_n$  от частоты для отношения  $P_J/P_N=30$  и 40 дБ

Достижимая степень подавления помехи главным образом зависит от трех характеристик антенной решетки: 1) межэлементного расстояния, 2) ширины полосы частот помехи и 3) частотно-зависимого межканального рассогласования в полосе частот помехи. Хотя влияние межэлементного расстояния на форму суммарной диаграммы направленности было рассмотрено ранее, еще один эффект, связанный с размещением элементов в решетке, проявляется в задержке распространения фронта падающей волны.

Для двухэлементной решетки, показанной на рис. 2.16, задержка при распространении будет определяться формулой

$$\tau = (d \sin \theta)/v. \quad (2.48)$$

Предположим, что одиночный источник помехи с мощностью  $P_J$  располагается под углом  $\theta$  относительно нормали к решетке и имеет симметричный спектр частот плоской формы шириной  $B$  Гц. Можно показать, что отношение  $P_0/P_J$  (где  $P_0$  — выходная мощность с учетом подавления сигнала помехи) будет в этом случае равно

$$\frac{P_0}{P_J} = 1 - \frac{\sin^2(\pi B \tau)}{(\pi B \tau)^2}. \quad (2.49)$$

Отметим, что (2.49) отличается от (2.47), поскольку значение весового коэффициента, минимизирующего выходную мощность помехи, отличается от значения весового коэффициента, обеспечивающего пол-

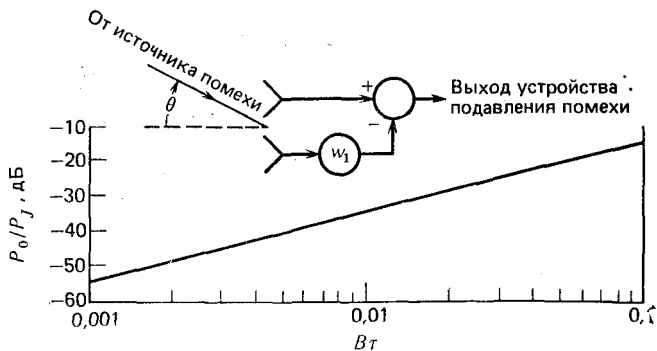


Рис. 2.16. Зависимость отношения  $P_0/P_J$  от произведения  $B\tau$

ное подавление помехи на центральной частоте. Зависимость эффективности подавления помехи от произведения  $B\tau$  показана на рис. 2.16. Как следует из (2.49), отношение  $P_0/P_J$  увеличивается с ростом межэлементного расстояния решетке и ширины полосы частот помехи.

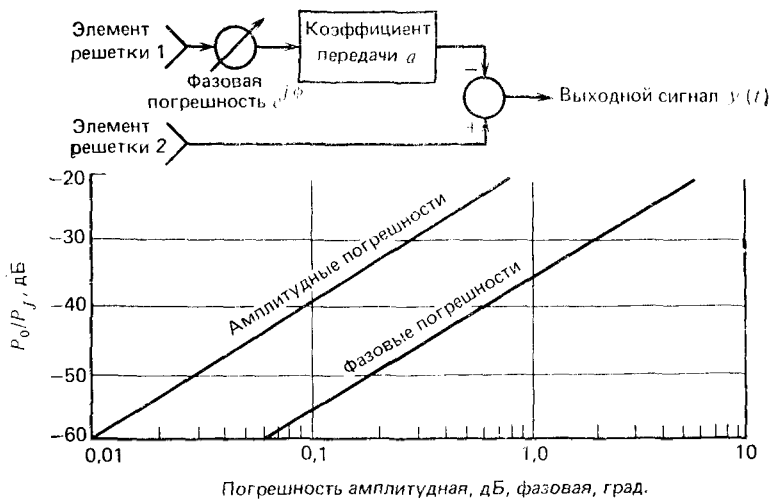


Рис. 2.17. Зависимость отношения  $P_0/P_J$  от амплитудного и фазового межканального рассогласования в двухэлементной решетке

Упрощенная модель двухканальной системы с амплитудным и фазовым рассогласованием каналов представлена на рис. 2.17. Пренебрегая эффектами задержки при распространении, выходной сигнал можно представить как

$$y(t) = 1 - ae^{i\varphi}. \quad (2.50)$$

Из выражения (2.50) следует, что выходная мощность

$$|y(t)|^2 = |1 - ae^{i\varphi}|^2 = 1 + a^2 - 2a \cos \varphi. \quad (2.51)$$

Зависимости отношения  $P_0/P_J$ , определяемые согласно (2.51), отдельно для амплитудных ( $\varphi = 0$ ) и фазовых ( $a = 1$ ) погрешностей показаны на рис. 2.17. В третьей части книги при рассмотрении компенсации в системах с адаптивными антенными решетками приводятся более реальные модели для анализа межканального рассогласования и изучаются способы компенсации рассогласования. Как видно из рис. 2.17, для подавления помех на 25 дБ рассогласование каналов не должно превышать примерно 0,5 дБ по амплитуде и  $2,8^\circ$  по фазе.

## 2.5. ОСОБЕННОСТИ ОБРАБОТКИ УЗКОПОЛОСНЫХ И ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ

Как было показано, в двухэлементной решетке (рис. 2.10) с помощью подстройки комплексных весовых коэффициентов можно получить результирующую диаграмму направленности с нулем в направле-

нии на источник помехи. До тех пор, пока помеха является «узкополосной» (т. е. полностью определяется одной частотой  $\omega_0$ ), результирующая диаграмма направленности решетки будет обеспечивать ее подавление. Операция комплексного взвешивания сигнала антенной решеткой обычно осуществляется с помощью устройства с квадратурными каналами, схема которого показана на рис. 2.18. Сигнал каждого элемента решетки разделяется на синфазную и квадратурную составляющие с помощью фазовращателя, осуществляющего сдвиг фаз на  $90^\circ$ . Каждая из составляющих затем подвергается операции умножения на переменный весовой коэффициент, после чего результаты умножения суммируются и формируется выходной сигнал. Результирующий комплексный коэффициент передачи равен  $Ae^{j\varphi}$ , где  $\varphi = -\arctg(\omega_2/\omega_1)$  и

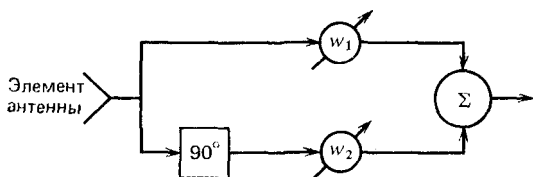


Рис. 2.18. Структурная схема устройства с квадратурными каналами для выполнения операции комплексного взвешивания

$A = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}$ . Считается, что весовые коэффициенты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  принимают как положительные, так и отрицательные значения и диапазон изменения амплитуды  $A$  ограничивается лишь диапазоном изменения этих коэффициентов. Следует отметить, что для получения удовлетворительного качества обработки в устройстве с квадратурными каналами не обязательно обеспечивать фазовый сдвиг, равный точно  $90^\circ$ .

В том случае, когда помеха характеризуется не одной частотой, а спектром частот значительной ширины, комплексный весовой коэффициент, подходящий для подавления составляющей частоты  $\omega_1$ , не будет таковым для составляющей частоты  $\omega_2$ , так как нули диаграммы направленности решетки смещаются при изменении значения  $\lambda$ . Отсюда следует, что если необходимо обеспечить формирование нуля диаграммы направленности для всех частот спектра помехи, то для каждой из этих частот требуется свое значение комплексного весового коэффициента. Простой и эффективный способ получения различных комплексных весовых коэффициентов для ряда частот из интересующего диапазона основан на использовании вместо устройства с квадратурными каналами (рис. 2.18) нерекурсивного фильтра с передаточной функцией  $\mathfrak{h}(\omega)$ . Фильтр этого типа может быть реализован на основе многоотводной линии задержки, как показано на рис. 2.19 [22, 23]. Такой фильтр называется трансверсальным и имеет периодическую передаточную функцию (см. приложение А). Если отводы линии располагаются достаточно часто и их число велико, то такой фильтр близок к идеальному фильтру с регулируемыми амплитудно- и фазочастотными характеристиками на каждой частоте в заданном диапазоне. Верхний предел для выбора расстояния между отводами задается требуемой шириной подавляемой полосы частот  $B_d$  решетки, так как



$B_f \geq B_A$  и  $B_f = 1/\Delta$  при равномерном распределении отводов линии. Такой фильтр оказывается полезным не только для осуществления требуемых подстроек амплитуды и фазы широкополосных сигналов во всем диапазоне частот, но и для компенсации эффектов, связанных с многолучевым распространением, с задержкой сигнала в антенной решетке и с межканальным рассогласованием (такие применения фильтра рассматриваются в третьей части книги). Трансверсальные фильтры могут использоваться также для повышения эффективности радиолокационных систем с селекцией движущихся целей (СДЦ) при подавлении отражений от местных предметов, для компенсации погрешно-

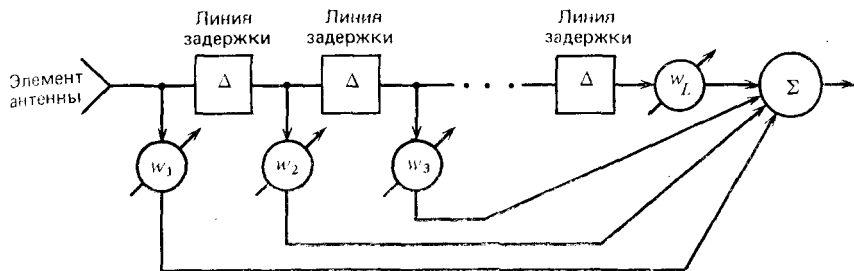


рис. 2.19. Структурная схема трансверсального фильтра, реализованного на основе  $L$ -отводной линии задержки

стей, обусловленных собственным движением, для уменьшения эффектов рассеяния в ближней зоне и компенсации ошибок, обусловленных возбуждением решетки [24].

Рассмотрим многоканальный процессор, построенный на основе многоотводных линий задержки (рис. 2.20). Число каналов  $N$  этого процессора для обработки широкополосных сигналов равно числу элементов антенной решетки, каждый из которых содержит трансверсальный фильтр на линии задержки с  $L$  отводами, аналогичный показанному на рис. 2.19. Из сравнения устройств, представленных на рис. 2.20 и рис. 1.1, видно, что сигналы  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$  первого из них полностью соответствуют сигналам  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$  второго, которые определяются соотношением (1.6) и в совокупности представляются вектором  $\mathbf{x}(t)$ . Аналогичным способом определим комплексный вектор  $\mathbf{x}'_1(t)$  сигналов на первых отводах линий задержки:

$$[\mathbf{x}'_1(t)]^T = (\mathbf{x}')^T = [x_1 x_2 \dots x_N]. \quad (2.52)$$

Поскольку сигналы на вторых отводах линии задержки во всех каналах отличаются от сигналов на первых отводах только временем задерживания, то комплексный вектор  $\mathbf{x}'_2(t)$  сигналов на вторых отводах определится как

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}'_2(t)]^T &= [\mathbf{x}'(t - \Delta)]^T = \\ &= [x_1(t - \Delta) x_2(t - \Delta) \dots x_N(t - \Delta)]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Продолжая аналогичные рассуждения для всех  $L$  отводов, можно представить суммарный вектор сигнала для многоканального процессора в виде

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x'(t-\Delta) \\ \vdots \\ x'[t-(L-1)\Delta] \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Из выражения (2.54) видно, что суммарный вектор сигнала  $x(t)$  состоит из  $L$   $N$ -мерных подвекторов.

Точно таким же способом определим весовой вектор:

$$(w'_1)^T \stackrel{\Delta}{=} [w_{11}w_{21} \dots w_{N1}]. \quad (2.55)$$

Тогда весовой вектор для многоканального процессора можно представить в виде

$$w \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_L \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Из (2.56) видно, что суммарный весовой вектор  $w$  является вектором размера  $N \times L$  и состоит из  $L$   $N$ -мерных подвекторов.

С учетом введенных определений для сигнального и весового векторов выходной сигнал многоканального процессора, построенного на

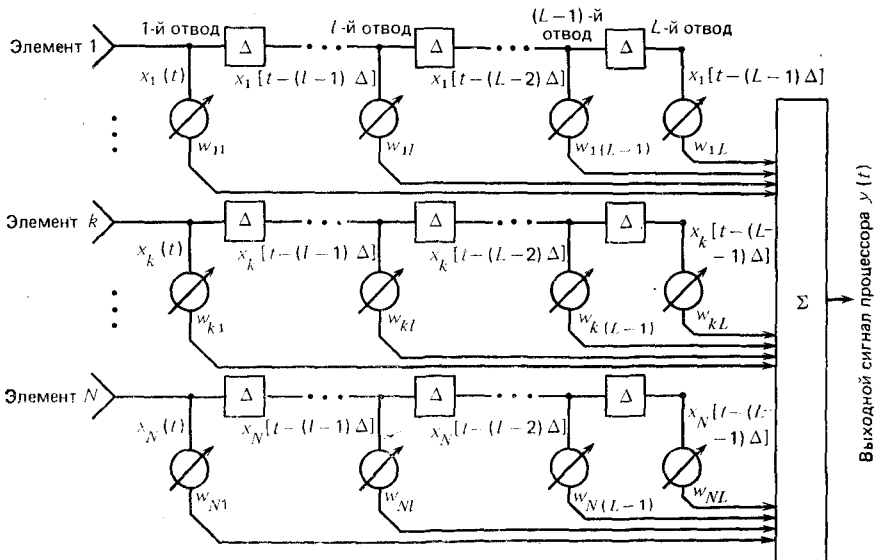


Рис. 2.20. Структурная схема многоканального процессора на многоотводных линиях задержки для обработки широкополосных сигналов

базе многоотводных линий задержки, можно записать в виде выражения

$$y(t) = \sum_{i=1}^L (\mathbf{w}_i)^T \mathbf{x}_i(t) = \sum_{i=1}^L (\mathbf{w}_i)^T \mathbf{x}'[t - (i-1)\Delta] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t), \quad (2.57)$$

которое по форме точно совпадает с (1.4). Запись вектора сигнала в форме (2.54) приводит к тому, что при определенных условиях корреляционная матрица входных сигналов становится теплицевой (см. гл. 3).

Процессоры сигналов антенной решетки, показанные на рис. 2.19 и 2.20, являются примерами классических устройств обработки сигналов во временной области, основанных на использовании комплексных весов многоотводных линий задержки. Сравнительно недавно стали применяться методы быстрого преобразования Фурье (БПФ) для замены обычных процессоров, работающих во временной области, на эквивалентные процессоры, работающие в частотной области. При таком подходе можно упростить аппаратуру. Формирование диаграммы направленности при использовании обработки во временной области с ростом числа фазовращателей или линий задержки становится конструктивно нецелесообразным из-за сложности аппаратуры, в то время как обработка в частотной области, осуществляемая с помощью ЭВМ, существенно упрощает аппаратуру. Некоторые вопросы обработки сигналов в частотной области рассмотрены в задачах к этой главе, более подробный анализ цифровых методов формирования диаграмм направленности можно найти в литературе [25—27].

Процессор, показанный на рис. 2.20, осуществляет обработку выходных сигналов элементов антенной решетки во временной области; в [29] такое устройство называют «процессором, работающим в пространстве элементов». Очевидно, что существуют такие процессоры, работающие как во временной, так и в частотной областях. Достоинством процессоров, работающих в частотной области, является то, что они осуществляют подавление непрерывных помех. С другой стороны, достоинством процессоров, работающих во временной области, является то, что они могут обеспечить подавление сигналов с непрерывным спектром и от источников с непрерывным распределением по углам. Таким образом процессоры, работающие в частотной области, оказываются наиболее подходящими для решения проблемы обнаружения узкополосных сигналов, тогда как процессоры, работающие во временной области, — для обнаружения широкополосных сигналов. Следует тем не менее подчеркнуть, что окончательно выбирать тип процессора для конкретного применения следует с учетом чувствительности структуры к возможным возмущениям, а также ее соответствия фактическим условиям приема сигнала [28].

Часто для упрощения устройства обработки сигналов элементы решетки вначале объединяют в группы и суммарные выходные сигналы групп (им соответствуют отдельные лучи) подаются на адаптивный процессор. Такие процессоры называются процессорами, «работающими в пространстве лучей» [29]. В ряде случаев частично адаптивные решетки

(см. гл. 12), использующие такие процессоры, имеют лучшие характеристики, чем решетки с процессорами, работающими в пространстве элементов.

## 2.6. ВЫВОДЫ

Условия, в которых предполагается работа системы с адаптивной антенной решеткой, определялись на основе анализа помех различных типов и моделирования полезного сигнала в виде случайного или неслучайного процесса. При этом важным был учет эффектов, связанных с условиями распространения сигнала, так как они обуславливают его искажения. Существенным является также характер нестационарности поля шумов, непосредственно влияющий на работоспособность адаптивной системы при нестационарных условиях приема сигнала.

Расположение элементов антенной решетки непосредственно влияет на эффективность работы системы в любых заданных помеховых ситуациях. Потенциальные возможности антенной решетки в увеличении эффективности приема были показаны на одном из простых примеров. Было показано также, что при построении антенных решеток как с «полным набором» элементов, так и больших «прореженных» с относительно малым их числом можно добиться устранения нежелательных боковых лепестков на основе теории антенных решеток со случайным расположением элементов. На формирование нулей диаграммы в направлениях на источники помех наряду со способом расположения элементов могут влиять также:

- 1) ширина полосы частот помехи;
- 2) задержка сигнала при распространении по раскрытию решетки;
- 3) эффекты межканального рассогласования.

Требования к обработке узкополосных и широкополосных сигналов различны в том смысле, что в первом случае достаточно весового коэффициента для каждого канала, тогда как во втором — необходимо осуществить операцию частотно-зависимого взвешивания с помощью трансверсального фильтра на многоотводной линии задержки. Процессоры, работающие во временной области, можно заменить эквивалентными процессорами, работающими в частотной области и реализуемыми при использовании ЭВМ, что существенно упрощает аппаратуру.

Потенциальные возможности систем с адаптивной антенной решеткой в установившемся режиме можно рассчитать теоретически, не прибегая к точному рассмотрению всех факторов, влияющих на эффективность. Теоретические пределы эффективности при работе антенной решетки в установившемся режиме рассматриваются в гл. 3.

## ЗАДАЧИ

**1. Кольцевая антенная решетка.** Для кольцевой антенной решетки, показанной на рис. 2.21 и содержащей  $N$  равноудаленных элементов, в качестве фазового центра выберем центр окружности. Для сигнала, поступающего в антенную решетку под углом  $\theta$  по отношению к направлению отсчета, угол  $\psi_k = \theta - \psi_k$ .

А. Покажите, что  $\psi_k = (2\pi/N)(k - 1)$  для  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Б. Покажите, что набег фазы, обусловленный разностью хода между  $k$ -м элементом и фазовым центром, определяется выражением  $u_k = \pi (R/\lambda) \cos \varphi_k$ .

В. Покажите, что межэлементное расстояние  $\lambda/2$  обеспечивается выбором радиуса кольцевой антенной решетки  $R = \lambda[4 \sin(\pi/N)]$ .

**2. Линейная антенная решетка.** Рассмотрим геометрические соотношения, показанные на рис. 2.22. Здесь через  $\mathbf{v}$  обозначен вектор, направленный из центра решетки к источнику сигнала; через  $\theta$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{v}$  и нормаль к раскрыву; через  $v$  — скорость распространения фронта волны.

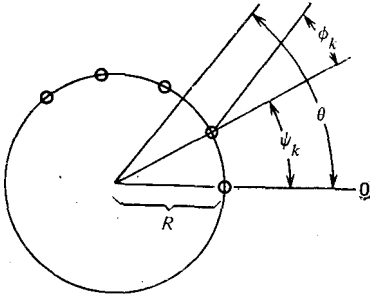


Рис. 2.21. Расположение кольцевой  $N$ -элементной антенной решетки в азимутальной плоскости

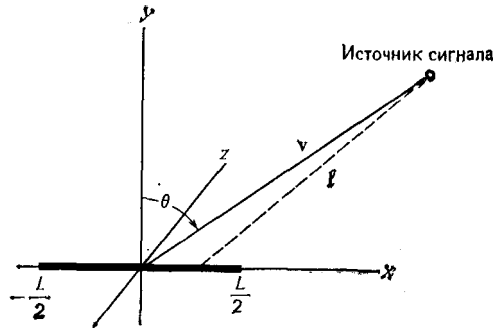


Рис. 2.22. Геометрические соотношения для линейной решетки

А. Покажите, что в случае сферического волнового фронта его время задержки при достижении элемента, находящегося на расстоянии  $x$  относительно центра решетки, будет определяться выражением

$$\tau(x) = \frac{\|\mathbf{v}\|}{v} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{\|\mathbf{v}\|^2}\right) - 2\left(\frac{x}{\|\mathbf{v}\|}\right) \sin \theta} \right\},$$

где  $\|\mathbf{v}\|$  — обозначает длину вектора  $\mathbf{v}$ .

Б. Покажите, что для сферического волнового фронта коэффициент затухания сигнала при достижении элемента, удаленного от центра решетки на расстояние  $x$ , определяется выражением

$$\rho(x) = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{l}\|} = 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{\|\mathbf{v}\|^2}\right) - 2\left(\frac{x}{\|\mathbf{v}\|}\right) \sin \theta},$$

где  $\|\mathbf{l}\|$  — расстояние между источником сигнала и рассматриваемым элементом решетки.

**3. Линейная эквидистантная антенная решетка [30].** Покажите, что нормированная диаграмма направленности решетки определяется выражением

$$A(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{i u}{2}\right) = \frac{1}{N} \frac{\sin(Nu/2)}{\sin(u/2)},$$

где  $u = 2\pi (d/\lambda) \sin \theta$ .

**4. Характеристики неэквидистантных антенных решеток [15].**

А. В неэквидистантной линейной решетке положение  $i$ -го элемента определяется формулой

$$d_i = \left(\frac{i}{2} + \varepsilon_i\right) d,$$

где  $d$  — некоторое «базовое» межэлементное расстояние, а  $\varepsilon_i$  — отклонение положения элемента данной решетки от положения соответствующего элемента в эквидистантной решетке с расстоянием  $d$ . Нормированная диаграмма направленности, формируемая неэквидистантной антенной решеткой, определяется выражением

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos u_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \left[ \left( \frac{i}{2} + \varepsilon_i \right) u \right],$$

где  $u = 2\pi (d/\lambda) \sin \theta$ .

Покажите, что выражение для диаграммы  $A$  можно представить в виде

$$A = A_u - \frac{1}{N} \sum_i \left[ \sin \varepsilon_i u \sin i \frac{u}{2} + (1 - \cos \varepsilon_i u) \cos i \frac{u}{2} \right],$$

где  $A_u$  — диаграмма направленности эквидистантной решетки с межэлементным расстоянием  $d$  (см. задачу 3).

Б. Полагая все значения произведений  $\varepsilon_i u$  малыми, покажите, что диаграмма, полученная в п. А, приводится к виду

$$A = A_u - \frac{u}{N} \sum_i \varepsilon_i \sin i \left( \frac{u}{2} \right).$$

В. Результат, полученный в п. Б, можно представить следующим образом:

$$\sum_i \varepsilon_i \sin \left( i \frac{u}{2} \right) = \frac{N}{u} (A_u - A).$$

Эту форму записи можно рассматривать как представление правой части последнего выражения в виде ряда Фурье. Следовательно, величина  $\varepsilon_i$  будет определяться формулой для коэффициентов ряда Фурье:

$$\varepsilon_i = \frac{2N}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{u} (A_u - A) \sin \left( i \frac{u}{2} \right) du.$$

Полагая

$$\frac{A_u - A}{u} = \frac{1}{u} \sum_{k=1}^L a_k \delta(u - u_k),$$

покажите, что

$$\varepsilon_i = 2 \frac{N}{\pi} \sum_{k=1}^L a_k \frac{\sin [(i/2) u_k]}{u_k}.$$

Г. Для эквидистантных антенных решеток положения максимумов боковых лепестков определяются приближенным выражением  $u_k = \pi (2k + 1)/N$ .

Поскольку уровни боковых лепестков уменьшаются пропорционально  $1/u$ , то  $(A_u - A)/u$  можно представить в виде

$$\frac{A_u - A}{u} = A \frac{1}{u^2} \sum_{k=1}^L (-1)^k \delta \left[ u - \frac{\pi}{N} (2k + 1) \right].$$

Покажите, что при такой форме представления  $(A_u - A)/u$

$$\varepsilon_i = 2A \left( \frac{N}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^L (-1)^k \frac{\sin (i\pi/2N) (2k + 1)}{(2k + 1)^2}.$$

5. **Неэквидистантные и эквивалентные им эквидистантные антенные решетки** [14]. Один из методов определения основных характеристик неэквидистантных решеток основан на использовании соответствия между неэквидистантной и эквивалентной ей эквидистантной антенной решеткой (ЭАР). Этот метод обеспечивает наилучшее по средним квадратическим значениям приближение характеристик исходной неэквидистантной решетки.

А. Получите выражение для диаграммы направленности  $A(\theta)$  эквидистантной антенной решетки (рис. 2.23) в виде нормированной векторной суммы узкополосных сигналов каждого элемента (нормирование выполняйте относительно уровня сигнала центрального элемента решетки). Покажите, что

$$A(\theta) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \cos [2\pi i l \sin \theta], \quad l = d/\lambda.$$

Покажите также, что для  $d/\lambda = 2$  диаграмма направленности имеет второй основной максимум при  $\theta = \pi/6$ .

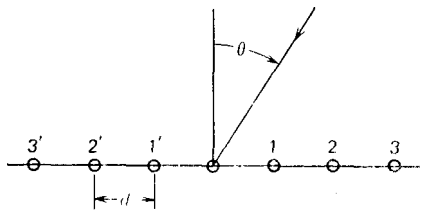


Рис. 2.23. Эквидистантная антенная решетка с нечетным числом элементов

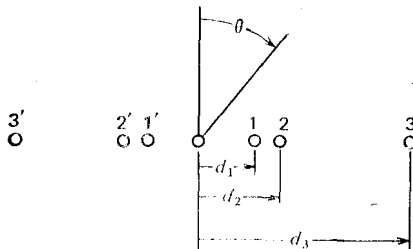


Рис. 2.24. Симметричная неэквидистантная антенная решетка с нечетным числом элементов

Б. Покажите, что диаграмма направленности неэквидистантной антенной решетки, показанной на рис. 2.24, определяется выражением

$$A(\theta) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \cos [2\pi l_i \sin \theta], \quad l_i = d_i/\lambda.$$

В. Результат, полученный в п. Б, можно представить в следующем виде:

$$A(\theta) = 1 + 2 \sum_i \cos \omega_i,$$

где  $\omega_i = \left( \frac{2}{R} l_i \right) \underbrace{(\pi R \sin \theta)}_{\omega_1}$ ,  $R$  — постоянный множитель.

Величину  $\omega_1 = \pi R \sin \theta$  можно рассматривать как некоторую (фиктивную) основную частоту ЭАР. Коэффициент  $R$  определяет расстояние между элементами в ЭАР. Например,  $R = 1$  соответствует полуволновому расстоянию между элементами, а  $R = 1/2$  — четвертьволновому. Каждая составляющая последнего выражения для  $A(\theta)$  может быть представлена в виде ряда Фурье. Практически для обеспечения требуемой точности представления необходимо учитывать только конечное число членов ряда. Представив  $m$ -й член ряда для  $A(\theta)$  как

$$\cos \omega_m = \cos \frac{2}{R} l_m \omega_1 = \cos \mu_m \omega_1,$$

где  $\mu_m = (2l_m/R)$ , получим его разложение в ряд Фурье в виде

$$\cos \mu_m \omega_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m\nu} \cos(\nu \omega_1),$$

где

$$a_{mv} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi R} \cos \mu_m \omega_1 \cos v \omega_1 d\omega_1.$$

Покажите, что при  $R = 1$

$$a_{mv} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_m (-1)^v \sin \mu_m \pi}{\mu_m^2 - v^2} \text{ для } \mu_m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Г. Используя разложение, полученное в п. В для  $\cos \omega_1$ , покажите, что

$$A(\theta) = 1 + 2 \sum_{i=1}^P \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} a_{mv} \cos(v\omega_1) \right\} = 1 + 2 \sum_{r=0}^P A_r \cos r\omega_1,$$

где  $A_0 = a_{10} + a_{20} + a_{30} + \dots$ ;  $A_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31} + \dots$

Отметим, что рассмотренное здесь представление не является единственным. Другие представления получаются при выборе другого значения  $R$ . Из свойств рядов Фурье следует, что каждое представление будет наилучшим из возможных для соответствующего значения  $\omega_1$ .

**6. Эффекты, связанные с задержкой распространения по раскрыву решетки.** Эти эффекты можно проанализировать при рассмотрении простой двухэлементной модели антенной решетки, показанной на рис. 2.25. Необходимо выбрать такое значение  $\omega_1$ , которое обеспечивает на выходе минимальную мощность  $P_0$  помехи от точечного источника.

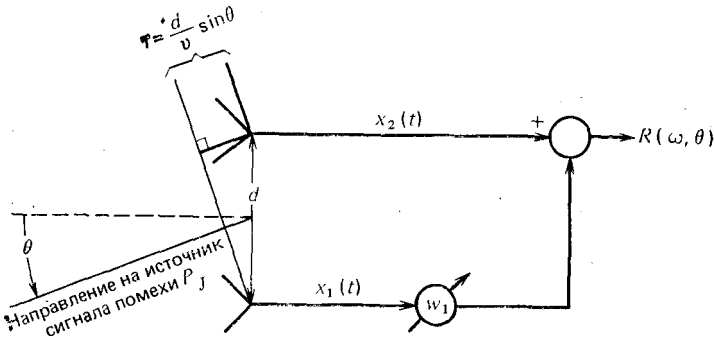


Рис. 2.25. Структурная схема двухэлементной линейной антенной решетки с одним комплексным весовым коэффициентом. Длительность задержки распространения по раскрыву равна  $\tau$

А. Поскольку в частотной области  $x_2(\omega) = x_1(\omega) \exp(-j\omega\tau)$ , определение значения  $\omega_1$  может рассматриваться как задача получения наилучшей оценки (в смысле наименьшей средней квадратической ошибки) для  $x_1(\omega) \exp(-j\omega\tau)$  и при этом ошибка будет определяться как  $\varepsilon(\omega) = x_1(\omega) [\exp(-j\omega\tau) - \omega_1]$ . Чтобы значение весового коэффициента  $\omega_1$  было оптимальным, ошибка оценки должна быть ортогональна сигналу  $x_1(\omega)$ , т. е. должно выполняться условие

$$E \{ |x_1(\omega)|^2 [e^{-j\omega\tau} - \omega_1] \} = 0,$$

где  $E\{\cdot\}$  означает усреднение по частоте. Если значение  $|x_1(\omega)|^2$  постоянно и не зависит от частоты, то из рассмотренного условия ортогональности следует, что для  $\omega_1$  должно удовлетворяться равенство  $E \{ \exp(-j\omega\tau) - \omega_1 \} = 0$ . Покажите, что если спектр сигнала имеет прямоугольную форму в полосе частот  $-\pi B \leq \omega \leq \pi B$ , то значение  $\omega_1$  будет иметь вид  $\omega_1 = [\sin(\pi B\tau)]/(\pi B\tau)$ .



Б. Выходная мощность может быть определена как

$$P_0 = \int_{-\pi B}^{\pi B} \varphi_{RR}(\omega, \theta) d\omega.$$

Здесь

$$\varphi_{RR}(\omega, \theta) = |e^{-j\omega\tau} - \omega_1|^2 \varphi_{ss}(\omega)$$

— выходная спектральная плотность, а  $\varphi_{ss}(\omega)$  — спектральная плотность помехи от точечного источника. Если полагать, что в полосе частот полезного сигнала  $\varphi_{ss}(\omega) = 1$  (так что  $P_J = 2\pi B$ ), то из п. А следует

$$P_0 = \int_{-\pi B}^{\pi B} \left| e^{-j\omega\tau} - \frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau} \right|^2 d\omega.$$

Покажите, что

$$\frac{P_0}{P_J} = 1 - \left[ \frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau} \right]^2,$$

где  $P_J$  — мощность помехи.

7. Сканирование адаптивно сформированными лучами [31]<sup>1</sup>. Для осуществления сканирования адаптивно сформированным лучом требуется информация о расположении элементов антенной решетки. В бортовых самолетных антенных решетках при невысокой плотности распределения элементы размещаются вдоль всего корпуса. Несмотря на то, что координаты элементов решетки можно точно измерить на земле, из-за отсутствия абсолютной жесткости конструкции корпуса во время полета относительные положения элементов решетки могут значительно изменяться, при этом среднее квадратическое отклонение достигает 3 см.

Для систем сканирования с антенной решеткой в [31] были получены следующие результаты:

1. Допустимое среднее квадратическое отклонение координаты элемента равно  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \lambda/(4\pi\theta_s)$ , где  $\lambda$  — длина излучаемой волны,  $\theta_s$  — максимальный угол отклонения луча от заданного направления отсчета.

2. Допустимое среднее квадратическое отклонение направления отсчета  $\sigma_\theta \approx \Delta\theta/(2\theta_s)$ , где  $\Delta\theta \approx \lambda/D$  — ширина луча, а  $D$  — линейный размер решетки.

3. Дальность, начиная с которой, можно обеспечить сканирование в дальней зоне  $R_m \approx \theta_s D^2/(2\lambda)$ .

4. Среднее квадратическое отклонение дальности до цели  $R_0$   $\sigma_{R_0} \approx R_0 \Delta\theta/(2\theta_s)$ , где  $R_0 < R_m$ .

А. Полагая, что  $\lambda = \sigma_y = \sigma_z = 3$  см, определите сектор сканирования антенной решетки  $2\theta_s$ .

Б. Определите, какова минимальная дальность, для которой будут удовлетворяться условия сканирования в дальней зоне.

В. Для полученного в п. А значения сектора сканирования найдите среднюю квадратическую погрешность определения направления отсчета.

8. Эквивалентность частотной области и времени задержки [27]. Диаграмма направленности адаптивной решетки формируется с помощью процессора. Процессор, работающий во временной области, построенный на основе многоотводной линии задержки, можно заменить эквивалентным процессором, работающим в частотной области согласно алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ).

<sup>1</sup> В адаптивных антенных решетках сканирование может быть осуществлено с помощью изменения параметров опорного сигнала, определяющих направление на источник ожидаемого полезного сигнала. (Прим. ред.)

Временная область	Частотная область
$x_n(t)$ $x_n(t - \tau_n)$ $\sum_{n=0}^{N-1} x_n(t - \tau_n)$	$X_n(\omega)$ $X_n(\omega) e^{-j\omega\tau_n}$ $\sum_{n=0}^{N-1} X_n(\omega) e^{-j\omega\tau_n}$

Фронт плоской волны, падающей на эквидистантную линейную антенную решетку с межэлементным расстоянием  $d$ , формирует сигналы на соседних элементах, отличающиеся только временем задержки:  $\tau_1 = (d/v) \sin \theta_1$ , где  $\theta_1$  — угол между направлением прихода волны и нормалью к раскрыву. Очевидно, что для элементов, расположенных на расстоянии  $nd$  друг от друга  $\tau_n = n\tau_1$ . В классических устройствах обработки сигналов решетки во временной области луч диаграммы в направлении  $\theta_1$  формируется с помощью подключения соответствующих линий задержки к выходам каждого элемента решетки. Обозначим через  $x_n(t)$  — сигнал при поступлении плоской волны на  $n$ -й элемент решетки, а через  $\tau_n$  — его время задержки. Выходной сигнал  $N$ -элементной антенной решетки образуется в результате сложения выходных сигналов  $x_n(t)$  отдельных элементов:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n(t - \tau_n).$$

А. Используя свойства преобразования Фурье, покажите, что каждой временной функции в левой части табл. 2.1 соответствует частотная функция в правой части. Через  $\varphi_n$  в таблице обозначен фазовый сдвиг, эквивалентный времени задержки  $\tau_n$ .

Б. Плоская волна, падающая на решетку под углом  $\theta_1$ , может быть определена выражением

$$x(t, z) = \cos[\omega(t - z/v)] = \cos[\omega t - kz],$$

где  $k$  — волновое число, а  $z$  — координата на оси, совпадающей с направлением распространения волны, которое, в свою очередь, образует угол  $\theta_1$  с нормалью к раскрыву решетки. Покажите, что фазовый сдвиг  $\varphi_n$  и соответствующее ему время задержки  $\tau_n$  связаны соотношением  $\varphi_n = \omega\tau_n$ , где

$$\tau_n = n(d/v) \sin \theta_1.$$

В. Будем полагать, что  $\theta$ ,  $\omega$  и  $t$  дискретны. Для обозначения различных комбинаций значений угловых координат, частот и моментов времени удобно воспользоваться следующей системой индексов:

$$\theta = \theta_l = l\Delta\theta; \quad l = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$\omega = \omega_m = m\Delta\omega; \quad m = 0, 1, \dots, M - 1;$$

$$t = t_i = i\Delta t; \quad i = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Обозначим значения  $X_n(\omega)$  на указанных дискретных частотах (дискретное преобразование Фурье — ДПФ) следующим образом:

$$X_n(m\Delta\omega) = X_n(\omega_m) = X_{mn}.$$

Аналогично можно представить временные отсчеты волнового фронта для  $n$ -го элемента решетки:

$$x_n(i\Delta t) = x_n(t_i) = x_{in}.$$

Тогда

$$x_{in} = x_n(i\Delta t) \leftrightarrow X_n(m\Delta\omega) = X_{mn}.$$

Следовательно, согласно табл. 2.1

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_n(t - \tau_n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} X_n(m\Delta\omega) e^{-j\varphi_{nm}}.$$

Покажите, что  $\varphi_{nl} = nkd \sin \theta_l$ . Покажите также, что выражение последней суммы можно переписать в другом виде с использованием как частоты, так и угловой координаты, т. е.

$$X_m(l\Delta\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n(m\Delta\omega) e^{-j\varphi_{nl}}.$$

Г. Фазовый сдвиг можно представить как  $\varphi_{nl} = (nl)/N$  при  $\sin \theta_l \approx l\Delta\theta$  и  $\Delta\theta = 1/(Nkd)$ . Тогда  $x_{ml} = x_m(l\Delta\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n(m\Delta\omega) e^{-jnl/N}$  имеет вид ДПФ.

Покажите, что  $X_{mn} = X_n(m\Delta\omega)$  можно также выразить с помощью ДПФ, т. е.

$$X_{mn} = \sum_{i=0}^{M-1} x_n(i\Delta t) e^{-jim/N}.$$

Обозначив  $x_n(i\Delta t) = x_{ni}$ , можно записать выражение двумерного ДПФ в виде

$$X_{ml} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} x_{ni} e^{-jim/N} e^{-jnl/N}.$$

Выходной сигнал антенной решетки с учетом изложенного можно получить в форме спектральных отсчетов (как функцию числа лучей), полученных в результате применения двумерного ДПФ к входным сигналам решетки. Эти отсчеты можно получить с помощью алгоритма БПФ.

### Глава 3. ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ: ПРЕДЕЛЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ И ВИНЕРОВСКОЕ РЕШЕНИЕ

Проблеме оптимальной пространственно-временной обработки сигналов в антенных решетках уделялось большое внимание в течение двух последних десятилетий о чем свидетельствует большое количество публикаций на эту тему [1—12]. Оптимальную обработку сигналов в решетках можно, по существу, рассматривать как задачу оптимальной многоканальной фильтрации, основной целью которой является улучшение приема или обнаружения полезного сигнала (случайного или детерминированного), когда наряду с ним присутствуют несколько помех. При этом полезный сигнал может иметь один или несколько неопределенных параметров (таких как пространственное положение его источника, энергия и начальная фаза сигнала), которые необходимо оценить.

Поскольку любая многоэлементная антенная решетка может использоваться для осуществления пространственной фильтрации или, что то же самое, угловой селекции, то многие ранние работы были посвящены в основном вопросам получения требуемых диаграмм направленности с помощью весового суммирования сигналов отдельных элементов решетки. Такой подход кажется разумным, однако, в его основе лежит предположение, что наилучшим способом, обеспечивающим в конечном итоге улучшение эффективности обнаружения сигнала, является формирование некоторой диаграммы направленности решетки.

При более общем подходе к проблеме обнаружения сигнала на форму диаграммы направленности не накладывается каких-либо ограничений. В этом случае можно получить более значительное увеличение эффективности, чем при обычном подходе. Структура процессора для обработки сигналов решетки обусловлена выбранным критерием оптимальности и получается в результате математического решения рассматриваемой задачи. При этом операция формирования диаграммы направленности становится частью алгоритма оптимальной обработки сигналов, хотя такая операция и не была задана в самом начале. Полученное устройство обработки (процессор) будет настолько близко к оптимальному, насколько используемые математические модели соответствуют действительным условиям работы системы.

Методы оптимальной обработки сигналов в антенных решетках можно разделить на два больших класса: 1) реализуемые при идеальных и 2) при неидеальных условиях (при наличии неоднородности распространения). Идеальные условия распространения характеризуются тем, что распространение энергии сигнала происходит в идеальной, неслучайной, недиспергирующей среде, когда волновой фронт полезного сигнала является плоским (или сферическим) и элементы приемной антенной решетки не вносят искажений. Применительно к таким условиям оптимальный процессор называется согласованным с сигналом, имеющим плоский волновой фронт. Любое ухудшение эффективности, обусловленное отличием действительных условий работы от предполагаемых идеальных условий, минимизируется путем использования дополнительных методов (например, введением ограничений). В том случае, когда система работает в упомянутых идеальных условиях, согласование с полезным сигналом обеспечивается весовым суммированием сигналов элементов решетки.

При возникновении неоднородностей в среде распространения или при приеме сигнала предположение о плоском характере волнового фронта не выполняется и весовое суммирование не будет обеспечивать согласование с полезным сигналом. В том случае, когда возникает задача согласования процессора антенной решетки с сигналом с произвольными характеристиками, можно обратиться к методам согласованных решеток, основанным на использовании весовой матрицы для обработки входных данных [17]. Принципиальные достоинства таких процессоров, построенных с учетом пространственного согласования элементов решетки, реализуются при приеме сигналов с неплоским волновым фронтом. При этом согласование может быть выполнено лишь в статистическом смысле.

Определение пределов эффективности в установившемся режиме является важной задачей, поскольку такие пределы характеризуют потенциальные возможности того или иного способа построения системы. Вполне естественно, что проблема оптимальной обработки сигналов в антенных решетках при идеальных условиях распространения привлекла очень большое внимание исследователей и были предложены различные подходы к ее решению применительно к случаям как узкополосных, так и широкополосных сигналов. В наиболее известных и подробно описанных методах предусматривается выбор критерия эффективности, который оптимизируется с помощью соответствующего выбора весового вектора. Такие методы оптимизации широко используются в связных, радио- и гидролокационных системах и были довольно полно рассмотрены в литературе. В последнее время появились сообщения об обработке сигналов в антенных решетках методом максимума энтропии (который наиболее пригоден для решения задач пассивной радиолокации) [13, 14], а также о методах, основанных на анализе собственных значений [15, 16].

Прежде чем приступить к рассмотрению задачи оптимизации обработки сигналов в антенной решетке и ее потенциальных возможностей следует ввести ряд исходных математических положений и дать описание сигналов в решетках. Известно [18], что если составляющие шума отдельных элементов решетки (каналов) не коррелированы взаимно и имеют одинаковую мощность, то равновесное суммирование сигналов всех элементов обеспечивает максимум ОСШ. Однако при воздействии на решетку помехи от точечного источника составляющие шума в каналах будут коррелированными. Таким образом, задача оптимального подбора весовых коэффициентов может рассматриваться как задача подавления коррелированных составляющих шума. Поэтому описание условий приема сигнала с помощью корреляционных матриц играет основную роль при нахождении оптимального решения.

В данной главе обсуждаются также формулировки некоторых наиболее употребимых критериев эффективности антенных решеток на основе описания сигналов с помощью их комплексной огибающей. Примечательным является тот факт, что решения, полученные на основе различных критериев эффективности, в установившемся режиме сходятся (с точностью до постоянного скалярного множителя) к оптимальному винеровскому решению. Часто возникает проблема разработки процессора антенной решетки, обеспечивающего оптимальное обнаружение сигналов. На базе классической статистической теории обнаружения можно определить процессор, основанный на тесте отношения правдоподобия, который, в свою очередь, приводит к канонической структуре процессора решетки. Такая каноническая структура содержит устройство весовой обработки, очень близкой к обработке (в установившемся режиме), найденной ранее для указанных критериев эффективности. Это еще раз подчеркивает то обстоятельство, что проблемы оптимизации, казавшиеся в начале совершенно различными, в действительности обладают внутренним единством, которое обнаруживается при наиболее общем подходе к обработке сигналов в антенной решетке.

При определении оптимальных значений весовых коэффициентов целесообразно представлять огибающую сигнала и адаптивные весовые коэффициенты в комплексной форме. Поэтому далее кратко рассматривается сущность такого комплексного представления.

В любой системе присутствуют только действительные сигналы, а взаимосвязь между этими действительными сигналами и соответствующими им представлениями с использованием комплексной огибающей определяется как

$$\begin{array}{l} \text{действительный} \\ \text{сигнал} \end{array} = \operatorname{Re} \left\{ \left( \begin{array}{l} \text{представление комплекс-} \\ \text{ной огибающей} \end{array} \right) e^{j\omega_0 t} \right\}, \quad (3.1)$$

где  $\operatorname{Re} \{ \cdot \}$  обозначает «действительную часть» выражения в скобках. Такое представление более подробно рассматривается в приложении Б. Выражение (1.4) в комплексной форме имеет вид

$$y(t) = \operatorname{Re} \{ x^T w^* e^{j\omega_0 t} \} = \operatorname{Re} \{ w^\dagger x e^{j\omega_0 t} \}, \quad (3.2)$$

где  $w^\dagger x$  — комплексная огибающая  $y(t)$ ; знак  $*$  используется для обозначения комплексно-сопряженной величины; знак  $\sim$  обозначает операцию транспортирования и перехода к комплексно-сопряженным величинам, т. е.  $[(\cdot)^*]^T$ . Близким по значению к комплексному представлению является понятие аналитического сигнала  $\psi(t)$ , для которого  $y(t) \triangleq \operatorname{Re} \{ \psi(t) \}$  и

$$\psi(t) \triangleq y(t) + j\check{y}(t), \quad (3.3)$$

где  $\check{y}(t)$  — преобразование Гильберта для  $y(t)$ . Отсюда следует, что при комплексном представлении весовых коэффициентов  $w = \omega_1 + j\omega_2$  и использовании аналитического представления входного сигнала в виде  $x_1 + jx_2$ , действительный выходной сигнал будет определяться выражением

$$y(t) = \operatorname{Re} \{ (\omega_1 - j\omega_2) (x_1(t) + jx_2(t)) \} = \omega_1 x_1(t) + \omega_2 x_2(t), \quad (3.4)$$

где  $x_2(t) = \check{x}_1(t)$ . Отметим, что произведение комплексной огибающей действительного сигнала  $y(t)$  на  $e^{j\omega_0 t}$  равно  $\psi(t)$ . Следствием рассмотренного способа описания сигналов и весовых коэффициентов является два различных подхода к проблеме нахождения оптимального весового вектора, а именно:

1) переформулировка задачи, при которой вместо комплексных величин используются только действительные; это позволяет применять обычные методы оптимизации;

2) переопределение некоторых понятий и операций (таких, как ковариационная матрица, градиент и т. д.), позволяющие при оптимизации использовать комплексную форму представления величин.

Многочисленные примеры обоих подходов можно найти в литературе по адаптивным антенным решеткам. Поскольку не существует бесспорных преимуществ одного подхода перед другим, целесообразно рассмотреть особенности применения обоих подходов.

### 3.1.1. Формулировка задачи при использовании действительных величин

Пусть  $z_1$  является первой составляющей вектора  $\mathbf{z}$ , имеющего  $n$  составляющих ( $\mathbf{z}$  может представлять весовой вектор, вектор сигнала и т. д.), а  $x_1$  и  $x_2$  — соответственно действительная и мнимая части этой составляющей  $z_1$ . Аналогично определим

$$z_k = x_{2k-1} + jx_{2k}. \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что комплексный вектор  $\mathbf{z}$  из  $n$  составляющих может быть полностью представлен действительным вектором  $\mathbf{x}$  из  $2n$  составляющих. Представляя все комплексные векторы соответствующими действительными, можно получить решения различных задач для систем с адаптивными антенными решетками, используя привычные математические понятия и процедуры. Представив таким образом единственный комплексный весовой коэффициент  $\omega_1 + j\omega_2$  и комплексный сигнал  $x_1 + jx_2$ , получим

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} = [\omega_1 \ \omega_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2, \quad (3.6)$$

что соответствует выражению (3.4). Если воспользоваться рассмотренным подходом, то можно установить, что отдельные недиагональные элементы соответствующей корреляционной матрицы (которая определяется далее) будут равны нулю. Этот факт не влияет на результаты данной главы и не будет здесь анализироваться, однако он более подробно будет рассмотрен в качестве примера в гл. 11.

### 3.1.2. Корреляционные матрицы действительных сигналов

Поскольку сигналы и шум в системах с адаптивными решетками являются случайными процессами и определяются своими статистическими характеристиками, то оценивать эффективность систем удобно с помощью средних значений. При оценивании средних значений приходится использовать статистические характеристики второго порядка, такие как корреляционная и взаимная корреляционная матрицы. Степень корреляции между составляющими двух случайных векторов определяется элементами взаимной корреляционной матрицы этих векторов [19]. Например, матрица взаимной корреляции стационарно связанных случайных векторов  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  определяется как

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) \triangleq E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{y}^T(t - \tau) \}, \quad (3.7)$$

где  $E$  — математическое ожидание и  $\tau$  время задержки. Аналогично определяется корреляционная матрица стационарного вектора:

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) \triangleq E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t - \tau) \}. \quad (3.8)$$

Если вектор сигнала  $\mathbf{x}(t)$  состоит из некоррелированных составляющих полезного сигнала и шума, так что

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.9)$$

то

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \mathbf{R}_{ss}(\tau) + \mathbf{R}_{nn}(\tau). \quad (3.10)$$

При анализе свойств системы с адаптивной антенной решеткой наиболее важное значение имеют те корреляционные матрицы, для которых  $\tau = 0$ . В этом случае вместо  $\mathbf{R}_{xy}(0)$  и  $\mathbf{R}_{xx}(0)$  будет использоваться упрощенная запись:

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{xx}(0), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}_{xy} = \mathbf{R}_{xy}(0). \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что для  $N$ -мерного вектора  $\mathbf{x}(t)$  корреляционная матрица, по определению, равна

$$\mathbf{R}_{xx} \stackrel{\Delta}{=} E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \} = \begin{bmatrix} \overline{x_1(t) x_1(t)} & \overline{x_1(t) x_2(t)} & \dots & \overline{x_1(t) x_N(t)} \\ \overline{x_2(t) x_1(t)} & \overline{x_2(t) x_2(t)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{x_N(t) x_1(t)} & \dots & \dots & \overline{x_N(t) x_N(t)} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

где  $\overline{x_i(t) x_h(t)}$  обозначает  $E \{ x_i(t) x_h(t) \}$ .

Из определения следует, что

$$\mathbf{R}_{xx}^T = \mathbf{R}_{xx} \text{ и } \mathbf{R}_{xy}^T = \mathbf{R}_{yx}, \quad (3.14)$$

т. е. корреляционная матрица является симметричной. В общем случае корреляционная матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  является только положительно полуопределенной и обратная матрица  $\mathbf{R}_{xx}^{-1}$  может не существовать. Поскольку на практике мы располагаем только оценками корреляционной матрицы и такие оценки базируются на отдельных временных отсчетах, то при достаточном числе отсчетов для сигнала с ненулевой шириной полосы частот можно гарантировать положительную определенность и существование обратной матрицы. Например, векторы сигнала  $\mathbf{x}(t)$  и шума  $\mathbf{n}(t)$  в (3.9) часто содержат некоррелированные составляющие собственного шума усилителей и поэтому их корреляционные матрицы можно считать положительно определенными. Однако вектор полезного сигнала  $\mathbf{s}(t)$  может содержать коррелированные составляющие, как, например, в случае достижения фронтом однородной плоской волны одновременно двух или более элементов решетки, когда на выходах элементов образуются одинаковые синфазные составляющие сигналов. Поэтому корреляционная матрица  $\mathbf{R}_{ss}$  является лишь положительно полуопределенной, а ее обратной матрицы  $\mathbf{R}_{ss}^{-1}$  может не существовать.

Для процессора на основе многоотводной линии задержки из разд. 2.5 рассмотрим корреляционную матрицу сигналов размером  $N \times N$

$$\mathbf{R}'_{xx}(\tau) \triangleq E \{ \mathbf{x}'(t) \mathbf{x}'^T(t - \tau) \}, \quad (3.15)$$

где  $\mathbf{x}'(t)$  — действительный вектор сигнала многоканального процессора, определяемой формулой (2.52). Аналогичным образом для  $NL$ -мерного вектора всех сигналов, наблюдаемых на отводах линии задержки, корреляционная матрица будет определяться выражением

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) \triangleq E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t - \tau) \}. \quad (3.16)$$



Подставив (2.54) в (3.16), получим

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}'(t-\Delta) \\ \vdots \\ \mathbf{x}'[t-(L-1)\Delta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T(t-\tau) \mathbf{x}'^T(t-\tau-\Delta) \dots \mathbf{x}'^T[t-\tau-(L-1)\Delta] \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.17)$$

а с учетом (3.15)

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{xx}(\tau) & \mathbf{R}'_{xx}(\tau+\Delta) \dots \mathbf{R}'_{xx}[\tau+(L-1)\Delta] \\ \mathbf{R}'_{xx}^T(\tau-\Delta) & \mathbf{R}'_{xx}(\tau) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{R}'_{xx}^T[\tau-(L-1)\Delta] \dots & \mathbf{R}'_{xx}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Корреляционная матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  размера  $NL \times NL$ , определяемая (3.18), является теплицевой матрицей, имеющей одинаковые элементы на каждой диагонали [20]. Теплицева форма удобна тем, что вся матрица определяется первой строкой подматриц  $\mathbf{R}'_{xx}(\tau)$ ,  $\mathbf{R}'_{xx}(\tau+\Delta)$ , ...,  $\mathbf{R}'_{xx}[\tau+(L-1)\Delta]$ . Поэтому для получения полной информации, содержащейся в  $\mathbf{R}_{xx}(\tau)$ , необходимо осуществить запоминание матрицы, имеющей размер  $N \times NL$ .

Понятие ковариационной матрицы тесно связано с понятием корреляционной матрицы. Взаимная ковариационная матрица векторов  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  определяется выражением

$$\text{cov}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] \triangleq E \{(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}})^T\}, \quad (3.19)$$

где  $\bar{\mathbf{x}} = E \{\mathbf{x}(t)\}$  и  $\bar{\mathbf{y}} = E \{\mathbf{y}(t)\}$ .

Поэтому для процессов с нулевым средним значением и  $\tau=0$  корреляционные и ковариационные матрицы становятся одинаковыми и в литературе по адаптивным антенным решеткам одинаково часто используются оба эти понятия.

Далее будет показано, что при рассмотрении вопросов обработки широкополосных сигналов в антенных решетках можно пользоваться представлением сигналов как в частотной, так и во временной областях. Эти два представления эквивалентны и связаны преобразованием Фурье  $\bar{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ . В результате применения преобразования Фурье к корреляционной матрице получают матрицу взаимных спектральных плотностей

$$\Phi_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{R}_{xx}(\tau)\}. \quad (3.20)$$

Эта матрица представляет в частотной области информацию, содержащуюся в корреляционной матрице.

### 3.1.3. Переопределение некоторых понятий на случай комплексных векторов

В процессе решения задач оптимизации по различным критериям (в результате которого должен определяться оптимальный весовой вектор) используются понятия норм, градиентов и ковариационных (или

корреляционных) матриц комплексных векторов. Рассмотрим эти понятия для комплексных, а также и для действительных векторов.

Норма вектора в гильбертовом пространстве, обозначаемая  $\|x\|$ , определяет длину этого вектора. Для действительного вектора

$$\|x\| \triangleq \sqrt{x^T x}, \quad (3.21)$$

для комплексного вектора

$$\|x\| \triangleq \sqrt{x^H x}. \quad (3.22)$$

Оператор градиента  $\nabla_y$  ставит в соответствие скалярной функции  $f(y)$  векторного аргумента  $y$  вектор, составляющими которого являются частные производные функции  $f(\cdot)$  по соответствующим составляющим вектора  $y$ . В случае действительных переменных оператор градиента определяется соотношением

$$\nabla_y \triangleq \left[ \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} \right]^T, \quad (3.23)$$

так что

$$\nabla_y f(y) = \frac{\partial f}{\partial y_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} e_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} e_n, \quad (3.24)$$

где  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — семейство единичных базисных векторов.

В случае комплексного вектора  $y$  каждый его элемент  $y_h$  имеет действительную и мнимую части:

$$y_h = x_h + jz_h. \quad (3.25)$$

Поэтому каждая частная производная в (3.24) теперь содержит действительную и мнимую составляющие, так что [21]

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{(j) \partial f}{\partial z_k}. \quad (3.26)$$

При рассмотрении задач оптимизации в данной главе часто приходится определять градиент по  $x$  скалярной величины  $x^T a = a^T x$  и квадратичной формы  $x^T A x$ , где  $A$  — симметричная матрица. Отметим, что  $x^T a$  является скалярным произведением

$$(x, a) = x^T a = a^T x. \quad (3.27)$$

Если матрица  $A$  имеет диадную структуру, то квадратичная форма  $x^T A x$  является квадратом скалярного произведения

$$x^T A x = (x, v)^2, \quad (3.28)$$

где

$$A = v v^T. \quad (3.29)$$

След произведения матриц, определяемый соотношением

$$\text{tr}[AB^T] = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ik}, \quad (3.30)$$

обладает всеми свойствами скалярного произведения. Поэтому формулы для градиентов следов различных произведений матриц оказываются весьма полезными при решении задач оптимизации. В приложении В представлен ряд таких формул, из которых следует, что для действительных переменных

$$\nabla_x (y^T A x) = y^T A, \quad (3.31)$$

$$\nabla_x (x^T A x) = 2A x, \quad (3.32)$$

тогда как для комплексных переменных соответствующие градиенты будут иметь вид

$$\nabla_x (y^\dagger A x) = y^\dagger A, \quad (3.33)$$

$$\nabla_x (x^\dagger A x) = 2A x. \quad (3.34)$$

### 3.1.4. Корреляционные матрицы комплексных сигналов

Определения корреляционной и ковариационной матриц в случае комплексных векторов должны быть изменены по сравнению с аналогичными определениями (3.7) и (3.8) для действительных векторов, а именно:

$$\mathbf{R}_{xx} \triangleq E \{x^* x^T\}, \quad \mathbf{R}_{xy} \triangleq E \{x^* y^T\}. \quad (3.35)$$

В литературе встречаются также и другие определения корреляционных матриц:

$$\mathbf{R}_{xx} \triangleq E \{x x^\dagger\}, \quad \mathbf{R}_{xy} \triangleq E \{x y^\dagger\}. \quad (3.36)$$

Матрицы, определяемые согласно (3.36), являются комплексно-сопряженными по отношению к корреляционным матрицам (3.35). Если последовательно придерживаться какого-либо одного определения, то получаемые результаты будут одинаковыми. Поэтому выбор того или иного определения не является существенным. При любом определении выполняются условия

$$\mathbf{R}_{xx}^\dagger = \mathbf{R}_{xx}, \quad \mathbf{R}_{xy}^\dagger = \mathbf{R}_{yx}. \quad (3.37)$$

Отсюда следует, что корреляционная матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  является эрмитовой, тогда как взаимная корреляционная матрица в общем случае не является эрмитовой (поскольку  $\mathbf{R}_{xy}^\dagger \neq \mathbf{R}_{yx}$ ). Положительная определенность или полуопределенность корреляционной матрицы зависит от того, какой из векторов рассматривается:  $x(t)$ ,  $s(t)$  или  $p(t)$ .

## 3.2. ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ В ОБЫЧНЫХ И НАСТРОЕННЫХ НА СИГНАЛ АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

В различных приложениях наиболее часто встречаются два типа антенных решеток: обычные (рис. 3.1) и настроенные на сигнал (рис. 3.2). Настроенная на сигнал антенная решетка становится эффективной в тех случаях, когда направление прихода полезного сиг-

нала априорно известно и эта информация может быть использована для получения совпадающих по времени полезных сигналов в каждом канале. Одно из достоинств систем с решеткой, настроенной на сигнал, заключается в возможности определения совокупности весовых коэффициентов процессора независимо от временной структуры полезного сигнала. При этом обеспечивается формирование неискаженного выходного сигнала для любой формы волны, падающей на антенную решетку с известного направления [22]. Такой процессор становится полезным для выделения кратковременных сигналов.

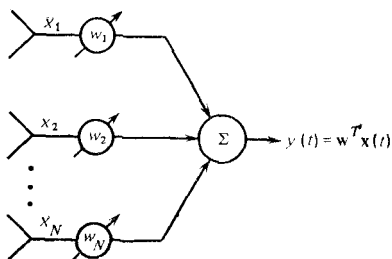


Рис. 3.1. Структурная схема обычной узкополосной антенной решетки

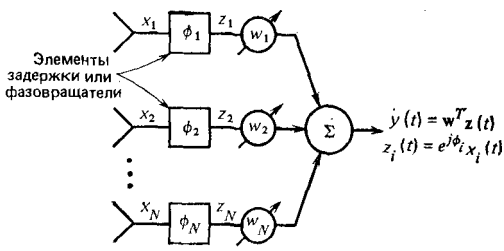


Рис. 3.2. Структурная схема узкополосной настроенной на сигнал антенной решетки

Выходные сигналы решеток, показанных на рис. 3.1 и 3.2, могут быть записаны соответственно в виде

$$y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t), \quad y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{z}(t), \quad (3.38)$$

где  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$  — вектор принимаемых сигналов, являющихся комплексными функциями. Вектор шума  $\mathbf{n}(t)$  может считаться стационарным и эргодическим процессом, содержащим шумовую помеху и собственный шум приемника, которые не зависят от сигнала. Вектор сигнала  $\mathbf{s}(t)$  создается точечным (по углу) источником сигнала

$$\mathbf{s}(t) = \sqrt{S} e^{j\omega_0 t}, \quad (3.39)$$

где  $\omega_0$  — частота несущей,  $S$  — мощность сигнала. Если элементы решетки идентичны, то сигналы на выходе каждого элемента отличаются только фазовыми сдвигами (за счет распространения по раскрытию решетки) относительно сигнала на выходе первого элемента. Таким образом, вектор сигнала  $\mathbf{s}(t)$  можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T(t) = & [\sqrt{S} e^{j\omega_0 t}, \sqrt{S} e^{j\omega_0 t + \theta_1}, \dots \\ & \dots, \sqrt{S} e^{j\omega_0 t + \theta_{N-1}}] = \mathbf{s}(t) \mathbf{v}^T, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где

$$\mathbf{v}^T = [1, e^{j\theta_1}, \dots, e^{j\theta_{N-1}}]. \quad (3.41)$$

Следовательно, вектор принятого сигнала для обычной антенной решетки (рис. 3.1) можно записать как

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) \mathbf{v} + \mathbf{n}(t). \quad (3.42)$$

Вектор принятого сигнала (после прохождения элементов временной задержки или фазовращателей) для решетки, настроенной на сигнал (рис. 3.2), будет определяться формулой

$$z(t) = s(t) \mathbf{1} + \mathbf{n}'(t), \quad (3.43)$$

где теперь вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ , так как составляющие полезного сигнала в каждом канале согласованы во времени и потому идентичны. Составляющие вектора шума принимают значения

$$n'_i(t) = n_i(t) e^{j\varphi_i}. \quad (3.44)$$

В дальнейшем при решении задач оптимизации потребуются четыре типа корреляционных матриц. Эти матрицы в случае узкополосных некоррелированных процессов имеют следующий вид:

$$\mathbf{R}_{ss} \triangleq E \{s^*(t) s^T(t)\} = S \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T, \quad (3.45)$$

где  $S$  — мощность сигнала,

$$\mathbf{R}_{nn} \triangleq E \{\mathbf{n}^*(t) \mathbf{n}^T(t)\}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{r}_{xs} \triangleq E \{\mathbf{x}^*(t) s(t)\} = S \mathbf{v}^*, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{R}_{xx} \triangleq E \{\mathbf{x}^*(t) \mathbf{x}^T(t)\} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{nn}. \quad (3.48)$$

### 3.3. ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В АНТЕННОЙ РЕШЕТКЕ УЗКОПОЛОСНЫХ СИСТЕМ

Как уже отмечалось, при синтезе адаптивного процессора (рис. 1.1), осуществляющего подстройку весовых коэффициентов для каждого элемента антенной решетки, можно использовать несколько различных критериев эффективности. Рассмотрим теперь математическую формулировку четырех наиболее известных критериев эффективности на основе описания сигналов с помощью их комплексной огибающей. Такими критериями эффективности являются:

1. Средняя квадратическая ошибка (СКО).
2. Отношение сигнал-шум (ОСШ).
3. Функция правдоподобия (ФП).
4. Дисперсия шума (ДШ).

Применение указанных критериев будет рассмотрено на примере разработки адаптивных процессов для узкополосных систем. Следует напомнить, что при использовании узкополосных сигналов в адаптивном процессоре осуществляется комплексное взвешивание в каждом канале. При широкополосных же сигналах адаптивный процессор состоит из набора линейных фильтров, обычно реализуемых на основе многоотводных линий задержки, в каждом канале антенной решетки. Потому анализ узкополосной обработки представляется более простым, хотя и широкополосный процессор можно рассматривать как весовой сумматор с частотно-зависимыми комплексными весовыми коэффициентами.

Сначала будет находиться оптимальный комплексный весовой вектор для каждого из рассматриваемых критериев эффективности. При этом математические выкладки будут даваться для действительных ве-

личин, а затем на их основе будут находиться соответствующие комплексные решения. Будет показано, что решение для каждого критерия эффективности связано с так называемым оптимальным винеровским решением.

### 3.3.1. Критерий средней квадратической ошибки

Критерий СКО был предложен в работе [5] для обычной конфигурации антенной решетки. В дальнейшем на основе этого критерия были получены другие процедуры [23—25]. Предположим, что полезный сигнал  $s(t)$  известен и его форма определяется опорным сигналом  $d(t)$ . На практике это предположение никогда строго не выполняется из-за того, что сигнал в системе связи не может быть известен априорно (если он служит для передачи информации), и поэтому полезный сигнал следует считать неизвестным в некотором смысле. Тем не менее

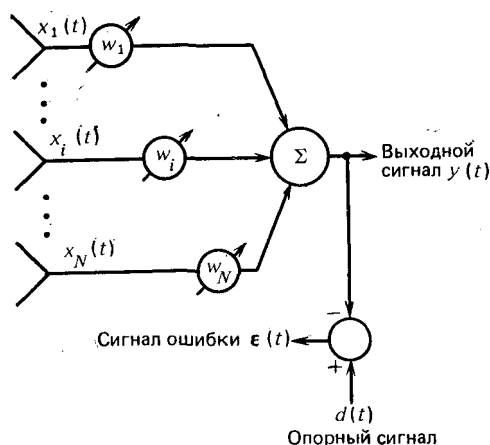


Рис. 3.3. Базовая структурная схема адаптивной антенной решетки при известном полезном сигнале

обычно имеется достаточно информации о полезном сигнале и приближенно соответствующий ему опорный сигнал  $d(t)$  может быть получен в результате некоторой обработки выходного сигнала антенной решетки. Например, если  $s(t)$  является амплитудно-модулированным сигналом, то для удовлетворительной работы системы в качестве опорного сигнала  $d(t)$  можно использовать колебания несущей сигнала  $s(t)$ . Поэтому использование понятия «опорного» сигнала оказывается удобным приемом, позволяющим разрабатывать адаптивный процессор так, как если бы имелась полная информация о полезном сигнале.

Разность между желательной реакцией антенной решетки и ее действительным выходным сигналом называется сигналом ошибки и, как следует из рис. 3.3, равна

$$\varepsilon(t) = d(t) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t). \quad (3.49)$$

Квадрат этой ошибки

$$\varepsilon^2(t) = d^2(t) - 2d(t) \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{w}. \quad (3.50)$$

Найдя математические ожидания для обеих частей (3.50), получаем

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = \overline{d^2(t)} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{r}_{xd} + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}, \quad (3.51)$$

где

$$\mathbf{r}_{xd} = \begin{bmatrix} \overline{x_1(t) d(t)} \\ \overline{x_2(t) d(t)} \\ \vdots \\ \overline{x_N(t) d(t)} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Поскольку  $d(t) = s(t)$ , то из (3.39) следует, что  $\overline{d^2(t)} = S$ , и поэтому

$$E \{ \varepsilon^2(t) \} = S - 2\mathbf{w}^T \mathbf{r}_{xd} + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}. \quad (3.53)$$

Задача оптимизации заключается в минимизации (3.53) с помощью соответствующего выбора весового вектора  $\mathbf{w}$ . Поскольку (3.53) является квадратичной функцией  $\mathbf{w}$  и матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  положительно определена, то эта функция имеет единственный экстремум — минимум. Поэтому величина  $\mathbf{w}$ , соответствующая минимуму функции  $E \{ \varepsilon^2(t) \}$ , может быть найдена в результате приравнивания нулю градиента СКО (3.53), т. е.

$$\nabla_{\mathbf{w}} \overline{\varepsilon^2} = 0. \quad (3.54)$$

Поскольку

$$\nabla_{\mathbf{w}} \overline{\varepsilon^2} = -2\mathbf{r}_{xd} + 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}, \quad (3.55)$$

то оптимальный весовой вектор определяется соотношением

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{r}_{xd} \quad \text{или} \quad \mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.56) для  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$  является уравнением Винера—Хопфа в матричной форме и поэтому  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$  носит название оптимального винерского решения.

Если положить  $d(t) = s(t)$ , то, учитывая (3.39) и (3.42), можно получить

$$\mathbf{r}_{xd} = E \{ \mathbf{x}d \} = S\mathbf{v}, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{w}_{\text{сво}} = S\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{v}, \quad (3.58)$$

где предполагается, что  $\mathbf{R}_{xx}$  не вырождена, и поэтому существует  $\mathbf{R}_{xx}^{-1}$ . Приняв в (3.53)  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{сво}}$ , получим минимальную СКО

$$\overline{\varepsilon_{\text{min}}^2} = S - \mathbf{r}_{xd}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}. \quad (3.59)$$

В случае комплексных величин выражение (3.53) принимает вид

$$\overline{|\varepsilon(t)|^2} = S - 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{w}^\dagger \mathbf{r}_{xd} \} + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}, \quad (3.60)$$

а (3.58) и (3.59)

$$\mathbf{w}_{\text{сво}} = S\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{v}^*, \quad (3.61)$$

$$\overline{|\varepsilon|_{\text{min}}^2} = S - \mathbf{r}_{xd}^\dagger \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}. \quad (3.62)$$

### 3.3.2. Критерий отношения сигнал-шум

Адаптивные процессоры, действие которых основано на максимизации ОСШ, были разработаны для систем связи и обнаружения при обычной конфигурации антенной решетки [26—28]. Выходной сигнал адаптивной решетки, показанной на рис. 3.1, можно представить в следующем виде:

$$y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t), \quad (3.63)$$

где вектор входного сигнала представляет собой сумму сигнала  $\mathbf{s}(t)$ , и шума  $\mathbf{n}(t)$ , т. е.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (3.64)$$

Поэтому сигнальную и шумовую составляющие выходного сигнала антенной решетки можно записать как

$$y_s(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{s}(t) = \mathbf{s}^T(t) \mathbf{w}, \quad (3.65)$$

$$y_n(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{n}(t) = \mathbf{n}^T(t) \mathbf{w}, \quad (3.66)$$

где

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_N(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_N(t) \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Мощность выходного сигнала будет

$$E\{|y_s(t)|^2\} = |\overline{\mathbf{w}^T \mathbf{s}}|^2 \quad (3.68)$$

и мощность выходного шума

$$E\{|y_n(t)|^2\} = |\overline{\mathbf{w}^T \mathbf{n}}|^2. \quad (3.69)$$

Поэтому выходное ОСШ будет определяться как

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{|\overline{\mathbf{w}^T \mathbf{s}}|^2}{|\overline{\mathbf{w}^T \mathbf{n}}|^2} = \frac{\mathbf{w}^T [\overline{\mathbf{s}\mathbf{s}^T}] \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T [\overline{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}] \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}}. \quad (3.70)$$

Выражение (3.70) можно представить также в виде

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1/2} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{R}_{nn}^{-1/2} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{z}}, \quad (3.71)$$

где

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{R}_{nn}^{1/2} \mathbf{w}. \quad (3.72)$$

Числитель правой части (3.71) представляет собой квадратичную форму и принимает значения между минимальным и максимальным собственными значениями симметричной матрицы  $\mathbf{R}_{nn}^{-1/2} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{R}_{nn}^{-1/2}$  (или, что то же самое, матрицы  $\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{R}_{ss}$ ) [29]. Оптимизация (3.71) с помощью соответствующего выбора весового вектора  $\mathbf{w}$  сводится таким образом к



задаче нахождения собственного вектора, причем  $(s/n)$  должно удовлетворять соотношению [30]

$$\mathbf{R}_{ss}\mathbf{w} = (s/n) \mathbf{R}_{nn}\mathbf{w}, \quad (3.73)$$

в котором  $(s/n)$  теперь представляет собственное значение симметричной матрицы  $\mathbf{R}_{nn}^{-1/2}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{R}_{nn}^{-1/2}$ . Максимальное собственное значение, удовлетворяющее (3.73), обозначается как  $(s/n)_{\text{опт}}$ . Собственному значению  $(s/n)_{\text{опт}}$  соответствует собственный вектор  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$ , являющийся оптимальным весовым вектором для антенной решетки. Таким образом,

$$\mathbf{R}_{ss}\mathbf{w}_{\text{опт}} = (s/n)_{\text{опт}}\mathbf{R}_{nn}\mathbf{w}_{\text{опт}}. \quad (3.74)$$

Подстановка (3.70) при  $(s/n) = (s/n)_{\text{опт}}$  в (3.74) дает

$$\mathbf{R}_{ss}\mathbf{w}_{\text{опт}} = \frac{\mathbf{w}_{\text{опт}}^T \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{опт}}}{\mathbf{w}_{\text{опт}}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}_{\text{опт}}} \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}_{\text{опт}}. \quad (3.75)$$

Подставляя  $\mathbf{R}_{ss} = [\overline{ss^T}]$  и учитывая, что  $\mathbf{s}^T \mathbf{w}_{\text{опт}}$  является скалярной величиной, входящей в обе части выражения (3.75), которую можно сократить, получаем

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{w}_{\text{опт}}^T \mathbf{s}}{\mathbf{w}_{\text{опт}}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}_{\text{опт}}} \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}_{\text{опт}}. \quad (3.76)$$

Отношение  $(\mathbf{w}_{\text{опт}}^T \mathbf{s} / (\mathbf{w}_{\text{опт}}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}_{\text{опт}}))$  представляет собой просто комплексное число, которое обозначим через  $c$ , т. е.

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = (1/c) \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{s} \quad (3.77)$$

или

$$\mathbf{w}_{\text{осп}} = \alpha \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}, \quad (3.78)$$

где  $\alpha = \sqrt{S}/c$ , как следует из (3.40).

Максимальное значение  $(s/n)_{\text{опт}}$  легко найти с помощью преобразования системы координат. Положительно определенная эрмитова матрица  $\mathbf{R}_{nn}$  с помощью невырожденного преобразования может быть приведена к диагональному виду. Это преобразование может быть выбрано так, чтобы шумовые составляющие на выходах всех каналов были некоррелированными и имели одинаковую мощность. Обозначим матрицу такого преобразования через  $\mathbf{A}$  (рис. 3.4):

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad (3.79)$$

$$\mathbf{n}' = \mathbf{A}\mathbf{n}, \quad (3.80)$$

где  $\mathbf{s}'$ ,  $\mathbf{n}'$  — преобразованные величины.

Тогда составляющие сигнала и шума на выходе антенной решетки будут соответственно определяться выражениями:

$$y_s = \mathbf{w}'^T \mathbf{s}' = \mathbf{w}'^T \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad (3.81)$$

$$y_n = \mathbf{w}'^T \mathbf{n}' = \mathbf{w}'^T \mathbf{A}\mathbf{n}. \quad (3.82)$$

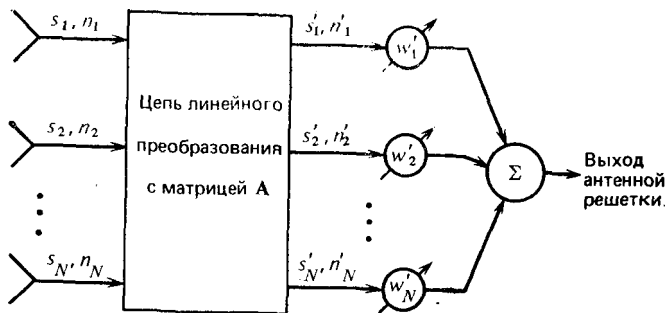


Рис. 3.4. Структурная схема антенной решетки с линейным преобразованием сигналов, эквивалентная схеме решетки на рис. 3.1

Для того чтобы выходные сигналы системы рис. 3.4 были эквивалентны выходным сигналам системы рис. 3.1, необходимо

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{w}'. \quad (3.83)$$

Мощность шума на выходе системы, структурная схема которой приведена на рис. 3.4, определяется выражением

$$E \{ |y_n(t)|^2 \} = E \{ |\mathbf{w}'^T \mathbf{n}'|^2 \} = \mathbf{w}'^T E \{ \mathbf{n}' \mathbf{n}'^T \} \mathbf{w}'. \quad (3.84)$$

Поскольку матрица преобразования  $\mathbf{A}$  декоррелирует различные шумовые составляющие и выравнивает их мощности, то ковариационная матрица шумового процесса  $\mathbf{n}'(t)$  является единичной, т. е.

$$E \{ \mathbf{n}' \mathbf{n}'^T \} = \mathbf{I}_N. \quad (3.85)$$

Тогда из (3.84) и (3.85) следует

$$E \{ |y_n(t)|^2 \} = \mathbf{w}'^T \mathbf{w}' = \|\mathbf{w}'\|^2. \quad (3.86)$$

С другой стороны,

$$E \{ |y_n(t)|^2 \} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}. \quad (3.87)$$

Учитывая (3.83), получаем

$$E \{ |y_n(t)|^2 \} = \mathbf{w}'^T \mathbf{A} \mathbf{R}_{nn} \mathbf{A}^T \mathbf{w}'. \quad (3.88)$$

Из сравнения (3.88) и (3.86) следует, что

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{nn} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_N \quad (3.89)$$

или

$$\mathbf{R}_{nn} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1}. \quad (3.90)$$

Сигнал на выходе системы, схема которой показана на рис. 3.4, определяется выражением (3.81). Применяв к (3.81) неравенство Коши—Шварца (см. приложение Г и [4]), можно найти верхнюю границу для мощности выходного сигнала антенной решетки:

$$|y_s(t)|^2 \leq \|\mathbf{w}'\|^2 \|s'\|^2, \quad (3.91)$$

где

$$\|s'\|^2 = s'^T s', \quad \|\mathbf{w}'\|^2 = \mathbf{w}'^T \mathbf{w}'. \quad (3.92)$$

С учетом (3.86) и (3.91) максимальное ОСШ будет

$$\text{ОСШ}_{\max} = \|s'\|^2. \quad (3.93)$$

Подставляя (3.79) в (3.93) и учитывая (3.90), получаем

$$\text{ОСШ}_{\text{опт}} = s^T R_{nn}^{-1} s. \quad (3.94)$$

В случае комплексных величин выражение (3.70) принимает вид

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{w^\dagger [s^* s^T] w}{w^\dagger [n^* n^T] w} = \frac{w^\dagger R_{ss} w}{w^\dagger R_{nn} w}. \quad (3.95)$$

При этом выражение (3.78) меняется на

$$w_{\text{опт}} = \alpha R_{nn}^{-1} v^*, \quad (3.96)$$

(3.80) превращается в

$$R_{nn} = [A^T A^*]^{-1}, \quad (3.97)$$

а (3.94) принимает вид

$$\text{ОСШ}_{\text{опт}} = s^T R_{nn}^{-1} s^*. \quad (3.98)$$

Выбор весового вектора адаптивного процессора из условия  $R_{nn} w = \alpha v^*$  означает, что в качестве критерия эффективности было принято выходное ОСШ даже в стационарных условиях работы (когда отсутствует как полезный сигнал, так и помеха). Однако иногда желательно пожертвовать ОСШ для того, чтобы получить приемлемый уровень боковых лепестков диаграммы. Далее рассматривается другой критерий эффективности, являющийся более подходящим в отношении формы диаграммы направленности.

Предположим, что в нормальных стационарных условиях приема наиболее желательным является весовой вектор  $w_q$  (в нем учитывается компромиссный подход разработчика к выбору КНД, уровня боковых лепестков диаграммы направленности и других параметров). Пусть при указанных условиях приема ковариационная матрица сигнала равна  $R_{nnq}$ . Определим вектор-столбец  $t$  соотношением

$$R_{nnq} w_q = \alpha t^*. \quad (3.99)$$

Из сравнения (3.99) и (3.96) видно, что максимизируемым ОСШ будет не (3.95), а модифицированное отношение, определяемое формулой

$$\frac{|w^\dagger t|^2}{w^\dagger R_{nn} w}. \quad (3.100)$$

Это отношение является более общим критерием, чем критерий ОСШ, и часто используется на практике. Вектор  $t$  называют обобщенным сигнальным вектором, а отношение (3.100) — обобщенным отношением сигнал-шум (ООСШ).

Адаптивная антенная решетка, схема которой показана на рис. 3.1, может рассматриваться как обобщенный вариант когерентного устройства подавления помех, принимаемых по боковым лепесткам диаграммы направленности, обычно называемым компенсатором помех, принимаемых по боковым лепесткам (КБЛ). В качестве иллюстрации

применения критерия ОСШ покажем, что КБЛ можно рассматривать как частный случай адаптивной антенной решетки.

Функциональная схема стандартного компенсатора помех, принимаемых по боковым лепесткам, показана на рис. 3.5. Система состоит из основной антенны с высоким КНД, обозначаемой символом 0, и  $N$  вспомогательных антенн. Вспомогательные антенны имеют КНД, определяемые приблизительно средним уровнем боковых лепестков основной антенны [18, 31]. Иногда удобно, чтобы весовые коэффициенты

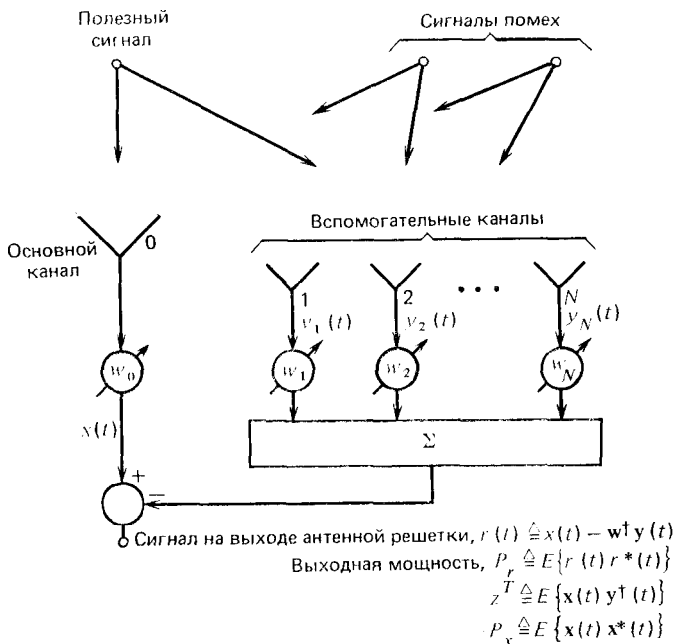


Рис. 3.5. Структурная схема когерентного компенсатора помех, принимаемых по боковым лепесткам диаграммы направленности

во вспомогательных каналах по модулю не превышали единицы. При этом вспомогательные антенны должны конструироваться так, чтобы их КНД всегда превышали максимальный уровень боковых лепестков основной антенны. Если вспомогательные антенны правильно сконструированы, то помехи на их выходах являются копией помех, принимаемых по боковым лепесткам основной антенны. Эти копии помех можно использовать для когерентной компенсации помех на выходе основной антенны, т. е. для формирования сигнала, свободного от помех. Очевидно, что помеха, принимаемая по главному лепестку диаграммы направленности основной антенны, не будет подавляться и пройдет на выход системы.

При использовании в качестве критерия эффективности ООСШ, в первую очередь необходимо выбрать вектор  $t$ . Поскольку вклад сигнальных составляющих вспомогательных каналов в общий уровень

выходного полезного сигнала незначителен по сравнению с вкладом основного канала, то в качестве вектора  $\mathbf{t}$  наиболее целесообразно выбрать  $N + 1$ -мерный вектор вида

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

сохраняющий на выходе сигнал основного канала. Согласно (3.99) оптимальный весовой вектор должен удовлетворять условию

$$\mathbf{R}'_{nn}\mathbf{w}' = \alpha\mathbf{t}, \quad (3.102)$$

где  $\mathbf{R}'_{nn}$  — ковариационная матрица сигналов всех каналов размером  $(N + 1) \times (N + 1)$  (при отсутствии полезного сигнала), а  $\mathbf{w}'$  —  $N + 1$ -мерный весовой вектор.

Обозначим  $(N \times N)$ -ковариационную матрицу входных сигналов (при отсутствии полезного сигнала) вспомогательных каналов через  $\mathbf{R}_{nn}$ , а  $N$ -мерный вектор весовых коэффициентов вспомогательных каналов — через  $\mathbf{w}$ . Тогда выражение (3.102) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} P_0 & \Psi^\dagger \\ \Psi & \mathbf{R}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

где  $P_0$  — мощность шума на выходе основного канала;  $\Psi$  — вектор взаимной корреляции выходных сигналов основного и вспомогательных каналов, определяемый выражением

$$\Psi = E \begin{bmatrix} x_1^* x_0 \\ x_2^* x_0 \\ \vdots \\ x_N^* x_0 \end{bmatrix}.$$

В свою очередь (3.103) можно записать в виде двух отдельных уравнений:

$$P_0\omega_0 + \Psi^\dagger\mathbf{w} = \alpha, \quad (3.104)$$

$$\mathbf{R}_{nn}\mathbf{w} = -\omega_0\Psi, \quad (3.105)$$

здесь (3.104) — скалярное, а (3.105) — матричное уравнения.

Вектор  $\mathbf{w}'$ , входящий в (3.102), имеет  $N + 1$  составляющих:  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ , ...,  $\omega_N$ , которые для максимизации ОСШ выбираются соответствующим образом. Однако можно достичь такого же оптимального значения ОСШ при использовании только  $N$  весовых коэффициентов вспомогательных каналов. Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что если вектор  $\mathbf{w}'$  является оптимальным при заданной  $\mathbf{R}_{nn}$ , то вектор, отличающийся от  $\mathbf{w}'$  только скалярным множителем, будет также оптимальным. Поэтому скалярный весовой коэффициент  $\omega_0$  в (3.104) можно выбрать постоянным  $\omega_0 = \hat{\omega}_0 \neq 0$ . (Заметим, что так как  $(\mathbf{w}')^T \mathbf{t} =$

$= \omega_0$ , то ООСШ (3.100) не будет оптимальным при  $\omega_0 = 0$ .) В этом случае необходимо лишь подстроить весовые коэффициенты во вспомогательных каналах так, чтобы

$$\mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}_{\text{опт}} = -\hat{\omega}_0 \Psi. \quad (3.106)$$

Поскольку значение  $\hat{\omega}_0$  фиксировано, то весовой вектор  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$  из (3.106), максимизирующий ООСШ, должен одновременно минимизировать мощность выходного шума, принимаемого по боковым лепесткам диаграммы направленности.

### 3.3.3. Критерий максимума правдоподобия

В том случае, когда полезный сигнал полностью неизвестен (как, например, при приеме сейсмических колебаний), необходимо его оценить. При определении оценки полезного сигнала методом максимума правдоподобия (МП) будем считать, что составляющие шума имеют многомерное нормальное распределение [22, 32].

Вектор входного сигнала антенной решетки, схема которой показана на рис. 3.1,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.107)$$

где

$$\mathbf{s}(t) = s(t) \mathbf{v}. \quad (3.108)$$

Требуется найти оценку  $s(t)$ . Определим функцию правдоподобия входного сигнала как

$$L[\mathbf{x}(t)] = -\ln \{P\{\mathbf{x}(t) | \mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\}\}, \quad (3.109)$$

где  $P\{z/y\}$  — условная плотность вероятности  $z$  при условии, что произошло событие  $y$ .

Теперь предположим, что шум  $\mathbf{n}(t)$  является векторным, стационарным, нормальным белым шумом с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\mathbf{R}_{nn} \delta(\tau)$ . В этом случае  $\mathbf{x}(t)$  также является стационарным, случайным, гауссовским вектором со средним значением  $s(t) \mathbf{v}$ , где  $s(t)$  — детерминированная, но неизвестная функция. При этих предположениях функция правдоподобия имеет вид

$$L[\mathbf{x}(t)] = c [\mathbf{x}(t) - s(t) \mathbf{v}]^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} [\mathbf{x}(t) - s(t) \mathbf{v}], \quad (3.110)$$

где  $c$  — скалярная величина, не зависящая от  $\mathbf{x}(t)$  и  $s(t)$ .

Процессор максимального правдоподобия основан на получении оценки  $\hat{s}(t)$  сигнала  $s(t)$ , максимизирующей функцию правдоподобия (3.110). Вычисляя частную производную  $L[\mathbf{x}(t)]$  по  $s(t)$  и приравнявая ее нулю, получаем

$$0 = \frac{\partial L[\mathbf{x}(t)]}{\partial s(t)} = -2\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x} + 2\hat{s}(t) \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}. \quad (3.111)$$

Отсюда следует, что оценка  $\widehat{s}(t)$ , максимизирующая  $L[x(t)]$ , определяется выражением

$$\widehat{s}(t) \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.112)$$

Учитывая, что  $\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}$  — скаляр, получаем оценку максимального правдоподобия в виде

$$\widehat{s}(t) = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}(t)}{\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}}, \quad (3.113)$$

которая может быть также записана в форме  $\widehat{s}(t) = \mathbf{w}_{\text{МП}}^T \mathbf{x}(t)$ , где  $\mathbf{w}_{\text{МП}}$  — оптимальный по критерию максимального правдоподобия весовой вектор, определяемый выражением

$$\mathbf{w}_{\text{МП}} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}}. \quad (3.114)$$

В случае комплексных величин выражение (3.110) примет вид

$$L[x(t)] = c [x(t) - s(t) \mathbf{v}]^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} [x(t) - s(t) \mathbf{v}]. \quad (3.115)$$

Аналогичным образом (3.112) заменяется на

$$\widehat{s}(t) \mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}(t), \quad (3.116)$$

а вместо (3.114) получим

$$\mathbf{w}_{\text{МП}} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}}. \quad (3.117)$$

### 3.3.4. Критерий минимума дисперсии шума

В том случае, когда параметры полезного сигнала и направление его прихода известны (как, например, в настроенных на сигнал антенных решетках), минимизация дисперсии выходного шума (МДШ) приводит к улучшению условий приема сигнала. Методы, при которых мерой эффективности является дисперсия шума, были развиты в работах [33, 34]. Выходной сигнал настроенной антенной решетки, схема которой показана на рис. 3.2, определяется выражением

$$y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{z}(t) = s(t) \sum_{i=1}^N \omega_i + \sum_{i=1}^N \omega_i n'_i, \quad (3.118)$$

где  $n'_i$  — составляющие шума после фазовращателей. Если ввести ограничение  $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$ , то выходной сигнал будет

$$y(t) = s(t) + \mathbf{w}^T \mathbf{n}'(t), \quad (3.119)$$

так что

$$E\{y(t)\} = s(t). \quad (3.120)$$

Поэтому дисперсия выходного шума будет определяться выражением

$$\text{var} [y(t)] = E \{ \mathbf{w}^T \mathbf{n}'(t) \mathbf{n}'^T(t) \mathbf{w} \} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{n'n} \mathbf{w}. \quad (3.121)$$

Соотношение между векторами шума до и после фазовращателей, обеспечивающих настройку антенной решетки на полезный сигнал, имеет вид

$$\mathbf{n}'(t) = \Phi \mathbf{n}(t), \quad (3.122)$$

где  $\Phi$  — диагональное унитарное преобразование, определяемое матрицей

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1} & & & 0 \\ & e^{j\varphi_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{j\varphi_N} \end{bmatrix}. \quad (3.123)$$

Дисперсия шума на выходе антенной решетки останется неизменной при применении такого унитарного преобразования, т. е.

$$\text{var} [y(t)] = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{n'n} \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}. \quad (3.124)$$

Необходимо минимизировать (3.124) при ограничении

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \quad (3.125)$$

где

$$\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T. \quad (3.126)$$

Для решения указанной проблемы минимизации введем модифицированный критерий эффективности

$$\mathfrak{F}_{\text{мдш}} = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w} + \lambda [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}], \quad (3.127)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа. Поскольку  $\mathfrak{F}_{\text{мдш}}$  является квадратичной функцией от  $\mathbf{w}$ , то оптимальный вектор  $\mathbf{w}$  может быть найден из условия  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathfrak{F}_{\text{мдш}} = 0$ . Градиент определяется выражением

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathfrak{F}_{\text{мдш}} = \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1}, \quad (3.128)$$

так что

$$\mathbf{w}_{\text{мдш}} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} \lambda \mathbf{1}. \quad (3.129)$$

Оптимальное значение  $\mathbf{w}_{\text{мдш}}$  должно удовлетворять ограничению

$$\mathbf{w}_{\text{мдш}}^T \mathbf{1} = 1. \quad (3.130)$$

Подставив (3.130) в (3.129), получим

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{1}}, \quad (3.131)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{w}_{\text{мдш}} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.132)$$

и  $\mathbf{w}_{\text{мдш}}$  удовлетворяет (3.130).



Подставив (3.132) в (3.124), найдем минимальное значение дисперсии выходного шума

$$\text{var}_{\min} [y(t)] = \frac{1}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{1}}. \quad (3.133)$$

Если используются комплексные величины, то все рассмотренные ранее выражения остаются неизменными, поскольку единственно необходимым является определение ковариационной матрицы  $\mathbf{R}_{nn}$  для комплексного вектора шума  $\mathbf{n}(t)$ .

### 3.3.5. Взаимосвязь оптимальных решений

Решения, полученные в предыдущих разделах, применимы к обычным антенным решеткам за исключением случая подстройки весовых коэффициентов по критерию МДШ, когда необходимо использовать настроенную на сигнал решетку. Полученные решения связаны между собой, поскольку (как будет показано) они отличаются лишь скалярным множителем. Следовательно, все эти решения обеспечивают на выходе одинаковое ОСШ. Взаимные связи между отдельными решениями можно легко проиллюстрировать на основе анализа структуры оптимальных процессоров [35].

Оптимальный весовой вектор, полученный при минимизации СКО, может быть записан согласно (3.61) в виде

$$\mathbf{w}_{\text{СКО}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{v}^* = [\mathbf{S} \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} \mathbf{S} \mathbf{v}^*. \quad (3.134)$$

Применив к выражению (3.134) матричное соотношение (Г.10) из приложения Г, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{СКО}} &= \left[ \mathbf{S} \mathbf{R}_{nn}^{-1} - \frac{S^2 \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1}}{1 + \mathbf{S} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*} \right] \mathbf{v}^* = \\ &= \left[ \frac{S}{1 + \mathbf{S} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*} \right] \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Из (3.135) видно, что оптимальный весовой вектор при использовании критерия СКО пропорционален вектору  $\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*$ . Поскольку критерий МДШ может применяться только для согласованной с сигналом антенной решетки, то в этом случае следует положить  $\mathbf{v} = \mathbf{1}$ .

Рассмотрим теперь выражения для мощностей шума  $N_0$  и сигнала  $S_0$ , получаемых на выходе сумматора с весовым вектором  $\mathbf{w} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*$ :

$$N_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*, \quad (3.136)$$

$$S_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} = S N_0^2. \quad (3.137)$$

С учетом этих соотношений оптимальные весовые векторы, полученные в разд. 3.3.1 и 3.3.3 соответственно для критериев СКО и МП, можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{w}_{\text{СКО}} = \frac{1}{N_0} \frac{S_0}{N_0 + S_0} \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*, \quad (3.138)$$

$$\mathbf{w}_{\text{МП}} = \frac{1}{N_0} \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*. \quad (3.139)$$

Аналогичным образом для согласованной с сигналом антенной решетки при  $\nu = 1$  имеем

$$\mathbf{w}_{\text{МП}} |_{\nu=1} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{1}} = \mathbf{w}_{\text{МДШ}}. \quad (3.140)$$

Полученное выражение показывает, что процессор, обеспечивающий минимум СКО, состоит из весового сумматора и блока умножения на скаляр; последний зависит от выбранного критерия эффективности.

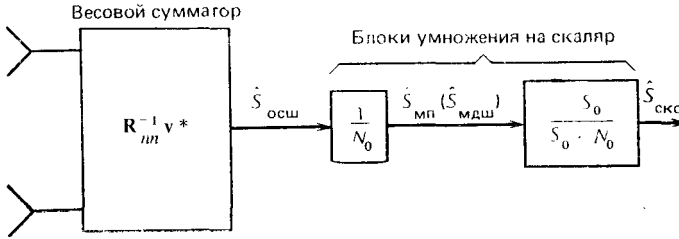


Рис. 3.6. Структурная схема процессора, обеспечивающего минимум СКО, иллюстрирующая взаимосвязь оптимальных решений при различных критериях эффективности

Структурная схема такого процессора показана на рис. 3.6. Все полученные ранее выражения для оптимального весового вектора могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{w} = \beta \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*, \quad (3.141)$$

где  $\beta$  — соответствующий скалярный коэффициент. Следовательно, все эти решения будут обеспечивать одно и то же ОСШ, определяемое как

$$\left( \frac{s}{n} \right) = \frac{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}} = \frac{\beta^2 \mathbf{Sv}^T (\mathbf{R}_{nn}^{-1}) \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*}{\beta^2 \mathbf{v}^T (\mathbf{R}_{nn}^{-1}) \mathbf{v}^*} = \mathbf{Sv}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*. \quad (3.142)$$

В следующем разделе будет показано, что и в случае широкополосных сигналов решения различных задач оценки и обнаружения приводят к структурным схемам процессоров, содержащих весовой сумматор и блок умножения на скаляр.

Тот факт, что все решения для оптимального весового вектора в адаптивных антенных решетках при использовании различных критериев эффективности сводятся (с точностью до постоянного множителя) к винеровскому решению, подчеркивает основополагающее значение уравнения Винера—Хопфа. Теоретические пределы эффективности в установившемся режиме, определяемые винеровским решением, позволяют разработчику оценить, насколько те или иные усовершенствования в построении решетки приведут к повышению ее эффективности. Кроме того, такие пределы эффективности являются удобным критерием оценки достоинств того или иного подхода.

Одна из задач устройства обработки сигналов антенной решетки связана с принятием решения о том, какими являются наблюдаемые на выходах ее элементов случайные процессы: полезным сигналом на фоне шума, или только шумом. Для таких систем некоторые критерии эффективности, как, например, выходное ОСШ или СКО, не будут соответствовать поставленной задаче, поскольку они в недостаточной степени учитывают ошибки принимаемых решений. Это объясняется тем, что в отмеченных критериях эффективности не учитывается процедура принятия решений относительно наличия или отсутствия сигнала. Из статистической теории обнаружения хорошо известно, что решения, основанные на тесте отношения правдоподобия, в некотором смысле минимизируют риск, связанный с принятием неправильных решений. Известно также, что тест отношения правдоподобия дает решения, которые оказываются оптимальными и для большого числа других критериев эффективности [36—38]. Одной из задач данного раздела является определение взаимосвязей между тестом отношения правдоподобия и некоторыми другими известными критериями эффективности применительно к обработке широкополосных сигналов.

Пусть вектор наблюдений  $x$  содержит составляющие, представляющие выходные сигналы  $x_i(t)$  отдельных элементов антенной решетки ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Отношение правдоподобия определяется отношениями функций условных плотностей вероятностей [39]:

$$\Lambda(x) \triangleq \frac{p[x/\text{сигнал присутствует}]}{p[x/\text{сигнал отсутствует}]} \quad (3.143)$$

Если  $\Lambda(x)$  превышает определенный пороговый уровень  $\eta$ , то принимается решение о наличии полезного сигнала. Если же  $\Lambda(x)$  меньше этого порога  $\eta$ , то принимается решение об отсутствии сигнала. Подобный подход безусловно в большей степени соответствует поставленной задаче обнаружения сигнала, так как при нем с самого начала предполагается, что в системе должно приниматься решение о наличии или отсутствии сигнала.

Имеет смысл отметить некоторые обобщения теста отношения правдоподобия (3.143). На практике во многих случаях один или несколько параметров сигнала (таких, как пространственное положение источника сигнала, фаза или энергия сигнала) могут быть не известны. При наличии неизвестных параметров (обозначаемых через  $\theta$ ) один из интуитивно разумных подходов заключается в получении оценки таких параметров (обозначаемых через  $\hat{\theta}$ ) и подстановке последней в выражение для отношения правдоподобия. В результате получается классическое обобщенное отношение правдоподобия (ООП) [40] в виде

$$\Lambda_G(x/\hat{\theta}) \triangleq \frac{p[x/\hat{\theta}, \text{ сигнал присутствует}]}{p[x/\text{сигнал отсутствует}]} \quad (3.144)$$

Неизвестные параметры сигнала могут рассматриваться как случайные величины. При этом любая априорная информация относительно этих параметров может быть представлена априорной плотностью вероятности  $p(\theta)$ . Тогда с учетом априорной информации, определяемой  $p(\theta)$  ( $\theta \in \Theta$ ), отношение правдоподобия может быть записано в виде выражения [40]

$$\Lambda_B(x) \triangleq \frac{\int_{\Theta} p[x/\theta, \text{сигнал присутствует}] p(\theta) d\theta}{p[x/\text{сигнал отсутствует}]}, \quad (3.145)$$

которое называется отношением правдоподобия Байеса.

В некоторых случаях тесты отношения правдоподобия определяют обработку, эквивалентную согласованной фильтрации, при которой максимизируется выходное ОСШ в определенный момент времени  $t = T$  [41—43]. В данном разделе будет рассмотрена также роль согласованной фильтрации при оптимальной обработке сигналов антенной решетки.

Другим важным понятием, связанным с тестом отношения правдоподобия, является понятие «достаточной статистики» [44]. Самым простым подходом к решению задач обнаружения на основе тестов отношения правдоподобия (3.143)—(3.145) является непосредственное вычисление  $\Lambda(x)$  при заданном векторе наблюдений  $x$  и сравнение этой величины с порогом  $\eta$ . Однако во многих случаях указанное правило принятия решения эквивалентно сравнению с некоторым пороговым уровнем другой скалярной функции  $l(x)$  вектора наблюдений  $x$  — достаточной статистики<sup>1</sup>. Если достаточная статистика  $l(x)$  вычисляется проще, чем отношение правдоподобия, то для принятия решения следует пользоваться функцией  $l(x)$ .

Эффективность обнаружения обычно характеризуется с помощью рабочих характеристик (РХ) приемника, представляющих собой зависимость вероятности правильного обнаружения  $p[\Lambda(x) > \eta/\text{сигнал присутствует}]$  от вероятности ложной тревоги  $p[\Lambda(x) > \eta/\text{сигнал отсутствует}]$  при фиксированных значениях ОСШ [38, 44].

В случае гауссовских сигналов и помех оптимизация устройства обнаружения может быть сведена к максимизации величины

$$d \triangleq \frac{E\{y(T)/\text{сигнал присутствует}\} - E\{y(T)/\text{сигнал отсутствует}\}}{\{\text{var}\{y(T)/\text{сигнал отсутствует}\}\}^{1/2}}, \quad (3.146)$$

которая иногда называется показателем качества обнаружения. В выражении (3.146)  $y(T)$  — выходной сигнал процессора при  $t = T$ .

Во многих задачах обнаружения и оценки вектор наблюдений можно представить в виде

$$x(t) = Ms(t) + n(t), \quad (3.147)$$

где  $n$  — вектор шума, имеющий нулевое среднее и ковариационную матрицу  $R_{nn}$ ;  $s$  — вектор сигнала (известный, неизвестный или случайный);  $M$  — известная матрица преобразования.

<sup>1</sup> Заметим, что отношение правдоподобия также следует считать достаточной статистикой. (Прим. ред.)

Представленные далее результаты заимствованы в основном из работы [10]. В большинстве случаев приводимые здесь результаты даны без строгого математического обоснования, для которого потребовалось бы использование теории рядов Фурье, дискретизации непрерывных функций и спектрального представления стационарных случайных процессов. Поскольку величины, входящие в (3.147), будут в общем случае комплексные, то необходимо определить понятие комплексного случайного вектора:

$$z = \zeta + j\gamma. \quad (3.148)$$

Вектор  $z$  должен обладать двумя следующими свойствами, инвариантными при любых линейных преобразованиях:

1) как действительная  $\zeta$ , так и мнимая  $\gamma$  части вектора  $z$  должны иметь одинаковые ковариационные матрицы;

2) все составляющие случайных векторов  $\zeta$  и  $\gamma$  должны удовлетворять условию

$$E \{ \zeta_l \gamma_m \} = -E \{ \zeta_m \gamma_l \} \text{ для всех } l \text{ и } m. \quad (3.149)$$

В приводимых далее процедурах будет использован ряд матричных соотношений, а также обобщений неравенства Шварца, приведенных в приложении Г. Многие из полученных результатов будут относиться к гауссовскому случайному вектору. Ряд свойств как действительных, так и комплексных гауссовских случайных векторов приводится в приложении Д.

### 3.4.1. Оценка случайного сигнала

Положим, что вектор сигнала  $s$  в (3.147) является случайным. Рассмотрим задачу оценки  $s$  при заданном векторе наблюдений  $x$ . Пусть среднее значение  $s$  равно

$$E \{ s \} = u, \quad (3.150)$$

а ковариационная матрица

$$E \{ (s - u) (s - u)^\dagger \} = R_{ss}, \quad (3.151)$$

где  $u$  и  $R_{ss}$  — известны. Для заданного  $x$  наилучшей оценкой  $s$  при использовании квадратичной функции стоимости является просто условное среднее  $E \{ s/x \}$ .

**Гауссовский случайный сигнал.** Когда векторы  $s$  и  $n$  являются гауссовскими и независимыми, то векторы  $x$  и  $s$  оказываются совместно гауссовскими, условное среднее  $E \{ s/x \}$  может быть найдено на основе рассмотрения характеристик составного вектора  $\begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix}$ . Из (3.147) следует, что

$$E \left\{ \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} u \\ Mu \end{bmatrix}, \quad (3.152)$$

$$\text{cov} \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & R_{ss} M^\dagger \\ MR_{ss} & MR_{ss} M^\dagger + R_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.153)$$

Учитывая выражения (Д.14) или (Д.43) из приложения Д, можно получить оценку  $\widehat{\mathbf{s}}$  в следующем виде:

$$\widehat{\mathbf{s}} = E \{ \mathbf{s}/\mathbf{x} \} = \mathbf{u} + \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger [\mathbf{M} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{u}). \quad (3.154)$$

Ковариационная матрица оценки  $\widehat{\mathbf{s}}$  определяется соотношениями (Д.15) или (Д.44) из приложения Д

$$\text{cov}(\widehat{\mathbf{s}}) = \mathbf{R}_{ss} - \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger [\mathbf{M} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} \mathbf{M} \mathbf{R}_{ss}. \quad (3.155)$$

Используя матричные соотношения (Г.10) и (Г.11) из приложения Г, можно получить ряд полезных эквивалентных форм выражений (3.154) и (3.155):

$$\widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{u} + [\mathbf{R}_{ss}^{-1} + \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{u}) \quad (3.156)$$

или

$$\widehat{\mathbf{s}} = [\mathbf{I} + \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{u} + \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}] \quad (3.157)$$

и

$$\text{cov}(\widehat{\mathbf{s}}) = [\mathbf{R}_{ss}^{-1} + \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \quad (3.158)$$

или

$$\text{cov}(\widehat{\mathbf{s}}) = [\mathbf{I} + \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{R}_{ss}. \quad (3.159)$$

В предположении, что  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  для случая, когда среднее значение  $\mathbf{x}$  равно нулю, из (3.156) получим практически интересный результат:

$$\widehat{\mathbf{s}} = [\mathbf{R}_{ss}^{-1} + \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}, \quad (3.160)$$

который будет использован в дальнейшем.

Поскольку при гауссовских сигналах среднее значение, мода и максимум функций правдоподобия совпадают, то наилучшая оценка  $\mathbf{s}$  соответствует максимуму апостериорной плотности вероятности. Другими словами, значение  $\mathbf{s}$  выбирается из условия обеспечения максимума для

$$p(\mathbf{s}/\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}/\mathbf{s}) p(\mathbf{s})}{p(\mathbf{x})}. \quad (3.161)$$

Из выражения (3.147) следует, что  $p(\mathbf{x}/\mathbf{s})$  является гауссовской со средним значением  $\mathbf{M}\mathbf{s}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{R}_{nn}$ , и при этом известно, что  $p(\mathbf{s})$  также является гауссовской со средним значением  $\mathbf{u}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{R}_{ss}$ . Тогда из (3.161) на основании выражения (Д.50) из приложения Д можно получить

$$p(\mathbf{s}/\mathbf{x}) = K \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} [(\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s})^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s}) + (\mathbf{s} - \mathbf{u})^\dagger \mathbf{R}_{ss}^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{u})] \right\}, \quad (3.162)$$

где  $K$  — некоторая постоянная;  $\alpha = 2$  для комплексного случайного вектора;  $\alpha = 1$  для действительного случайного вектора. Величина  $\mathbf{s}$ , максимизирующая (3.162), совпадает с величиной  $\hat{\mathbf{s}}$ , минимизирующей следующую часть выражения, стоящего под знаком экспоненты в (3.162):

$$J = (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s})^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s}) + (\mathbf{s} - \mathbf{u})^\dagger \mathbf{R}_{ss}^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{u}). \quad (3.163)$$

В результате максимизации (3.162) или минимизации (3.163) приходим к выражению (3.154), определяющему оценку  $\hat{\mathbf{s}}$ . Рассмотренная процедура используется в задачах нелинейного оценивания, где величина  $\mathbf{M}\mathbf{s}$  заменяется нелинейной функцией  $\mathbf{m}(\mathbf{s})$  в том случае, когда вычисление условного среднего значения оказывается затруднительным.

**Негауссовский случайный сигнал.** В том случае, когда векторы  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  являются негауссовскими случайными векторами, условное среднее значение  $E \{ \mathbf{s}/\mathbf{x} \}$  все еще остается наилучшей оценкой при квадратичной функции стоимости. Этот факт нельзя считать очень полезным, так как во многих случаях не существует простых выражений для вычисления условного среднего и, кроме того, часто имеющаяся априорная информация ограничивается статистиками не выше второго порядка.

Один из возможных подходов к указанной проблеме связан с использованием оценки (3.154) или ее эквивалентных форм, несмотря на то, что такая оценка не определяет больше условное среднее значение  $p(\mathbf{s}/\mathbf{x})$ .

Другой подход, часто используемый в задачах с негауссовскими сигналами, сводится к определению линейной оценки, минимизирующей СКО. Линейной является оценка вида

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{x}. \quad (3.164)$$

Величины, обозначенные через  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{B}$ , определяются в результате минимизации выражения

$$e = \text{tr} \{ E [ (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})^\dagger ] \} = E \{ (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})^\dagger (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) \}. \quad (3.165)$$

Учитывая (3.147) и (3.164), получаем

$$(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) = [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{M}] (\mathbf{s} - \mathbf{u}) + \{ [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{M}] \mathbf{u} - \mathbf{a} \} - \mathbf{B}\mathbf{n}, \quad (3.166)$$

откуда

$$E \{ (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})^\dagger \} = [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{M}] \mathbf{R}_{ss} [\mathbf{I} - \mathbf{M}^\dagger \mathbf{B}^\dagger] + \mathbf{B}\mathbf{R}_{nn} \mathbf{B}^\dagger + \{ [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{M}] \mathbf{u} - \mathbf{a} \} \{ [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{M}] \mathbf{u} - \mathbf{a} \}^\dagger. \quad (3.167)$$

Полагая, что градиент (3.165) по  $\mathbf{a}$  равен нулю, и учитывая (3.167), нетрудно убедиться, что величина  $\mathbf{a}$ , минимизирующая (3.165), определяется выражением

$$\mathbf{a} = [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{M}] \mathbf{u}. \quad (3.168)$$

Если подставить (3.168) в (3.167) и дополнить полученное выражение до квадрата способом, аналогичным использованному при выводе (Г.9) из приложения Г, то получим

$$E \{(\hat{s} - s)(\hat{s} - s)^\dagger\} = R_{ss} - R_{ss} M^\dagger [MR_{ss} M^\dagger + R_{nn}]^{-1} MR_{ss} + \\ + \{B - R_{ss} M^\dagger [MR_{ss} M^\dagger + R_{nn}]^{-1}\} [MR_{ss} M^\dagger + R_{nn}] \times \\ \times \{B^\dagger - [MR_{ss} M^\dagger + R_{nn}]^{-1} MR_{ss}\}. \quad (3.169)$$

Величину  $B$ , минимизирующую (3.165), легко найти из (3.169) в следующем виде:

$$B = R_{ss} M^\dagger [MR_{ss} M^\dagger + R_{nn}]. \quad (3.170)$$

Подставляя (3.168) и (3.170) в (3.164), можно вновь получить выражение для оценки  $\hat{s}$  в виде (3.154). Аналогичным образом в результате подстановки (3.170) в (3.169) можно получить выражение для ковариационной матрицы ошибок, которое полностью подобно выражению (3.155). Таким образом, можно отметить, что при использовании нескольких различных подходов результирующие уравнения для оценки имеют один и тот же вид. В случае гауссовских сигналов оценка  $\hat{s}$ , определяемая выражением (3.154), является условным средним значением и обеспечивает также минимум СКО, тогда как для негауссовских сигналов эта же оценка оказывается «наилучшей» линейной оценкой в смысле минимума СКО.

**Применение результатов оценивания случайных процессов к оптимальной обработке сигналов антенной решетке.** Предположим, что  $N$ -элементная антенная решетка расположена в некоторой области пространства и что вектор принимаемого сигнала может быть определен следующим выражением:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t m(t-v) s(v) dv + n(t), \quad (3.171)$$

где  $m(t)$  — известное линейное преобразование, характеризующее эффекты распространения и любые искажения сигнала, обусловленные самими элементами решетки. В случае идеального (недисперсного) распространения и неискажающих элементов решетки  $m(t)$  будет определять просто времена запаздывания  $\delta(t - T_i)$ . Величина  $s(t)$  является скалярной временной функцией, описывающей полезный сигнал.

Когда сигнальный и шумовой процессы являются стационарными и интервал наблюдения достаточно велик ( $t \rightarrow \infty$ ), можно не вычислять интеграл свертки (3.171), а перейти к обработке в частотной области, используя методы преобразования Фурье. Формально, применив преобразования Фурье ко всем величинам выражения (3.171), получим

$$x(\omega) = m(\omega) s(\omega) + n(\omega), \quad (3.172)$$

здесь готическим шрифтом обозначены преобразования Фурье величин, входящих в (3.171). Отметим, что (3.172) имеет ту же форму, что и выражение (3.147), хотя первое относится к частотной области, а второе —



к временной. Под тем фактом, что (3.172) является соотношением для частотной области, подразумевается, что матрицы взаимной спектральной плотности (являющиеся преобразованиями Фурье соответствующих ковариационных матриц) теперь играют ту же роль, которую ковариационные матрицы выполняли для временной области.

Эквивалент выражения (3.160) в частотной области имеет вид

$$\widehat{\xi}(\omega) = [\varphi_{ss}^{-1}(\omega) + \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)]^{-1} \times \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \xi(\omega). \quad (3.173)$$

Поскольку величина  $\varphi_{ss}^{-1}(\omega) + \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)$  является скалярной, выражение (3.173) можно переписать как

$$\widehat{\xi}(\omega) = |a(\omega)|^2 \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \xi(\omega), \quad (3.174)$$

где 
$$|a(\omega)|^2 = \frac{\varphi_{ss}(\omega)}{1 + \varphi_{ss}(\omega) \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)}, \quad (3.175)$$

$\varphi_{ss}(\omega)$  — мощность сигнала  $s(t)$  на частоте  $\omega$ . Отметим, что в общем случае частотная характеристика вида (3.174) является нереализуемой и поэтому необходимо вводить задержку для получения хорошего

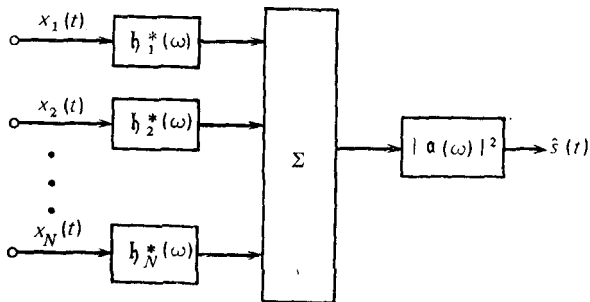


Рис. 3.7. Структурная схема оптимального процессора сигналов антенной решетки при оценивании случайного сигнала

приближения к соответствующей оценке  $\widehat{s}(t)$ . Для определения  $\widehat{s}(t)$  необходимо найти обратное преобразование Фурье от (3.174), т. е.

$$\widehat{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(\omega)|^2 \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \xi(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.176)$$

Выражение (3.174) позволяет определить структуру оптимального процессора. Прежде всего отметим, что (3.174) может быть записано в таком виде

$$\widehat{\xi}(\omega) = |a(\omega)|^2 \mathbf{h}(\omega) \xi(\omega), \quad (3.177)$$

где

$$\mathbf{h}(\omega) = \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \quad (3.178)$$

является вектор-строкой частотных характеристик фильтров. Каждая составляющая  $\xi_j(\omega)$  обрабатывается соответствующим фильтром с частотной характеристикой  $h_j(\omega)$  так, что при этом выполняется операция выбеливания с последующей согласованной фильтрацией с учетом эффектов распространения и искажений полезного сигнала. Поэтому процессор, полученный для решения указанной задачи оценивания, реализует следующий алгоритм: сначала производится выбеливание, а затем согласованная фильтрация. Структурная схема процессора, реализующего (3.174), показана на рис. 3.7.

### 3.4.2. Оценивание неизвестного неслучайного сигнала

Предположим теперь, что вектор  $s$  в выражении (3.147) является вектором неизвестных, но неслучайных параметров. При этом вновь возникает задача оценивания  $s$  по данным вектора наблюдений  $x$ . Оценкой, обладающей требуемыми оптимальными свойствами для неслучайных параметров, является оценка максимального правдоподобия соответствующей величины  $s$ , максимизирующая условную плотность вероятностей  $p(x/s)$  для заданного вектора наблюдений  $x$ .

**Случай гауссовского шума.** Когда вектор шума  $n$  является гауссовским, условная плотность вероятностей имеет вид

$$p(x/s) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha (x - Ms)^{\dagger} R_{nn}^{-1} (x - Ms) \right\}, \quad (3.179)$$

где  $K$  — некоторая постоянная. Нетрудно видеть, что максимизация (3.179) соответствует минимизации выражения, стоящего под знаком экспоненты. Оценка, минимизирующая выражение под знаком экспоненты, имеет вид

$$\widehat{s} = [M^{\dagger} R_{nn}^{-1} M]^{-1} M^{\dagger} R_{nn}^{-1} x. \quad (3.180)$$

Из (3.180) видно, что оценка  $\widehat{s}$  получена в результате линейного преобразования вектора  $x$ , поэтому распределение  $\widehat{s}$  будет также гауссовским. Поскольку  $E\{x\} = Ms$ , из (3.180) также следует, что

$$E\{\widehat{s}\} = s, \quad (3.181)$$

$$\text{cov}(\widehat{s}) = [M^{\dagger} R_{nn}^{-1} M]^{-1}. \quad (3.182)$$

Обратим внимание на то, что такая же оценка, как и в (3.180), получается в пределе из (3.156), если положить  $u \rightarrow 0$  и  $R_{ss}^{-1} \rightarrow 0$ . Другими словами, оценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой (3.156) при гауссовском априорном распределении  $p(s)$  с нулевым средним значением и бесконечной дисперсией.

**Случай негауссовского шума.** Когда вектор  $n$  является негауссовским, функция правдоподобия не имеет более такого простого вида, как (3.179), и получить оценку максимального правдоподобия становится довольно сложно. Кроме того, имеющаяся информация обычно ограничена статистиками не выше второго порядка. Поэтому в данных усло-

виях наиболее часто используется оценка, обеспечивающая минимум величины

$$J = (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s})^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s}). \quad (3.183)$$

Нетрудно показать, что величина  $\mathbf{s}$ , минимизирующая (3.183), определяется выражением (3.180).

Другой подход заключается в получении несмещенной линейной оценки с минимальной дисперсией. Линейная оценка имеет вид

$$\widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (3.184)$$

а для несмещенной оценки требуется, чтобы

$$E\{\widehat{\mathbf{s}}\} = \mathbf{s}. \quad (3.185)$$

Для получения оценки с минимальной дисперсией необходимо минимизировать величину

$$\text{tr}\{E[(\widehat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})(\widehat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})^\dagger]\} = E\{(\widehat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})^\dagger (\widehat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})\}. \quad (3.186)$$

С учетом (3.147) и (3.184) получим

$$\widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{s} + \mathbf{B}\mathbf{n}. \quad (3.187)$$

Для того чтобы выполнялось условие (3.185), необходимо иметь

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (3.188)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{M} = \mathbf{I}. \quad (3.189)$$

Из выражений (3.187) и (3.189) следует, что

$$E\{\widehat{\mathbf{s}} \widehat{\mathbf{s}}^\dagger\} = \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger + \mathbf{B}\mathbf{R}_{nn} \mathbf{B}^\dagger, \quad (3.190)$$

и поэтому (3.186) будет минимальным при выборе матрицы  $\mathbf{B}$ , минимизирующей величину  $\text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{R}_{nn} \mathbf{B}^\dagger)$  при ограничении (3.189). Эта задача оптимизации с ограничением может быть решена путем введения множителей Лагранжа  $\boldsymbol{\lambda}$  и минимизации величины

$$J = \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{R}_{nn} \mathbf{B}^\dagger + [\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{M}]\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^\dagger[\mathbf{I} - \mathbf{M}^\dagger \mathbf{B}^\dagger]\}. \quad (3.191)$$

Дополнив выражение (3.191) до полного квадрата с использованием (Г.9) из приложения Г, можно получить следующую формулу:

$$J = \text{tr}\{\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^\dagger - \boldsymbol{\lambda}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda} + [\mathbf{B} - \boldsymbol{\lambda}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1}] \times \\ \times \mathbf{R}_{nn} [\mathbf{B}^\dagger - \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda}]\}. \quad (3.192)$$

Из (3.192) следует, что

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\lambda}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1}. \quad (3.193)$$

Для исключения  $\boldsymbol{\lambda}$  воспользуемся (3.189):

$$\boldsymbol{\lambda}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{I}, \quad (3.194)$$

откуда

$$\boldsymbol{\lambda}^\dagger = [\mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1}, \quad (3.195)$$

и тогда

$$\mathbf{B} = [\mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1}. \quad (3.196)$$

Таким образом, оценка (3.184) снова сводится к (3.180), а величины ее среднего значения и дисперсии определяются выражениями (3.181) и (3.182) соответственно.

**Применение теории оценивания неизвестного неслучайного сигнала к оптимальной обработке сигналов в антенной решетке.** Возвращаясь к представлению сигналов в частотной области (3.172), по аналогии с (3.147) и (3.180) можно получить оценку в частотной области

$$\hat{\xi}(\omega) = [\mathbf{m}^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)]^{-1} \mathbf{m}^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{z}(\omega). \quad (3.197)$$

С учетом того, что величина  $\mathbf{m}^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)$  является скалярной, (3.197) можно записать в виде

$$\hat{\xi}(\omega) = \left[ \frac{1}{\varphi_{ss}(\omega) \mathbf{m}^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)} + 1 \right] |\alpha(\omega)|^2 \mathfrak{h}(\omega) \mathbf{z}(\omega), \quad (3.198)$$

где  $|\alpha(\omega)|^2$  и  $\mathfrak{h}(\omega)$  определяются выражениями (3.175) и (3.178) соответственно. Таким образом, единственным отличием между оптимальными процессорами (производящими оценку вектора  $\mathbf{s}$ ) для случайного и для неизвестного неслучайного сигналов является присутствие дополнительного скалярного фильтра. При этом необходимыми операциями по-прежнему остаются предварительное выбеливание и согласованная фильтрация.

### 3.4.3. Обнаружение известного сигнала

Задача бинарного обнаружения связана с принятием решения о наличии или отсутствии сигнала и сводится к сравнению отношения правдоподобия (3.143) с пороговым уровнем  $\eta$ .

**Случай гауссовского шума.** Когда шум является гауссовским, то отношение правдоподобия (3.143) можно представить в виде

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s})^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{s}) \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha (\mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}) \right\}}, \quad (3.199)$$

где  $\alpha = 2$  для комплексного и  $\alpha = 1$  для действительного векторов  $\mathbf{x}$ . Выражение (3.199) можно представить также в виде

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha [\mathbf{s}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{s} - \mathbf{s}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{s}] \right\}. \quad (3.200)$$

Поскольку составляющая  $\mathbf{s}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{s}$  не зависит от вектора  $\mathbf{x}$ , то достаточной статистикой для принятия решения является величина

$$y = \frac{1}{2} (\mathbf{s}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{s}) = \text{Re} \{ \mathbf{s}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x} \}. \quad (3.201)$$

Предполагается, что коэффициент  $\alpha$  учитывается при установлении порогового уровня.

Распределение достаточной статистики  $y$  является гауссовским, так как  $y$  является линейной функцией гауссовского вектора наблюдений  $x$  (как при наличии, так и при отсутствии сигнала).

При отсутствии сигнала

$$E \{y\} = 0 \quad (3.202)$$

и на основании (Д.7) и (Д.57) приложения Д получаем

$$\text{var} (y) = \frac{s^\dagger M^\dagger R_{nn}^{-1} Ms}{\alpha}. \quad (3.203)$$

Аналогично получаем, что при наличии сигнала

$$E \{y\} = s^\dagger M^\dagger R_{nn}^{-1} Ms, \quad (3.204)$$

а дисперсия достаточной статистики  $y$  имеет то же значение, что и при отсутствии сигнала.

**Случай негауссовского шума.** В том случае, когда вектор шума  $n$  является негауссовским и доступными оказываются статистики не выше второго порядка, линейное преобразование вектора наблюдений

$$y = \frac{1}{2} [k^\dagger x + x^\dagger k] = \text{Re} \{k^\dagger x\} \quad (3.205)$$

выбирают таким образом, чтобы обеспечить максимизацию выходного ОСШ. Отношение

$$r_0 = \frac{E \{y^2/\text{сигнал присутствует}\} - E \{y^2/\text{сигнал отсутствует}\}}{E \{y^2/\text{сигнал отсутствует}\}} \quad (3.206)$$

будет называться отношением сигнал-шум. Учитывая (3.205) и (Д.57) из приложения Д, выражение для  $r_0$  можно представить в следующем виде:

$$r_0 = \frac{\alpha [\text{Re} \{k^\dagger Ms\}]^2}{k^\dagger R_{nn} k} \leq \frac{\alpha k^\dagger Mss^\dagger M^\dagger k}{k^\dagger R_{nn} k}. \quad (3.207)$$

Удобно представить  $R_{nn}$  в факторизованном виде:

$$R_{nn} = T^\dagger T. \quad (3.208)$$

В этом случае верхняя граница для  $r_0$  из соотношения (3.207) может быть записана в виде

$$\frac{\alpha k^\dagger Mss^\dagger M^\dagger k}{k^\dagger R_{nn} k} = \frac{\alpha k^\dagger T^\dagger (T^\dagger)^{-1} Mss^\dagger M^\dagger T^{-1} T k}{k^\dagger T^\dagger T k}. \quad (3.209)$$

Применяя к (3.209) неравенство (Г.15) из приложения Г, получаем

$$r_0 = \frac{\alpha [\text{Re} \{k^\dagger Ms\}]^2}{k^\dagger R_{nn} k} \leq \alpha s^\dagger M^\dagger R_{nn}^{-1} Ms, \quad (3.210)$$

где равенство выполняется при

$$k^\dagger = s^\dagger M^\dagger R_{nn}^{-1}. \quad (3.211)$$

Подставив  $\mathbf{k}^\dagger$  из (3.211) в (3.205), нетрудно убедиться, что тестовая статистика снова определяется выражением (3.201).

В задаче обнаружения известного сигнала на фоне негауссовского шума используется другой подход, который сводится к максимизации показателя качества обнаружения (3.146). Для достаточной статистики  $y$ , определяемой (3.205), нетрудно показать, что

$$d = \sqrt{\alpha} \frac{\operatorname{Re} \{ \mathbf{k}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{s} \}}{\sqrt{\mathbf{k}^\dagger \mathbf{R}_{nn} \mathbf{k}}} \leq \frac{\sqrt{\alpha \mathbf{k}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{s} \mathbf{s}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{k}}}{\sqrt{\mathbf{k}^\dagger \mathbf{R}_{nn} \mathbf{k}}}. \quad (3.212)$$

Применив (Г.15) из приложения Г к верхней границе из (3.212), можно увидеть, что

$$d = \sqrt{\alpha} \frac{\operatorname{Re} \{ \mathbf{k}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{s} \}}{\sqrt{\mathbf{k}^\dagger \mathbf{R}_{nn} \mathbf{k}}} \leq \sqrt{\alpha \mathbf{s}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{s}}. \quad (3.213)$$

Равенство в (3.213) получается при выполнении условия (3.211) и при этом тестовая статистика снова определяется выражением (3.201).

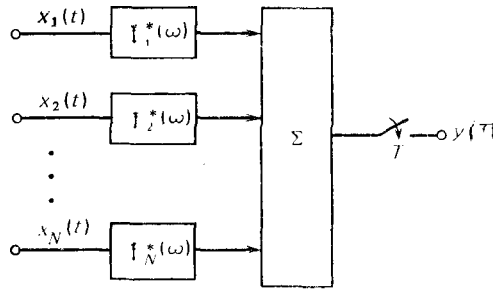


Рис. 3.8. Структурная схема линейного процессора при обнаружении известного сигнала

Приложение результатов теории обнаружения известного сигнала к оптимальной обработке в антенной решетке. В том случае, когда вектор принимаемого сигнала определяется согласно (3.171) и сигнал является известным, проще всего задачу обнаружения снова рассматривать в частотной области и максимизировать показатель качества обнаружения  $d$  в момент времени  $T$ . Указанная максимизация может быть выполнена

путем применения соответствующей формы неравенства Шварца. При использовании линейного процессора, структурная схема которого показана на рис. 3.8, получим

$$E \{ y(T) / \text{сигнал присутствует} \} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathbf{m}(\omega) \mathbf{s}(\omega) e^{i\omega T} d\omega, \quad (3.214)$$

$$\operatorname{var} [y(T)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}(\omega) \mathbf{t}(\omega) d\omega. \quad (3.215)$$

Поскольку  $E \{y(T) | \text{сигнал отсутствует}\} = 0$ , то

$$d = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathbf{m}(\omega) \mathfrak{S}(\omega) e^{j\omega T} d\omega}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}(\omega) \mathbf{t}(\omega) d\omega \right]^{1/2}}. \quad (3.216)$$

Пусть теперь  $\mathbf{\Phi}_{nn}(\omega) = \mathfrak{X}^\dagger(\omega) \mathfrak{X}(\omega)$ , так что выражение (3.216), может быть представлено в виде

$$d \sqrt{2\pi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathfrak{X}^\dagger(\omega) [\mathfrak{X}^\dagger(\omega)]^{-1} \mathbf{m}(\omega) \mathfrak{S}(\omega) e^{j\omega T} d\omega}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathfrak{X}^\dagger(\omega) \mathfrak{X}(\omega) \mathbf{t}(\omega) d\omega \right]^{1/2}}. \quad (3.217)$$

Приведенную в приложении Г форму неравенства (Г.14) можно применить к (3.217), при этом  $\mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathfrak{X}^\dagger(\omega)$  будет играть роль  $\mathbf{f}^\dagger$ , а  $[\mathfrak{X}^\dagger(\omega)]^{-1} \mathbf{m}(\omega) \mathfrak{S}(\omega) e^{j\omega T}$  — роль  $\mathbf{d}$ . В результате можно записать

$$d \sqrt{2\pi} \leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}^\dagger(\omega) \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega) \mathfrak{S}(\omega) d\omega \right]^{1/2}, \quad (3.218)$$

где равенство получается тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{t}^\dagger(\omega) = e^{-j\omega T} \mathfrak{S}^*(\omega) \mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega). \quad (3.219)$$

Как видно, оптимальный процессор вновь должен осуществлять обычные операции предварительного выбеливания и согласованной фильтрации.

#### 3.4.4. Обнаружение случайного сигнала

В том случае, когда вектор  $\mathbf{s}$  является случайным, будем предполагать, что его среднее значение  $\mathbf{u}$  и ковариационная матрица  $\mathbf{R}_{ss}$  известны. При этом оптимальная обработка для решения задачи бинарного обнаружения снова сводится к сравнению с порогом отношения правдоподобия.

**Случай гауссовского сигнала и шума.** Когда векторы сигнала  $\mathbf{s}$  и шума  $\mathbf{n}$  являются гауссовскими, то отношение правдоподобия (3.143) принимает вид

$$\Lambda(\mathbf{x}) = K \frac{\exp \left\{ -\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{u})^\dagger [\mathbf{M}\mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{u}) \right\}}{\exp \left\{ -\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x} \right\}}, \quad (3.220)$$

где  $K$  — некоторая постоянная. После логарифмирования (3.220) можно получить следующее выражение для достаточной статистики:

$$y = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{u})^\dagger \{ \mathbf{R}_{nn}^{-1} - [\mathbf{M}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{M}^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} \} (\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{u}) + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{u}, \quad (3.221)$$

где коэффициент  $\alpha$  снова учитывается при установлении порогового уровня.

Если рассматривать  $\mathbf{u}$  как детерминированную часть вектора  $\mathbf{s}$ , а отклонение  $(\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{u})$  — как случайную, то можно заметить, что статистика (3.221) состоит из линейной составляющей, соответствующей статистике в случае известного сигнала [см. (3.201)], и квадратичной составляющей, учитывающей случайную часть вектора наблюдений. В связи с тем, что случай известного сигнала был проанализирован в разд. 3.4.3, здесь будет рассматриваться случай равенства нулю математического ожидания вектора  $\mathbf{s}$ .

При условии  $\mathbf{u} = 0$  выражение (3.221) сводится к

$$y = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\dagger \{ \mathbf{R}_{nn}^{-1} - [\mathbf{M}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{M}^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} \} \mathbf{x}. \quad (3.222)$$

Применяя матричные соотношения (Г.11) и (Г.12) из приложения Г, можно получить следующие эквивалентные формы (3.222):

$$y = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{R}_{ss}^{-1} + \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}, \quad (3.223)$$

$$y = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{M}^\dagger [\mathbf{M}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{M}^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.224)$$

Одним из частных случаев, представляющих определенный практический интерес, является случай, когда  $\mathbf{s}$  — скаляр  $s$ , а  $\mathbf{M}$  — вектор-столбец  $\mathbf{m}$ . При этом выражение (3.223) принимает вид

$$2y = \frac{|\mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{m}|^2}{\varphi_{ss} + \mathbf{m}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{m}}. \quad (3.225)$$

Другой интересный случай относится к малому уровню сигнала, когда

$$[\mathbf{M}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{M}^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} \simeq \mathbf{R}_{nn}^{-1}. \quad (3.226)$$

При этом

$$y = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.227)$$

**Случай гауссовского шума и негауссовского сигнала.** В то время как в задаче обнаружения известного сигнала достаточная статистика линейно зависит от вектора наблюдений, при обнаружении случайного сигнала статистика является квадратичной функцией вектора наблюдений. Аналогичным образом, когда вектор сигнала  $\mathbf{s}$  является негауссовским и для обработки могут использоваться статистики второ-



го порядка, можно определить структуру «наилучшего» квадратичного процессора (в том смысле, что при этом максимизируется показатель качества обнаружения). Полагая, что вектор  $s$  имеет нулевое среднее значение, можно считать, что достаточная статистика имеет вид

$$y = x^{\dagger} \mathbf{K} \mathbf{K}^{\dagger} x, \quad (3.228)$$

и задача теперь сведется к выбору матрицы  $\mathbf{K}$ , максимизирующей показатель качества обнаружения (3.146). Заметим, что так как  $y$  и  $x$  связаны квадратичной зависимостью, а дисперсия  $y$  в знаменателе (3.146) зависит от  $E \{y^2/\text{сигнал отсутствует}\}$ , то при вычислении  $d$  придется определять моменты четвертого порядка вектора наблюдений  $x$ . Считая, что поле шума является гауссовским, требуемые моменты четвертого порядка можно получить с помощью соотношения (Д.52) из приложения Д.

Если  $y$  определяется соотношением (3.228), числитель в формуле 3.146) может быть записан как

$$E \{y/\text{сигнал присутствует}\} - E \{y/\text{сигнал отсутствует}\} = \text{tr} (\mathbf{K}^{\dagger} \mathbf{M} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{K}). \quad (3.229)$$

При использовании (Д.52) знаменатель (3.146) становится равным

$$\sqrt{\text{var} (y/\text{сигнал отсутствует})} = \sqrt{\text{tr} [\mathbf{K}^{\dagger} \mathbf{R}_{nn} \mathbf{K}]^2} \frac{2}{\alpha} \quad (3.230)$$

и, следовательно,

$$d = \frac{\sqrt{(\alpha/2)} \text{tr} (\mathbf{K}^{\dagger} \mathbf{M} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{K})}{\sqrt{\text{tr} [(\mathbf{K}^{\dagger} \mathbf{R}_{nn} \mathbf{K})^2]}}. \quad (3.231)$$

Определим теперь верхнюю границу для  $d$ , используя неравенство Шварца. При этом целесообразно представить  $\mathbf{R}_{nn}$  в виде  $\mathbf{R}_{nn} = \mathbf{T}^{\dagger} \mathbf{T}$ . Тогда, учитывая (Г.17), получим

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sqrt{(\alpha/2)} \text{tr} [(\mathbf{T}^{\dagger})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{K}^{\dagger} \mathbf{T}^{\dagger}]}{\sqrt{\text{tr} \{(\mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{K}^{\dagger} \mathbf{T}^{\dagger})^2\}}} \leq \\ &\leq \sqrt{(\alpha/2) \text{tr} \{(\mathbf{M} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{R}_{nn}^{-1})^2\}}. \end{aligned} \quad (3.232)$$

Равенство в выражении (3.232) достигается при

$$\mathbf{K}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{R}_{nn}^{-1}, \quad (3.233)$$

где

$$\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{\dagger}. \quad (3.234)$$

В результате подстановки (3.233) в (3.228) получим

$$y = x^{\dagger} \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{R}_{nn}^{-1} x. \quad (3.235)$$

Это выражение имеет точно такой же вид, как и (3.227), полученное из отношения правдоподобия в случае малого сигнала.

**Приложение результатов теории обнаружения случайных сигналов к оптимальной обработке в антенной решетке.** Снова используя форму-

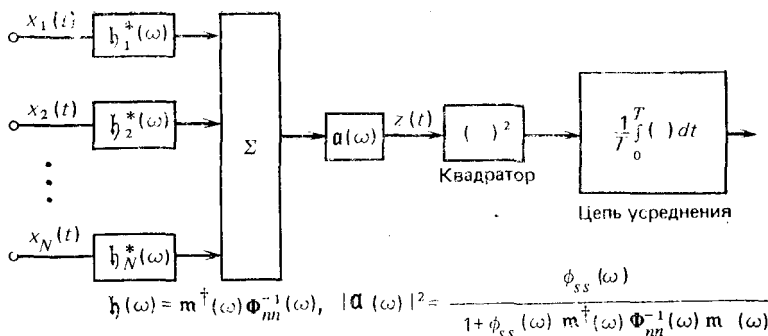


Рис. 3.9. Структурная схема оптимального процессора антенной решеткой при обнаружении случайного сигнала

лу (3.172) для частотной области, непосредственно из (3.223) можно получить выражение для достаточной статистики:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(\omega) &= \frac{1}{2} |a(\omega)|^2 [m^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathfrak{z}(\omega)]^\dagger [m^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathfrak{z}(\omega)] = \\ &= \frac{1}{2} |a(\omega) m^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathfrak{z}(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (3.236)$$

где  $|a(\omega)|^2$  определяется (3.175). Структура оптимального процессора показана на рис. 3.9. При этом для представления соотношения (3.236) во временной области была использована теорема Парсеваля и в качестве тестовой статистики использована величина

$$y(T) = \frac{1}{2T} \int_0^T |z(t)|^2 dt. \quad (3.237)$$

Если выполняется предположение о малом уровне сигнала, то использование (3.227) вместо (3.223) приводит к

$$\mathfrak{h}(\omega) = \frac{1}{2} \varphi_{ss}(\omega) |m^\dagger(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega) \mathfrak{z}(\omega)|^2. \quad (3.238)$$

Выражение (3.238) отличается от (3.236) только тем, что  $\varphi_{ss}(\omega)$  заменяется в (3.236) скалярным множителем  $|a(\omega)|^2$ .

### 3.4.5. Обнаружение неизвестного неслучайного сигнала

В том случае, когда вектор сигнала  $\mathbf{s}$  является неизвестным, но неслучайным, один из подходов, обычно обеспечивающий неплохие результаты, базируется на тесте обобщенного отношения правдоподобия (ООП). При этом процедура основана на отношении вида

$$\Lambda_G(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}/\hat{\mathbf{s}}, \text{ сигнал присутствует})}{p(\mathbf{x}/\text{сигнал отсутствует})}, \quad (3.239)$$

где  $\hat{s}$  выбирается из условия максимизации условной плотности вероятностей  $p(x/s, \text{сигнал присутствует})$  и поэтому является оценкой максимального правдоподобия.

**Случай гауссовского шума.** Когда вектор шума  $\mathbf{n}$  является гауссовским, отношение правдоподобия имеет вид

$$\frac{p(\mathbf{x}/s, \text{сигнал присутствует})}{p(\mathbf{x}/\text{сигнал отсутствует})} = \frac{\exp\{-(\alpha/2)(\mathbf{x} - \mathbf{M}s)^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{M}s)\}}{\exp\{-(\alpha/2)\mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{x}\}}. \quad (3.240)$$

Подставим оценку максимального правдоподобия  $\hat{s}$  (3.180) в выражение (3.240). В результате указанной подстановки получим выражение для ООП в следующем виде:

$$\Lambda_G(\mathbf{x}) = \exp\left\{\frac{\alpha}{2}\mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}\right\}. \quad (3.241)$$

Очевидно, достаточной статистикой будет величина

$$y = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x} \quad (3.242)$$

или

$$y = \frac{1}{2}\hat{s}_1^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}, \quad (3.243)$$

где

$$\hat{s}_1 = [\mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.244)$$

Следует отметить, что если в (3.223) положить  $\mathbf{R}_{ss}^{-1} = \mathbf{0}$ , то в результате получится (3.242).

**Применение результатов теории обнаружения неизвестного неслучайного сигнала к оптимальной обработке в антенной решетке.** Если снова обратиться к представлению в частотной области (3.172), то из выражения (3.242) можно получить следующее соотношение для достаточной статистики:

$$\begin{aligned} \hat{y}(\omega) &= \frac{1}{2}[\mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)]^{-1} [\mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{x}(\omega)]^\dagger \times \\ &\times [\mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{x}(\omega)] = \frac{1}{2}[\mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{m}(\omega)]^{-1} \times \\ &\times |\mathbf{m}^\dagger(\omega) \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \mathbf{x}(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (3.245)$$

Как видно из полученного выражения, наличие множителя  $\mathbf{m}^\dagger(\omega) \times \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega)$  снова означает, что должны выполняться операции предварительного выбеливания и согласованной фильтрации.

### 3.4.6. Коэффициент передачи антенной решетки

Коэффициент передачи антенной решетки определяется как отношение выходного ОСШ к входному ОСШ в зависимости от  $\omega$ . Для линейного процессора, схема которого показана на рис. 3.8, состоящего из набора фильтров (для каждого элемента решетки) и сумматора, выражение для коэффициента передачи решетки будет иметь вид [17].

$$G(\omega) = \frac{\mathbf{t}^\dagger(\omega) \tilde{\Phi}_{ss} \mathbf{t}(\omega)}{\mathbf{t}^\dagger(\omega) \tilde{\Phi}_{nn}(\omega) \mathbf{t}(\omega)}, \quad (3.246)$$

где  $\tilde{\Phi}_{ss}(\omega)$ ,  $\tilde{\Phi}_{nn}(\omega)$  — нормированные матрицы взаимных спектральных плотностей сигнала и шума соответственно, т. е.

$$\Phi_{ss}(\omega) = \sigma_s^2(\omega) \tilde{\Phi}_{ss}(\omega), \quad (3.247)$$

$$\Phi_{nn}(\omega) = \sigma_n^2(\omega) \tilde{\Phi}_{nn}(\omega) \quad (3.248)$$

и  $\sigma_n^2(\omega)$  и  $\sigma_s^2(\omega)$  — усредненные по  $N$  элементам спектральные плотности шума и сигнала соответственно:

$$\sigma_n^2(\omega) = \frac{1}{N} \text{tr} [\Phi_{nn}(\omega)], \quad (3.249)$$

$$\sigma_s^2(\omega) = \frac{1}{N} \text{tr} [\Phi_{ss}(\omega)]. \quad (3.250)$$

В том случае, когда вектор сигнала  $\mathbf{s}(t)$  связан со скалярным сигналом  $s(t)$  известным преобразованием

$$\mathbf{s}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{m}(t-\tau) s(\tau) d\tau, \quad (3.251)$$

то матрица взаимной спектральной плотности  $\tilde{\Phi}_{ss}(\omega)$  будет равна [17]

$$\tilde{\Phi}_{ss}(\omega) = \tilde{\mathbf{m}}(\omega) \tilde{\mathbf{m}}^\dagger(\omega), \quad (3.252)$$

где  $\tilde{\mathbf{m}}(\omega)$  — нормированное преобразование Фурье от  $\mathbf{m}(t)$ , так что

$$\tilde{\mathbf{m}}^\dagger(\omega) \tilde{\mathbf{m}}(\omega) = N. \quad (3.253)$$

Если  $\tilde{\Phi}_{ss}(\omega)$  определяется (3.252), то выражение для коэффициента передачи антенной решетки принимает вид

$$G(\omega) = \frac{|\mathbf{t}^\dagger(\omega) \tilde{\mathbf{m}}(\omega)|^2}{\mathbf{t}^\dagger(\omega) \tilde{\Phi}_{nn}(\omega) \mathbf{t}(\omega)}. \quad (3.254)$$

Величина  $\mathbf{t}^\dagger(\omega) \tilde{\mathbf{m}}(\omega)$  может рассматриваться как скалярное произведение вектора управления диаграммой  $\mathbf{t}$  и направления на сигнал  $\tilde{\mathbf{m}}$  в случае плоских волн. Определим обобщенный угол  $\gamma$  между  $\mathbf{t}$  и  $\tilde{\mathbf{m}}$ , как это сделано в приложении E, тогда

$$\cos^2(\gamma) = \frac{|\mathbf{t}^\dagger(\omega) \tilde{\mathbf{m}}(\omega)|^2}{(\mathbf{t}^\dagger(\omega) \mathbf{t}(\omega)) (\tilde{\mathbf{m}}^\dagger(\omega) \tilde{\mathbf{m}}(\omega))}. \quad (3.255)$$

В обычной диаграммообразующей схеме вектор  $\mathbf{t}$  выгирается пропорциональным вектору  $\mathbf{m}$ , так что  $\gamma = 0$ . Эта операция, как будет показано далее, также максимизирует коэффициент передачи антенной решетки при наличии пространственного белого шума.

Подставляя (3.252) в (3.246) и обозначая  $\mathfrak{z} = \tilde{\Phi}_{nn}^{1/2} \mathbf{t}$ , получаем

$$G(\omega) = \frac{|\mathfrak{z}^\dagger(\omega) \tilde{\Phi}_{nn}^{-1/2}(\omega) \tilde{\mathbf{m}}(\omega)|^2}{\mathfrak{z}^\dagger(\omega) \mathfrak{z}(\omega)}. \quad (3.256)$$

Применение к (3.256) неравенства Шварца (Г.15) дает

$$G(\omega) \leq \tilde{\mathbf{m}}^\dagger(\omega) \tilde{\Phi}_{nn}^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{m}}(\omega), \quad (3.257)$$

где равенство выполняется, когда вектор  $\mathbf{t}^\dagger$  пропорционален вектору  $\tilde{\mathbf{m}}^\dagger \tilde{\Phi}_{nn}^{-1}$ . Поэтому максимизация (без ограничений) коэффициента передачи антенной решетки приведет к тем же самым операциям предварительного выбеливания и согласованной фильтрации, которые были получены ранее в различных задачах обнаружения и оценивания. Отметим также, что такой процессор сводится к обычной диаграммообразующей схеме, когда составляющие шума в различных элементах решетки являются некоррелированными, так что  $\tilde{\Phi}_{nn} = \mathbf{I}$  [45].

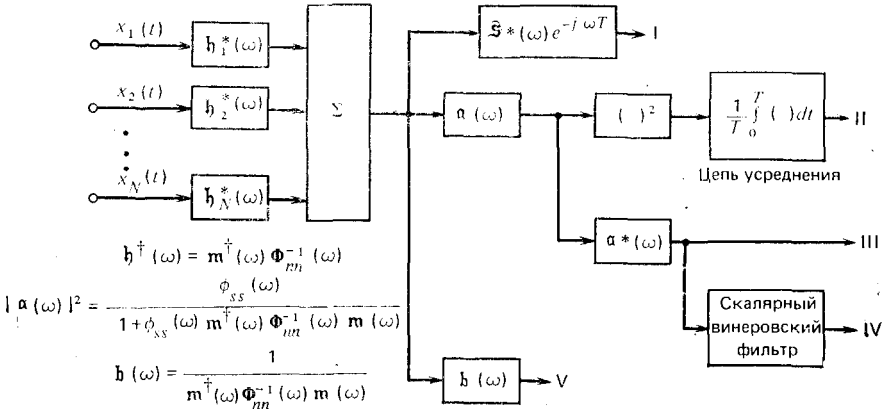
Между максимизацией коэффициента передачи антенной решетки и минимизацией дисперсии сигналов на выходе при заданном отклике системы на полезный сигнал существует тесная взаимосвязь, так как эти операции эквивалентны минимизации знаменателя в (3.246) при фиксированном значении числителя. Поскольку  $G(\omega)$  не меняется при умножении вектора  $\mathbf{t}$  на скалярный множитель, то введение ограничения вида  $\mathbf{t}^\dagger \tilde{\mathbf{m}} = \beta$  не повлияет на  $G(\omega)$ . Поэтому вектор  $\mathbf{t} = \beta \tilde{\Phi}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{m}} / (\tilde{\mathbf{m}}^\dagger \tilde{\Phi}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{m}})$  максимизирует  $G(\omega)$  при ограничении  $\mathbf{t}^\dagger \mathfrak{z} = \beta$ . В работе [3] показано, что максимизация коэффициента передачи антенной решетки и минимизация искажений сигнала на выходе приводят к точно таким же структурам фильтров и для монохроматических сигналов. Можно также показать, что фильтр, обеспечивающий получение оценки максимального правдоподобия, и винеровский фильтр отличаются только скалярной передаточной функцией [46]. Кроме того, известно, что процессоры, основанные на вычислении отношения правдоподобия, на максимизации ОСШ, и процессор, осуществляющий винеровскую фильтрацию, эквивалентны в случае известного с точностью до фазы узкополосного сигнала и аддитивного гауссовского шума [47].

### 3.4.7. Обобщенная структура процессора

В предыдущих разделах с единых позиций были рассмотрены различные методы обнаружения и оценивания, а также критерии эффективности при оптимальной обработке сигналов в антенной решетке. Было показано, что при решении ряда задач оптимального обнаруже-

ния и оценивания сигнала при различных критериях эффективности необходимо осуществлять операции предварительного выбеливания и согласованной фильтрации. Полученный в результате таких операций скалярный выходной сигнал подвергается в дальнейшем обработке в соответствии с характером решаемой задачи.

Результаты, полученные для различных задач, для удобства можно обобщить в виде структурной схемы процессора, показанного на рис. 3.10. Как видно из этого рисунка, принцип «сначала предварительное выбеливание, затем согласованная фильтрация» (характери-



**Рис. 3.10.** Обобщенная структурная схема процессора антенной решетки в случае обработки широкополосных сигналов:

I — обнаружение; известный сигнал; II — обнаружение; случайный сигнал и неизвестный неслучайный сигнал; III — оценка (методом максимального правдоподобия); случайный сигнал и неизвестный неслучайный сигнал; IV — оценка (по критерию МСКО); случайный сигнал и неизвестный неслучайный сигнал; V — максимальный коэффициент передачи антенной решетки и наименьшая дисперсия

зуемый оператором  $\mathbf{m}^\dagger \Phi_{nn}^{-1}$ ) является общим для широкого круга задач оптимизации. Параметры оптимального процессора зависят от обратной матрицы взаимных спектральных плотностей шума. Однако на практике можно получить только матрицу взаимной спектральной плотности на выходах элементов антенной решетки, где в общем случае присутствует смесь полезного сигнала и шума. Использование матрицы взаимной спектральной плотности смеси сигнала с шумом может привести к уменьшению эффективности. В [45] рассматриваются последствия неточного выполнения операций предварительного выбеливания и согласованной фильтрации. Следует также отметить, что процессор, вычисляющий оценку сигнала по минимуму СКО, отличается от процессора, производящего оценку методом максимального правдоподобия, только скалярным винеровским фильтром. Характеристики скалярного винеровского фильтра рассматриваются в разделе данной главы «Задачи».

### 3.5. ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ПРИ СЛОЖНЫХ УСЛОВИЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Как известно, процессор, структурная схема которого показана на рис. 3.8, является оптимальным только тогда, когда матрица взаимной спектральной плотности сигнала имеет «диадную» форму [17], т. е.

$$\Phi_{ss}(\omega) = m(\omega) m^{\dagger}(\omega). \quad (3.258)$$

Влияние любых возмущений, имеющих место в процессоре распространения, приводит к нарушению диадной формы  $\Phi_{ss}(\omega)$  и может привести к структуре, отличной от представленной на рис. 3.8. Для определения характера обработки сигналов в этом более общем случае будет получена структура оптимального процессора для некогерентного узкополосного сигнала.

Рассмотрим задачу обнаружения узкополосного сигнала с неизвестной амплитудой и фазой. Такие условия часто встречаются, когда при распространении сигнала изменяются его амплитуда и фаза. При наличии сигнала принятое колебание может быть представлено формулой

$$x(t) = \text{Re} \{ a e^{j\theta} r(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_0 t} \} + n(t), \quad (3.259)$$

где  $a$  — неизвестная амплитуда;  $\theta$  — неизвестная фаза;  $r(t)$  — известный закон амплитудной модуляции;  $\varphi(t)$  — известный закон фазовой модуляции;  $\omega_0$  — известная частота несущей.

Переходя к вещественному представлению, (3.259) можно записать как

$$x(t) = m_1(t) s_1 + m_2(t) s_2 + n(t), \quad (3.260)$$

где  $s_1 = a \cos \theta$ ;  $s_2 = -a \sin \theta$ ;

$$m_1(t) = r(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = f(t) \cos(\omega_0 t) - g(t) \sin(\omega_0 t); \quad (3.261)$$

$$m_2(t) = r(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)] = f(t) \sin(\omega_0 t) + g(t) \cos(\omega_0 t); \quad (3.262)$$

$$f(t) = r(t) \cos \varphi(t); \quad (3.263)$$

$$g(t) = r(t) \sin \varphi(t), \quad (3.264)$$

причем

$$r(t) = \sqrt{f^2(t) + g^2(t)}; \quad \varphi(t) = \text{arctg} \left\{ \frac{g(t)}{f(t)} \right\}.$$

Выражение (3.259) можно записать и в виде

$$x = \mathbf{m} \mathbf{s} + n, \quad (3.265)$$

где  $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2]$ ;  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$  и  $\text{var}(n) = \sigma_n^2$ .

Теперь можно использовать результаты разд. 3.4.5, посвященного обнаружению неизвестного неслучайного сигнала, когда достаточная статистика определяется выражением (3.242). В случае вещественных величин (3.242) принимает вид

$$y = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{M}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.266)$$

Отметим, что  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$  являются ортогональными функциями, имеющими одинаковую энергию. Поэтому при дискретизации этих функций по времени с целью формирования  $\mathbf{x}^T = [x(t_1), x(t_2), \dots]$  и  $\mathbf{m}_i^T = [m_i(t_1), m_i(t_2), \dots]$  выражение (3.266) для рассматриваемой статистики можно представить в виде

$$y = \frac{1}{2} (\sigma_n^2 |\mathbf{m}_i|^2)^{-1} \{(\mathbf{m}_1^T \mathbf{x})^2 + (\mathbf{m}_2^T \mathbf{x})^2\}. \quad (3.267)$$

Поскольку в (3.267) скалярный множитель  $\frac{1}{2} (\sigma_n^2 |\mathbf{m}_i|^2)^{-1}$  может быть учтен при установлении порогового уровня в тесте отношения правдоподобия, то проверяемую статистику удобно представить как

$$z = (\mathbf{m}_1^T \mathbf{x})^2 + (\mathbf{m}_2^T \mathbf{x})^2. \quad (3.268)$$

При непрерывном интервале наблюдения статистика (3.268) определяется формулой

$$z = \left[ \int_0^T m_1(t) x(t) dt \right]^2 + \left[ \int_0^T m_2(t) x(t) dt \right]^2, \quad (3.269)$$

которую удобно также представить с помощью синусной и косинусной составляющих  $f(t)$  и  $g(t)$ . Используя (3.261) и (3.262), статистику (3.269) можно представить в следующем виде:

$$z = \left[ \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 t) x(t) dt - \int_0^T g(t) \sin(\omega_0 t) x(t) dt \right]^2 + \left[ \int_0^T f(t) \sin(\omega_0 t) x(t) dt + \int_0^T g(t) \cos(\omega_0 t) x(t) dt \right]^2. \quad (3.270)$$

Полученное выражение определяет структуру процессора, показанного на рис. 3.11.

Структурная схема оптимального устройства обнаружения некогерентного сигнала, показанная на рис. 3.11, приводит к более общей структурной схеме процессора сигналов антенной решетки (рис. 3.12). Такая обобщенная структурная схема процессора соответствует случаю, когда предположение о плоском характере принимаемых волн не выполняется из-за имеющихся возмущений при распространении и (или) приеме сигналов. Указанный алгоритм может использоваться при приеме случайных сигналов с произвольной корреляционной матрицей. Процессор сигналов антенной решетки, показанный на рис. 3.12, называется процессором, согласованным в пространстве элементов [48].



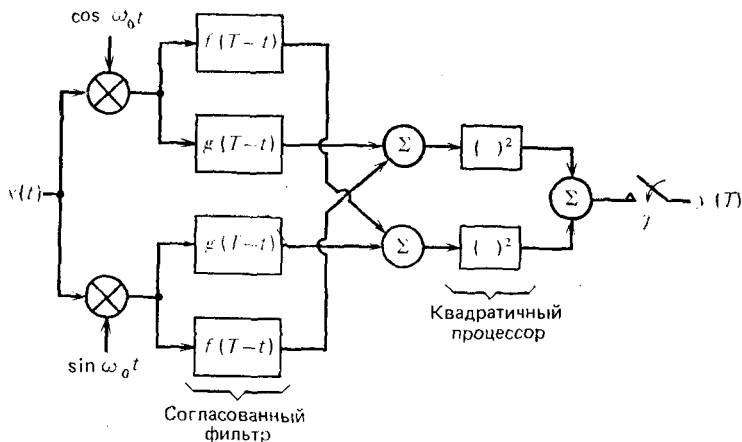


Рис. 3.11. Структурная схема устройства обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и фазой с использованием согласованных фильтров и детекторов огибающей в квадратурных каналах

Рассматривая величину  $M_s$  в выражении (3.147) как сигнал с произвольными характеристиками, коэффициент передачи антенной решетки можно определить, используя понятие показателя качества обнаружения применительно к обобщенному квадратурному процессору [17]. В случае гауссовского шума с учетом (3.231) можно получить выражение для коэффициента передачи

$$G = \frac{\text{tr} [\mathfrak{R}^\dagger(\omega) \Phi_{ss}(\omega) \mathfrak{R}(\omega)]}{\{\text{tr} [\mathfrak{R}^\dagger(\omega) \Phi_{nn}(\omega) \mathfrak{R}(\omega)]\}^{1/2}}. \quad (3.271)$$

Нетрудно видеть, что (3.271) сводится к (3.246), когда  $\mathfrak{R}$  является вектор-столбцом. При сложных условиях распространения  $\Phi_{ss}$  определяется выражением вида [17]

$$\Phi_{ss}(\omega) = \mathbf{U}(\omega) \mathbf{U}^\dagger(\omega), \quad (3.272)$$

где матрица  $\mathbf{U}$  имеет  $N$  строк и  $r$  столбцов, причем  $r$  равняется рангу матрицы  $\Phi_{ss}$ . Для сигнала с плоским волновым фронтом ранг матрицы взаимной спектральной плотности  $\Phi_{ss}$  равен единице, а  $\Phi_{ss}$  имеет вид (3.258). Для максимизации коэффициента передачи антенной решетки (3.271) может быть использована такая же процедура, как и для (3.246). В данном случае, применив (Г.17) вместо (Г.15), можно получить [17]

$$G \leq \{\text{tr} [\Phi_{ss}(\omega) \Phi_{nn}^{-1}(\omega)]\}^{1/2}, \quad (3.273)$$

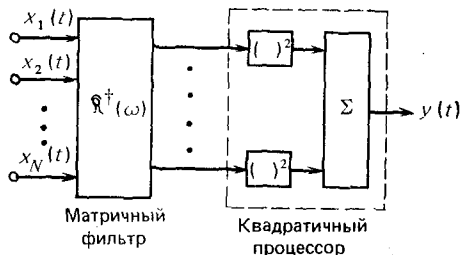


Рис. 3.12. Структурная схема процессора сигналов антенной решетки в общем случае

где равенство выполняется тогда, когда матрица  $\mathcal{K}$  пропорциональна матрице  $\mathcal{U}^{\dagger}\Phi_{nn}^{-1}$ . Это означает, что максимальное значение коэффициента передачи в общем случае не может быть получено, если матрица  $\mathcal{K}$  содержит менее чем  $r$  столбцов.

### 3.6. ВЫВОДЫ

В результате анализа методов оптимальной обработки сигналов антенной решетки в ряде задач обнаружения, оценивания и оптимизации характеристик антенных решеток было показано, что эти методы довольно близки и фактически отличаются лишь скалярной обработкой, которая следует за обычной фильтрацией (в матричном фильтре) и суммированием. Матричный фильтр осуществляет предварительное выбеливание и последующую согласованную фильтрацию. В случае узкополосных сигналов согласованная фильтрация обеспечивает выравнивание времени запаздывания (или фазового сдвига) для получения неискаженного сигнала на выходе. Для широкополосных сигналов необходимо выполнять спектральное согласование, которое не эквивалентно управлению временем запаздывания. При сложных условиях распространения сигнала, характеризуемых некогерентной структурой волнового фронта, необходимо использовать обработку с учетом согласования в пространстве элементов, когда такое согласование может быть выполнено лишь в статистическом смысле. Большинство оптимальных процессоров, рассмотренных в данной главе, предназначено для решения задач оптимизации без ограничений. Различные классы оптимальных процессоров с использованием ограничений приводятся далее в разд. «Задачи».

Оптимальные процессоры сигналов антенных решеток, выполняющие операции предварительного выбеливания и согласованной фильтрации, тесно связаны с оптимальным винеровским решением, которое определяет теоретический предел эффективности, полезный при сравнении реальных систем. Непосредственная реализация алгоритма оптимальной обработки оказывается невозможной, так как статистики, определяющие условия приема сигнала, как правило, неизвестны. Кроме того, даже если статистики, характеризующие условия приема сигнала известны, применимость оптимального процессора будет ограниченной, так как он разработан для определенного поля шума. Поэтому чрезвычайно важны адаптивные методы реализации оптимальных процессоров. Поскольку в установившемся режиме при различных критериях эффективности решения оказываются идентичными или очень близкими, то вопрос о выборе критерия эффективности для конкретного применения обычно не является очень важным. Для разработчика более важными оказываются временные характеристики алгоритма адаптивного управления. Особенный интерес представляют характеристики алгоритмов адаптивного управления, применяемых для подстройки весовых коэффициентов в диаграммообразующей схеме, и поэтому этим вопросам посвящена вторая часть книги.

## ЗАДАЧИ

1. Использование критерия максимума ОСШ при воздействии одного источника помехи [18]. Определенный интерес на практике представляют характеристики линейной адаптивной антенной решетки, управляемой на основе критерия максимума ОСШ, когда имеется дополнительный шум от одиночного точечного источника помехи. Рассмотрим линейную эквидистантную решетку, весовые коэффициенты которой определяются (3.9б). Предположим, что стационарные условия приема характеризуются ковариационной матрицей шума

$$\mathbf{R}_{nnq} = \begin{bmatrix} p_q & & & & \\ & p_q & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & p_q \end{bmatrix} = p_q \mathbf{I}_K,$$

где  $p_q$  — мощность выходного шума каждого из  $K$  элементов антенной решетки;  $\mathbf{I}_K$  — единичная матрица  $K$ -го порядка.

В общем случае амплитуды весовых коэффициентов неодинаковы и диаграмма направленности решетки будет определяться выражением

$$G_q(\beta) = \sum_{k=1}^K a_k e^{j(k-1)(\beta - \beta_s)},$$

где  $\beta = (2\pi d/\lambda) \sin \theta$ .

При использовании матричной формы записи  $G_q(\beta) = \mathbf{b}^T \mathbf{w}_q$ , где

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\beta} \\ e^{j2\beta} \\ \vdots \\ e^{j(K-1)\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_q = \begin{bmatrix} a_1 \\ -j\beta_s \\ a_2 e^{-j2\beta_s} \\ a_3 e^{-j2\beta_s} \\ \vdots \\ a_k e^{-j(K-1)\beta_s} \end{bmatrix}.$$

С учетом вида выражений для  $\mathbf{w}_q$  и  $G_q(\beta)$  можно записать

$$\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{w}_q = G_q(\beta_j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

где величины  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{H}$  определяются далее.

Рассмотрим одиночный источник узкополосной помехи, расположенный под углом  $\theta_j$  относительно равносигнального направления (РСН) антенной решетки. Обозначим сигнал помехи, появляющийся в первом канале (на выходе первого элемента решетки), через  $J(t)$ , тогда сигнал помехи в  $k$ -м канале будет равен  $J(t) \exp[-j(k-1)\beta_j]$ , где  $\beta_j = (2\pi d/\lambda) \sin \theta_j$ . Пусть  $p_j$  — мощность огибающей помехи в каждом канале, тогда  $kl$ -й элемент ковариационной матрицы помехи  $\mathbf{R}_{JJ}$  равен  $p_j \exp[-j(k-l)\beta_j]$ .

А. Покажите, что  $\mathbf{R}_{JJ}$  можно представить в виде

$$\mathbf{R}_{JJ} = p_j \mathbf{H}^* \mathbf{U}\mathbf{H},$$



С учетом приведенных выражений и результатов, полученных в п. В, покажите, что диаграмма направленности при оптимальном весовом векторе может быть записана в виде

$$G(\beta) = \mathbf{b}^T \mathbf{w} = \mathbf{b}^T \mathbf{w}_q - \left( \frac{p_J}{p_q + K p_J} \right) G_q(\beta_J) \mathbf{b}_J^*,$$

где  $\mathbf{b}_J = \mathbf{b}(\beta) |_{\beta = \beta_J}$ .

Д. С учетом обозначения  $\mathbf{b}^T \mathbf{w}_q = G_q(\beta)$  (см. п. Г), покажите, что  $\mathbf{b}^T \mathbf{b}_J^* = C(\beta - \beta_J)$ , где

$$C(x) = \exp \left\{ j \left[ \frac{(K-1)x}{2} \right] \frac{\sin Kx/2}{\sin x/2} \right\}.$$

Е. Используя соотношение  $\mathbf{b}^T \mathbf{w}_q = G_q(\beta)$  и результаты, полученные в пп. Г и Д, покажите, что

$$G(\beta) = G_q(\beta) - \left( \frac{p_J}{p_q + K p_J} \right) G_q(\beta_J) C(\beta - \beta_J).$$

Согласно приведенному выражению при воздействии одного источника помехи диаграмма направленности адаптивно управляемой линейной антенной решетки описывается двумя составляющими. Первая составляющая характеризует оптимальную диаграмму направленности при отсутствии помехи  $G_q(\beta)$ , тогда как вторая (которая вычитается из первой) имеет вид  $(\sin Kx)/(\sin x)$  и определяет форму компенсирующей диаграммы с максимумом в направлении на источник помехи.

Ж. Анализируя результаты п. Е, можно заметить, что  $C(x)|_{x=0} = K$ . Используя этот факт, покажите, что коэффициент передачи антенной решетки в направлении на источник помехи будет определяться выражением

$$G(\beta_J) = \left( \frac{p_q}{p_q + K p_J} \right) G_q(\beta_J).$$

В случае фиксированных значений весовых коэффициентов антенной решетки коэффициент передачи диаграммы направленности в направлении на источник помехи будет равен  $G_q(\beta_J)$ . Поэтому предыдущий результат показывает, что адаптивное управление уменьшает коэффициент передачи в направлении на источник помехи пропорционально отношению

$$\frac{p_q}{p_q + K p_J} = \frac{1}{1 + K(p_J/p_q)}.$$

3. При воздействии помехи подходящим показателем улучшения эффективности работы адаптивной системы является коэффициент подавления, определяемый выражением

$$\Gamma \triangleq \frac{\gamma}{1 - \gamma(J/N)_q},$$

где

$$\gamma \triangleq \frac{\mathbf{w}_q^\dagger \mathbf{R}_{nn} \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{R}_{JJ} \mathbf{w}_q}{\mathbf{w}_q^\dagger \mathbf{R}_{JJ} \mathbf{w}_q},$$

$(J/N)_q$  — выходное отношение помеха-шум при  $w = w_q$ , т. е.

$$\left(\frac{J}{N}\right)_q \triangleq \frac{w_q^\dagger R_{JJ} w_q}{w_q^\dagger R_{nnq} w_q}.$$

Оценим величины  $\gamma$  и  $\Gamma$  при воздействии одиночного источника помехи. Сначала покажите, что

$$R_{nnq} R_{nn}^{-1} = I_k - \left(\frac{1}{p_q + K\rho_J}\right) R_{JJ},$$

затем, что

$$R_{JJ} R_{JJ} = K\rho_J R_{JJ},$$

и, наконец, получите

$$R_{nnq} R_{nn}^{-1} R_{JJ} = \left(\frac{\rho_q}{p_q + K\rho_J}\right) R_{JJ}.$$

Подставляя эти соотношения в формулу для  $\gamma$ , получаем

$$\gamma = 1/[1 + (K\rho_J/\rho_q)].$$

Для диаграммы направленности вида  $(\sin Kx)/(\sin x)$  максимальная выходная мощность помехи равна  $K\rho_J$ , что будет иметь место при действии помехи в направлении максимума главного лепестка диаграммы направленности. Следовательно, максимальное значение отношения  $(J/N)_q$  будет равно  $K\rho_J/\rho_q$  и при этом  $\Gamma = 1$  (что свидетельствует об отсутствии подавления помехи). Однако если помеха принимается по боковым лепесткам диаграммы направленности,  $(J/N)_q \ll (K\rho_J/\rho_q)$ , так что  $\gamma (J/N)_q \ll 1$  и, следовательно,  $\Gamma \simeq \gamma$ . Таким образом, при приеме помехи по боковым лепесткам диаграммы направленности с помощью адаптивной подстройки помеха «подавляется» примерно пропорционально отношению помеха-шум в компенсирующем луче.

## 2. Влияние погрешностей установки адаптивных весовых коэффициентов [49].

А. Для когерентного компенсатора помех, принимаемых по боковым лепесткам диаграммы направленности, изображенного на рис. 3.5, покажите, что при  $w_0 = 1$

$$P_r = P_x - w^\dagger z - z^\dagger w + w^\dagger R_{yy} w.$$

Б. Учитывая равенства  $w_{\text{опт}} = R^{-1}z^*$  и  $P_{r\text{мин}} = P_x - z^\dagger R^{-1}z$ , покажите, что если  $w = w_{\text{опт}} + \Delta$ , то  $P_r = P_{r\text{мин}} + P_{\text{доб}}$ , где  $P_{\text{доб}} = \Delta^\dagger R_{yy} \Delta$ . Поскольку  $P_{\text{доб}}$  определяется эрмитовой формой, то  $P_{\text{доб}}$  будет ограничено наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы  $R_{yy}$ , т. е.

$$\lambda_{\text{мин}} \|\Delta\|^2 \leq P_{\text{доб}} \leq \lambda_{\text{макс}} \|\Delta\|^2,$$

где  $\|\Delta\|^2 \triangleq \Delta^\dagger \Delta$ .

В. Рассмотрите вариант расчета, относящийся к наихудшему случаю. Будем считать, что каждый элемент вспомогательной антенной решетки принимает одинаковую мощность сигнала помехи  $P_{I_a}$ . Предположим также, что приемники каждого элемента этой решетки имеют одинаковую мощность составляющих собственного шума приемника  $P_n$ . При этих условиях каждый диагональный элемент матрицы  $R_{yy}$  будет равен  $P_n + P_{I_a}$  и поэтому  $\text{tr}(R_{yy}) = N(P_n + P_{I_a})$ . Поскольку наибольшее собственное значение  $R_{yy}$  меньше, чем  $\text{tr}(R_{yy})$ , то  $P_{\text{доб}} \leq$

$\leq N (P_n + P_{I_a}) \|\Delta\|^2$ . Предположим, что погрешности весовых коэффициентов обусловлены ошибками квантования и при этом квант в синфазном и квадратурном каналах равен  $q$ . В наихудшем случае ошибка квантования составляющих каждого комплексного весового коэффициента будет одинаковой и равной  $(q/2) \times (i \pm j)$ . С учетом изложенного покажите, что

$$P_{\text{доб}} \leq \frac{N^2 q^2}{2} (P_n + P_{I_a}).$$

Г. Отношение помеха-шум  $(P_I/P_n)_{\text{осн}}$  для основного канала связано с отношением помеха-шум  $(P_I/P_n)_{\text{доп}}$  для каждого из вспомогательных каналов зависимостью

$$\left( \frac{P_I}{P_n} \right)_{\text{осн}} = |\alpha|^2 \left( \frac{P_{I_a}}{P_n} \right)_{\text{доп}},$$

где  $\alpha$  — среднее значение коэффициента передачи основной антенны в области бокового лепестка. Полагая, что  $\alpha$  определяется выражением

$$\alpha = q \cdot 2^{B-1},$$

где  $B$  — число разрядов квантователя; при  $(P_I/P_n)_{\text{осн}} \gg 1$  с помощью результатов п. Г покажите, что

$$\frac{P_{\text{доб}}}{P_{r_{\text{min}}}} = \left( \frac{N^2}{2^{2B-1}} \right) R_0,$$

где  $R_0 \triangleq P_{r_{\text{min}}}/P_n$ .

Д. Основное применение анализа работы в наихудшем случае сводится к определению наименьшего числа разрядов, при котором не наблюдается ухудшения эффективности, характеризуемой отношением сигнал-помеха (ОСП). В том случае, когда имеющееся число разрядов значительно меньше определенного таким образом минимального числа, следует обратиться к расчетам на основе СКО, позволяющим более точно определить ОСП. Единственное изменение процедуры, связанное с использованием анализа на основе СКО, заключается в соответствующей трактовке величины  $\|\Delta\|^2$ . Считая, что погрешности весовых коэффициентов в синфазных и квадратурных каналах независимы и имеют равномерное распределение, покажите, что

$$\|\Delta\|_{\text{ср}}^2 = \frac{1}{6} \|\Delta\|_{\text{max}}^2,$$

и получите соответствующее выражение для  $P_{\text{доб}}$  и  $P_{\text{доб}}/P_{r_{\text{min}}}$ .

**3. Линейная винеровская фильтрация широкополосных сигналов [50].**  
Рассмотрим скалярный сигнал

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где полезный сигнал  $s(t)$  и шум  $n(t)$  не коррелированы. Сигнал  $x(t)$  пропускается через линейный фильтр с характеристикой  $h(t)$  такой, что выходной сигнал  $y(t)$  будет аппроксимировать  $s(t)$  с наименьшей СКО. Ошибка оценки  $y(t)$  определяется выражением

$$e(t) = y(t) - s(t).$$

Желательно минимизировать величину  $E \{e^2(t)\}$ , когда  $y(t)$  можно представить в следующем виде:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t-\tau) d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t-\tau) d\tau}_{\triangleq s'(t)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) n(t-\tau) d\tau}_{\triangleq n'(t)}.$$

А. Покажите, что

$$E \{e^2(t)\} = E \{ \underbrace{[s'(t) - s(t)]^2}_{\substack{\text{составляющая, ха-} \\ \text{рактеризующая ис-} \\ \text{кажения сигнала}}} + \underbrace{n'^2(t)}_{\substack{\text{составляющая} \\ \text{шума}}} \}.$$

Б. Покажите, что

$$E \{n'^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_{nn}(\nu) h(\tau) h(\tau+\nu) d\nu d\tau,$$

где  $r_{nn}(\nu)$  — корреляционная функция шума  $n(t)$ .

В. Определим частотную характеристику фильтра следующим образом:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \mathfrak{F} \{h(t)\}.$$

Покажите, что

$$E \{n'^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) H^*(\omega) \varphi_{nn}(\omega) d\omega,$$

где  $\varphi_{nn}(\omega) = \mathfrak{F} \{r_{nn}(\tau)\}$  — спектральная плотность шума  $n(t)$ . Покажите, что

$$E \{[s'(t) - s(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - H(\omega)] [1 - H^*(\omega)] \varphi_{ss}(\omega) d\omega$$

и при этом

$$E \{e^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{H(\omega) H^*(\omega) \varphi_{nn}(\omega) + [1 - H(\omega)] [1 - H^*(\omega)] \varphi_{ss}(\omega)\} d\omega.$$

Г. Будем минимизировать величину  $E \{e^2(t)\}$ , выбирая соответствующим образом  $H(\omega)$ . Поскольку подынтегральное выражение, приведенное в п. В, является положительным при любом  $H(\omega)$ , то для его минимизации необходимо выбрать только подходящий вид  $H(\omega)$ . Покажите, что приравняв градиент по  $H(\omega)$  подынтегральной функции в выражении для  $E \{e^2(t)\}$  нулю, получим частотную характеристику

$$H_{\text{опт}}(\omega) = \frac{\varphi_{ss}(\omega)}{\varphi_{ss}(\omega) + \omega_{nn}(\omega)}$$

оптимального скалярного винеровского фильтра. Таким образом, в случае скалярных процессов винеровский фильтр определяется спектральными плотностями сигнала и шума и формирует на выходе оценку сигнала с минимальной СКО. Нетрудно показать, что соответствующий результат может быть получен и для векторных процессов, т. е.

$$\mathfrak{H}_{\text{опт}}(\omega) = [\Phi_{ss}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega)]^{-1} \Phi_{ss}(\omega).$$



При  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$ , где  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{v}d(t)$ , выражение для  $\mathfrak{h}_{\text{опт}}(\omega)$  принимает вид

$$\mathfrak{h}_{\text{опт}}(\omega) = \Phi_{xx}^{-1}(\omega) \Phi_{xd}(\omega),$$

которое представляет собой обобщение условия (3.56) для широкополосного сигнала. Заметим, что при получении частотной характеристики винеровского фильтра не учитывались условия физической реализуемости.

Д. Определите характеристику такого скалярного винеровского фильтра, чтобы в результате его подключения к точке III схемы на рис. 3.10 на его выходе формировалась оценка сигнала  $s(t)$  с минимальной СКО. Аналогичным образом найдите характеристику соответствующего скалярного винеровского фильтра, подключаемого к точке V схемы.

4. **Максимизация коэффициента передачи антенной решетки при линейных ограничениях** [17]. Было установлено, что максимизация коэффициента передачи антенной решетки при ограничении вида  $\mathbf{k}^T \mathbf{m} = \beta$  может быть обеспечена благодаря использованию имеющейся степени свободы при определении величин  $\mathbf{k}$ . Задача с ограничением вида  $\mathbf{k}^T \mathbf{d} = 0$  может рассматриваться как частный случай более общей задачи с несколькими линейными ограничениями. Многократные линейные ограничения могут вводиться для поддержания относительного постоянного коэффициента передачи антенной решетки при различных возмущениях сигнала; тем самым уменьшается чувствительность к воздействию таких возмущений. Эти ограничения могут служить также для управления уровнями боковых лепестков диаграммы направленности. Общая задача при этом может быть сформулирована следующим образом: получение наименьшей выходной мощности  $z$  при ограничении вида  $\mathbf{H}^T \mathbf{k} = \mathbf{g}$ , где каждой строке матрицы ограничений  $\mathbf{H}^T$  соответствует ограничение  $\mathbf{h}_i^T \mathbf{k} = g_i$ . Очевидно, что общее число строк не должно превышать числа элементов антенной решетки, иначе задача будет переопределенной. Если ввести указанные ограничения в выражение для выходной мощности, используя при этом вектор множителей Лагранжа  $\lambda$ , то задача сведется к минимизации выражения вида

$$z = \mathbf{k}^T \Phi_{xx} \mathbf{k} + \lambda^T [\mathbf{H}^T \mathbf{k} - \mathbf{g}] + [\mathbf{k}^T \mathbf{H} - \mathbf{g}^T] \lambda.$$

А. Дополните выражение для  $z$  до полного квадрата и получите для  $z$  эквивалентное выражение

$$z = [\mathbf{k}^T + \lambda^T \mathbf{H}^T \Phi_{xx}^{-1}] \Phi_{xx} [\Phi_{xx}^{-1} \mathbf{H} \lambda + \mathbf{k}] - \lambda^T \mathbf{H}^T \Phi_{xx}^{-1} \mathbf{H} \lambda - \lambda^T \mathbf{g} - \mathbf{g}^T \lambda.$$

Поскольку здесь  $\mathbf{k}$  появляется только в первом слагаемом, представляющем собой квадратичную форму, то, очевидно, значением  $\mathbf{k}$ , минимизирующим это выражение, является такое, при котором эта квадратичная форма равна нулю

$$\mathbf{k}_{\text{опт}} = -\Phi_{xx}^{-1} \mathbf{H} \lambda.$$

Б. Используя уравнение ограничений  $\mathbf{H}^T \mathbf{k} = \mathbf{g}$ , исключите параметр  $\lambda$  из выражения для  $\mathbf{k}_{\text{опт}}$ , полученного в п. А, и покажите, что

$$\mathbf{k}_{\text{опт}} = \Phi_{xx}^{-1} \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \Phi_{xx}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{g}.$$

При этом значении  $\mathbf{k}$  выражение для выходной мощности имеет вид

$$z = \mathbf{g}^T [\mathbf{H}^T \Phi_{xx}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{g}.$$

В. При использовании процессора, схема которого приведена на рис. 3.12, выходная мощность будет определяться формулой  $z = \text{tr}(\mathfrak{M}^T \Phi_{xx} \mathfrak{M})$ . Задача минимизации  $z$  при линейных ограничениях вида  $\mathbf{H}^T \mathfrak{M} = \mathbf{L}$  решается с помощью матрицы множителей Лагранжа  $\Lambda$  и сводится к минимизации выражения

$$z = \text{tr}(\mathfrak{M}^T \Phi_{xx} \mathfrak{M} + \Lambda^T [\mathbf{H}^T \mathfrak{M} - \mathbf{L}] + [\mathfrak{M}^T \mathbf{H} - \mathbf{L}^T] \Lambda).$$

Дополните это выражение до полного квадрата и покажите, что оптимальное решение имеет вид

$$\mathfrak{N}_{\text{опт}} = \Phi_{xx}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{N}^{\dagger} \Phi_{xx}^{-1} \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{L},$$

при этом

$$\mathfrak{N}_{\text{опт}}^{\dagger} \Phi_{xx} \mathfrak{N}_{\text{опт}} = \mathbf{L}^{\dagger} [\mathbf{N}^{\dagger} \Phi_{xx}^{-1} \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{L}.$$

**5. Введение линейных ограничений, когда в качестве критерия эффективности используется СКО [15].** Теоретически оптимальная структура процессора сигналов антенной решетки, обеспечивающая максимизацию (или минимизацию) качества в соответствии с выбранным критерием эффективности, может оказаться слишком сложной или дорогостоящей для выполнения обработки в полном объеме. Это обстоятельство приводит к необходимости рассмотрения подоптимальных процессоров сигналов антенных решеток, в которых на структуру процессора накладываются определенные ограничения, связанные с условиями приема сигнала и наличием помех.

Говорят, что  $K$ -компонентный весовой вектор  $\mathbf{w}$  является линейно ограниченным, если

$$f = \mathbf{c}^{\dagger} \mathbf{w}.$$

Число линейных ортонормированных ограничений для вектора  $\mathbf{w}$  не должно превышать  $K$  для сохранения степеней свободы, необходимых при адаптации.

А. Выражение для СКО можно представить в виде

$$E \{ |y - y_A|^2 \},$$

где  $y_A = \mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{x}$ .

Поэтому

$$E \{ |y - y_A|^2 \} = E \{ |y|^2 \} - 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{r}_{xy} \} + \mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}.$$

Добавив к полученному выражению для СКО уравнение, определяющее ограничение с комплексным множителем Лагранжа, получим

$$J = E \{ |y|^2 \} - 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{r}_{xy} \} + \mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \lambda [f - \mathbf{c}^{\dagger} \mathbf{w}] + [f^* - \mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{c}] \lambda^*.$$

Вычислив градиент этого выражения по  $\mathbf{w}$  и приравняв его нулю, получим

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} [\mathbf{r}_{xy} + \lambda^* \mathbf{c}].$$

Б. Учитывая ограничение  $f = \mathbf{c}^{\dagger} \mathbf{w}$ , получите следующее выражение для

$$\lambda = \frac{f^* - \mathbf{r}_{xy}^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c}}.$$

Это выражение можно подставить в формулу для  $J$  из п. А и получить результирующее решение для оптимального процессора сигналов антенной решетки с учетом введенных ограничений.

**6. Случай нескольких линейных ограничений [15].** Многократные линейные ограничения для процессора сигналов антенной решетки можно представить в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{w},$$

где множество столбцов  $\{c_i/i = 1, 2, \dots, M\}$  матрицы  $\mathbf{C}$  должно быть ортонормированным множеством векторов.

Найдите оптимальное решение для весового вектора  $\mathbf{w}$  с помощью метода множителей Лагранжа.

**7. Введение квадратичных ограничений при использовании в качестве критерия эффективности среднего значения выходной мощности [15].** Квадратичное ограничение, накладываемое на весовой вектор  $\mathbf{w}$ , имеет вид

$$g = \mathbf{w}^{\dagger} \mathbf{Q} \mathbf{w},$$

где  $\mathbf{Q}$  — эрмитова матрица размером  $K \times K$ .

А. Среднее значение выходной мощности сигнала антенной решетки определяется выражением

$$E \{|y|^2\} = E \{w^\dagger x x^\dagger w\} = w^\dagger E \{x x^\dagger\} w = w^\dagger R_{xx} w.$$

Добавив уравнение ограничения с комплексным множителем Лагранжа, получим

$$J = w^\dagger R_{xx} w + \lambda [g - w^\dagger Q w].$$

Вычисляя градиент полученного выражения по  $w$  и приравнявая его нулю, покажите, что экстремальное значение  $w$  удовлетворяет условию

$$R_{xx}^{-1} Q w = \lambda^{-1} w.$$

Б. Из полученного уравнения видно, что  $w$  является собственным вектором матрицы  $(R_{xx}^{-1} Q)$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$ . Поэтому максимизация (минимизация)  $J$  соответствует выбору наименьшего (наибольшего) собственного значения матрицы  $(R_{xx}^{-1} Q)$ . Отсюда следует, что ограничение может рассматриваться как простое масштабирование (scaling<sup>1)</sup>) весового вектора в процессоре сигналов антенной решетки.

В. Определите оптимальное значение весового вектора  $w$  при нескольких линейных и квадратичном ограничениях. Снова отметим, что квадратичное ограничение сведется просто к масштабированию весового вектора  $w$ .

8. Введение специальных ограничений, когда в качестве критерия эффективности антенной решетки, настроенной на сигнал, используется среднее значение выходной мощности [48].

А. Рассмотрим задачу минимизации выходной мощности антенной решетки

$$P_0 = w^\dagger R_{xx} w$$

при ограничениях вида  $C^+ w = f$ .

Покажите, что решение этой задачи имеет вид

$$w_{\text{опт}} = R_{xx}^{-1} C [C^\dagger R_{xx}^{-1} C]^{-1} f.$$

Б. Пусть  $C = \mathbf{1}$  —  $N$ -мерный вектор-столбец, каждая составляющая которого равна единице. Пусть  $f = C^\dagger \mathbf{1} = N$ .

Покажите, что соответствующий оптимальный весовой вектор определяется выражением

$$w_{\text{опт}} = \frac{N R_{xx}^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^T R_{xx}^{-1} \mathbf{1})}.$$

При этом ограничении весовой вектор минимизирует выходную мощность во всех направлениях за исключением предварительно установленного направления поиска.

В. Пусть  $C$  — матрица размером  $N \times 3$ , определяемая выражением

$$C = P [e_1, e, e_2],$$

где  $e$ ,  $e_1$  и  $e_2$  — векторы опорных направлений. Пусть

$$f = P^+ e = \begin{bmatrix} e_1^\dagger e \\ N \\ e_2^\dagger e \end{bmatrix}$$

и  $C^\dagger w = f$ . Покажите, что соответствующий оптимальный весовой вектор при данном типе ограничений имеет вид

$$w_{\text{опт}} = R_{xx}^{-1} P [P^\dagger R_{xx}^{-1} P]^{-1} P^+ e.$$

<sup>1)</sup> Не ясно, что авторы имеют в виду. (Прим. ред.)

Г. Пусть матрица ограничений имеет размер  $N \times k$  и определяется выражением<sup>1</sup>

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} = [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_0, \mathbf{e}''_0, \dots],$$

где  $\mathbf{e}_0$  — опорный вектор антенной решетки;  $\mathbf{e}'_0$  — производная  $\mathbf{e}_0$  по  $\sin \theta_0$  ( $\theta_0$  — направление поиска);  $\mathbf{e}''_0$  — вторая производная  $\mathbf{e}_0$  по  $\sin \theta_0$  и  $\mathbf{f}^T = \delta_{10}^T [N, 0, 0, \dots]$ . Покажите, что соответствующий оптимальный весовой вектор определяется выражением

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{D} [\mathbf{D}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{D}]^{-1} \delta_{10}.$$

9. **Оценки максимального правдоподобия дальности и угловой координаты цели** [39]. Оптимальные процессоры сигналов антенных решеток, разработанные для обнаружения и оценивания полезных сигналов, могут лишь частично удовлетворять требованиям, предъявляемым к системам обработки сигналов, так как следующим этапом обработки является выделение информации о таких параметрах цели, как ее дальность и угловые координаты.

С помощью устройства оценки методом максимального правдоподобия выбирается параметр  $\alpha$ , максимизирующий функцию условной плотности вероятности (или «функцию правдоподобия»)  $p(\mathbf{x}/\alpha)$ . Поскольку обычно удобнее работать с  $\ln p(\cdot)$ , то решения находятся из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln p(\mathbf{x}/\alpha) = 0.$$

С помощью функционала правдоподобия

$$y(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln p(\mathbf{x}/\alpha)$$

оценку максимального правдоподобия  $\hat{\alpha}_{\text{МП}}$  можно получить, приравняв  $y(\alpha)$  нулю, а характеристики  $\hat{\alpha}_{\text{МП}}$  — найти по виду  $y(\alpha)$ .

В том случае, когда составляющие вектора принимаемого сигнала  $\mathbf{x}$  являются комплексными гауссовскими случайными процессами, функция  $p(\mathbf{x}/\alpha)$  описывается выражением

$$p(\mathbf{x}/\alpha) = \frac{1}{\text{Det}(\pi \mathbf{M})} \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{M} = \Phi_{ss}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega)$ .

А. Используя приведенное выражение для  $p(\mathbf{x}/\alpha)$ , покажите, что функционал правдоподобия может быть представлен как

$$y(\alpha) = \mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} - \text{tr} \left( \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \right).$$

Заметим, что  $\Phi_{ss}(\omega)$  является функцией  $\alpha$ , а  $\Phi_{nn}(\omega)$  не зависит от  $\alpha$ .

Б. Можно показать [39], что дисперсия оценки  $\hat{\alpha}_{\text{МП}}$  в случае пространственного некогерентного шума пропорциональна величине

$$\text{var}(\hat{\alpha}_{\text{МП}}) \propto [\text{tr}(\mathbf{T} \mathbf{T}^T)]^{-1},$$

<sup>1</sup> Указанное ограничение может быть использовано для сохранения неизменными как коэффициента передачи в заданном направлении, так и производных диаграммы для этого направления. (Прим. ред.)

где  $\mathbf{T}$  — весовая матрица, учитывающая все геометрические свойства данной антенной решетки. В частности, в случае линейных антенных решеток матрица  $\mathbf{T}$  содержит следующие элементы:

$$t_{ij} = \frac{\sin \theta}{v} (z_i - z_j) \text{ для оценки углового положения;}$$

$$t_{ij} = -\frac{\sin^2 \theta}{2vr^2} (z_i^2 - z_j^2) \text{ для оценки дальности,}$$

где  $\theta$  — угловая координата источника сигнала относительно нормали к раскрыву антенной решетки;  $z_n$  — положение  $n$ -го элемента антенной решетки;  $v$  — скорость распространения сигнала;  $r$  — истинная дальность до цели.

Покажите, что для эквидистантной антенной решетки длиной  $L$  при числе элементов  $K \gg 1$  будут удовлетворяться условия:

$$[\text{tr} (\mathbf{T}\mathbf{T}^\dagger)]^{-1} = \frac{6v^2}{K^2 L^2 \sin^2 \theta} \text{ для оценки углового положения;}$$

$$[\text{tr} (\mathbf{T}\mathbf{T}^\dagger)]^{-1} = \frac{45v^2 r^4}{2L^4 K^2 \sin^4 \theta} \text{ для оценки дальности.}$$

Из приведенных выражений видно, что точность оценки дальности сильно зависит от ее истинного значения, тогда как точность оценки углового положения от дальности не зависит (за исключением зависимости ОСШ от дальности). Оценка дальности в большей степени зависит от размера антенной решетки по сравнению с оценкой углового положения.

**10. Подоптимальная байесовская оценка угловой координаты цели [9].** Задача обработки сигналов, связанная с выделением информации о параметрах, таких как угловая координата цели, может быть также решена как задача получения байесовской оценки. Устройство оценки по критерию Байеса вычисляет условное среднее на основе наблюдаемых данных

$$\hat{u} = E \{u_k/x\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_k p(u_k/x) du,$$

где  $u_k = \sin \theta$  — угловая координата  $k$ -й цели;  $\mathbf{x}$  — вектор наблюдаемых данных. Плотность апостериорной вероятности  $p(u/x)$  может быть переписана с учетом формулы Байеса в виде

$$p(u/x) = \frac{p(\mathbf{x}/u) p(u)}{p(\mathbf{x})}.$$

Оптимальные устройства оценивания, получающиеся при таком подходе, оказываются довольно сложными, требующими вычисления кратных интегралов, и, как следствие, слишком длительной обработки. Поэтому важное практическое значение имеет разработка простых подоптимальных устройств оценки, близких к оптимальному байесовскому оценивающему устройству.

А. Нелинейная аппроксимация самого низкого порядка для байесовской оценки имеет вид [9]

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{x}^T \mathbf{B},$$

где матрица  $\mathbf{B}$  угловых положений цели представляется вектор-строкой вида

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N].$$

Полагая, что антенная решетка содержит  $(2K + 1)$  элементов и выходной сигнал каждого элемента усилен и продетектирован синхронными квадратурными детекторами, можно записать следующее выражение для выходного сигнала  $m$ -й пары квадратурных детекторов:

$$x_{ym}(t) = s_{ym}(t) + n_{ym}(t),$$

$$x_{zm}(t) = s_{zm}(t) + n_{zm}(t).$$

Тогда  $2K(2K + 1)$ -мерный вектор-столбец наблюдаемых данных можно записать в виде

$$\mathbf{x} = [x_{ym} \ x_{zm}],$$

где каждая пара элементов с индексами  $m, n$  занимает отдельную строку. Определим  $2K(2K + 1)$ -мерный вектор-столбец коэффициентов в виде

$$\mathbf{b}_k = [b_{mn}^{(k)}] \text{ при } m \neq n,$$

где снова каждая пара элементов с индексами  $m, n$  занимает отдельную строку. Полная матрица коэффициентов  $\mathbf{B}$  будет определяться матрицей размером  $2K(2K + 1) \times N$ :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N].$$

Покажите, что для обеспечения ортогональности оценки и ошибки оценки, т. е.  $E[\widehat{\mathbf{u}}^T(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}})] = 0$ , матрица  $\mathbf{B}$  должна иметь вид

$$\mathbf{B} = [E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}]^{-1} E\{\mathbf{x}\mathbf{u}\}.$$

Если матрица  $\mathbf{B}$  выбирается указанным способом, то СКО оценки углового положения  $k$ -й цели будет равна

$$\mathfrak{E}_k = E[u_k(u_k - \widehat{u}_k)] = E\{u_k^2\} - [E\{\mathbf{x}u_k\}]^T [E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}]^{-1} [E\{\mathbf{x}u_k\}].$$

Б. Рассмотрим задачу оценки углового положения одиночной цели с помощью двухэлементной антенной решетки. Из результатов п. А следует, что

$$\widehat{\mathbf{u}} = b_{12} x_{y1} x_{z2} + b_{21} x_{y2} x_{y1}.$$

Предположим, что составляющие сигналов на выходах квадратурных детекторов определяются соответственно как

$$s_{ym} = \alpha \cos m\pi u + \beta \sin m\pi u,$$

$$s_{zm} = \beta \cos m\pi u - \alpha \sin m\pi u,$$

где совместная плотность вероятностей для  $\alpha, \beta$  определяется формулой

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Кроме того, предположим также, что квадратурные составляющие шума являются независимыми, так что плотность вероятностей шума, возникающего в  $m$ -м элементе антенны, будет

$$p(n_{ym}, n_{zm}) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left\{-\frac{n_{ym}^2 + n_{zm}^2}{2\sigma_n^2}\right\}.$$

Рассмотренные здесь модели сигнала и шума соответствуют изменению огибающих по рэлеевскому закону и наличию аддитивного шума, обусловленного отражениями от местности. Покажите, что оптимальными коэффициентами для определения оценки  $\hat{u}$  являются

$$b_{12} = -b_{21} = \frac{(1/\sigma^2) E \{u \sin \pi u\}}{4E \{\sin^2 \pi u\} + 2/\gamma + 1/\gamma^2},$$

где  $\gamma \triangleq \sigma^2/\sigma_n^2$  — отношение сигнал-шум. Покажите также, что СКО при использовании рассматриваемого устройства оценки будет определяться выражением

$$\text{СКО} = E \{u^2\} - \frac{E^2 \{u \sin \pi u\}}{2E \{\sin^2 \pi u\} + 1/\gamma + 2/2\gamma^2}$$

и поэтому зависит только от ОСШ и  $p(u)$ .

**11. Применение критерия минимума выходной мощности с ограничениями для обработки узкополосных сигналов антенной решетки [48].** Оценку мощности сигнала  $P_s$  с минимальной дисперсией для процессора, обеспечивающего согласование в пространстве элементов, можно получить, решая следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } \text{var} [\mathbf{x}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{x}] = \text{tr} [(\mathbf{K} \mathbf{R}_{xx})^2] \\ &\text{при ограничении } \text{tr} [\mathbf{K} \mathbf{R}_{ss}^{-1}] = 1. \end{aligned}$$

А. Покажите, что решение для указанной задачи имеет вид

$$\mathbf{K}_{\text{опт}} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{R}_{xx}^{-1}}{\text{tr} [(\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{ss})^2]}$$

и при этом среднее значение выходной мощности процессора равно

$$P_0 = \frac{\text{tr} [\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{ss}]}{\text{tr} [(\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{ss})^2]}.$$

Б. Покажите, что, когда ранг  $\mathbf{R}_{ss}$  равен единице, и в силу этого  $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{v} \mathbf{v}^\dagger$ ,

$$\mathbf{K}_{\text{опт}} = \mathbf{h}(\omega) \mathbf{h}^\dagger(\omega),$$

где  $\mathbf{h} = a \mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1}$ ;  $a$  — скалярный множитель.

Этот результат показывает, что при плоском волновом фронте сигнала процессор антенной решетки с согласованием в пространстве элементов вырождается в процессор, осуществляющий согласованную фильтрацию с последующим квадратичным детектированием.

## Часть II

### АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ

В гл. 3 было показано, что при использовании большинства известных критериев эффективности оптимальные решения (оптимальные весовые векторы) тесно связаны между собой. Поэтому выбор конкретного критерия эффективности обычно не имеет большого значения. Более важным является выбор алгоритма управления, предназначенного для подстройки диаграммы направленности решетки, поскольку он непосредственно влияет как на скорость переходного процесса, так и на сложность технической реализации системы в целом. Адаптивный процессор является основой любой адаптивной системы с антенной решеткой, так как он автоматически подстраивает весовые коэффициенты для обеспечения требуемой пространственной и частотной фильтрации. Во второй части книги приводится обзор различных классов наиболее распространенных алгоритмов адаптации и обсуждаются наиболее важные характеристики эффективности каждого из них. Некоторые из этих алгоритмов предназначены для осуществления в конкретных условиях приема сигнала, а другие могут быть легко модифицированы для обеспечения работоспособности в широком диапазоне изменяющихся условий. Такая информация помогает разработчику выбрать подходящие алгоритмы, наиболее полно удовлетворяющие требованиям, предъявляемым к системе. Такие требования обуславливаются: 1) необходимой скоростью переходного процесса, 2) рабочими условиями приема сигнала (включая любую доступную априорную информацию) и 3) схемной сложностью реализации алгоритма.

#### Глава 4. ГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Широко известным в силу своей простоты и универсальности методом решения задач управления, и в частности задачи адаптивной подстройки весовых коэффициентов системы с антенной решеткой, является градиентный метод. Выбранный критерий эффективности и параметры, подлежащие подстройке (которыми обычно, но не всегда, служат комплексные веса), обуславливают характер поверхности уровня, определяющий работу адаптивного процессора. В том случае, когда выбранный критерий эффективности является квадратичной функцией подстраиваемых весов, поверхности уровня являются вложенными друг в друга эллипсоидами с общим центром; при этом адаптивный процессор выполняет задачу поиска этого центра. Тогда критерий эффективности может быть оптимизирован с помощью так называемых «методов спуска», частным случаем которых являются различные гра-



диентные методы. Если поверхность уровня имеет несколько относительных экстремумов или седловых точек, то процесс поиска экстремума с помощью градиентных методов спуска может оказаться менее эффективным, чем с помощью других методов.

Далее будут рассмотрены следующие градиентные алгоритмы:

- 1) минимальной средней квадратической ошибки (МСКО);
- 2) дифференциальный наискорейшего спуска (ДНС);
- 3) ускоренный градиентный (УГ).

Нетрудно получить разновидности указанных алгоритмов, вводя ограничения в правило подстройки. Поэтому в одном из разделов рассмотрен способ получения таких алгоритмов. В заключение обсуждаются возможные изменения режимов адаптации и приводится пример, показывающий как за счет использования двухрежимной адаптации можно улучшить сходимость алгоритма.

#### 4.1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Свойства градиентных алгоритмов наиболее просто представить на примере рассмотрения, в первую очередь, метода наискорейшего спуска при квадратичных поверхностях уровня. При квадратичных поверхностях уровня имеется единственная точка минимума, которая может быть найдена с помощью градиентного алгоритма. В том случае, когда градиент в любой точке на поверхности уровня может быть точно определен, пригоден метод наискорейшего спуска. Введение модели с обратной связью для алгоритма наискорейшего спуска приводит к ясному пониманию природы процесса подстройки весовых коэффициентов.

##### 4.1.1. Квадратичная поверхность уровня

В качестве примера, в котором появляются квадратичные поверхности уровня, рассмотрим критерий СКО для адаптивной антенной решетки, показанной на рис. 3.3. Выходной сигнал такой решетки определяется соотношением (см. гл. 3).

$$y(t) = \mathbf{w}^T(t) \mathbf{x}(t). \quad (4.1)$$

Обозначив через  $d(t)$  ожидаемый отклик решетки, сигнал ошибки можно представить в виде

$$e(t) = d(t) - y(t) = d(t) - \mathbf{w}^T(t) \mathbf{x}(t). \quad (4.2)$$

Тогда квадрат сигнала ошибки будет

$$e^2(t) = d^2(t) - 2d(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{w}(t) + \mathbf{w}^T(t) \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{w}(t). \quad (4.3)$$

Средняя квадратическая ошибка представляет собой математическое ожидание  $e^2(t)$  или

$$E \{e^2(t)\} = \xi [\mathbf{w}(t)] = \bar{d}^2(t) - 2\mathbf{r}_{xd}^T(t) \mathbf{w}(t) + \mathbf{w}^T(t) \mathbf{R}_{xx}(t) \mathbf{w}(t). \quad (4.4)$$

Здесь чертой сверху обозначено математическое ожидание,  $\mathbf{r}_{xd}$  определяется (3.52) и  $\mathbf{R}_{xx}(t)$  — (3.13). Когда входные сигналы стационарны,  $\mathbf{r}_{xd}$  и  $\mathbf{R}_{xx}$  не зависят от аргумента  $t$ . При нестационарных условиях приема сигнала эти величины являются функциями аргумента  $t$ , т. е.  $\mathbf{r}_{xd} = \mathbf{r}_{xd}(t)$  и  $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{xx}(t)$ .

Из выражения (4.4) видно, что СКО является квадратичной функцией весового вектора  $\mathbf{w}(t)$ , при этом поверхности уровня являются эллипсоидами. В нестационарном случае с течением времени может изменяться положение точки минимума и формы поверхностей уровня. Анализ работы адаптивного процессора при изменяющихся во времени статистиках сигнала выходит за рамки данной книги, хотя и является предметом интенсивных исследований. В данной книге основное внимание уделяется определению переходного процесса адаптации в предположении о том, что статистики сигнала являются постоянными, хотя и неизвестными.

#### 4.1.2. Метод наискорейшего спуска

Для иллюстрации сущности градиентных методов полезно сначала предположить, что статистики, описывающие условия приема сигнала, являются полностью известными и градиент в любой точке на поверхности уровня может быть точно определен. В этом случае можно применить метод наискорейшего спуска для нахождения точки минимума. Для СКО, определяемой формулой (4.4), градиент находится дифференцированием по составляющим весового вектора [1]

$$\nabla \{\xi[\mathbf{w}(t)]\} = -2\mathbf{r}_{xd} + 2\mathbf{R}_{xx}\mathbf{w}(t). \quad (4.5)$$

В гл. 3 было показано, что точка минимума достигается, когда весовой вектор соответствует винеровскому решению

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{xd}. \quad (4.6)$$

Подставив (4.6) в (4.4), получим минимум СКО

$$\xi_{\text{min}} = \overline{d^2(t)} - \overline{\mathbf{w}_{\text{опт}}^T} \mathbf{r}_{xd}. \quad (4.7)$$

Метод наискорейшего спуска начинается с предварительного нахождения возможного начального значения минимума на поверхности уровня. Эта оценка представляет собой совокупность исходных значений для каждой из составляющих весового вектора. Выбрав начальное значение, определяют градиент вектора и затем получают следующую оценку, соответствующим образом изменив предыдущее значение. Эта операция заключается в прибавлении к предыдущему значению вектора, имеющего направление, обратное направлению градиента (т. е. в направлении наибольшего уменьшения СКО).

Двухмерное представление квадратичных поверхностей уровня (соответственно задаче подстройки двух весовых коэффициентов) показано на рис. 4.1 и 4.2. На этих рисунках СКО измеряется в направлении нормали к плоскости рисунков. Эллипсы, показанные на рисунках, представляют собой линии постоянных значений СКО. Градиент в каждой точке поверхности уровня ортогонален ей и указывает на-

правление наискорейшего подъема. На рис. 4.1 показано движение весового вектора при использовании метода наискорейшего спуска с очень малым размером шага. В результате указанной процедуры получается непрерывная траектория, сходящаяся к точке, соответствующей минимуму СКО. Траектория движения весового вектора при большом размере шага показана на рис. 4.2. Здесь отчетливо виден каждый шаг, осуществляемый в направлении нормали к поверхности уровня. Точное описание переходных процессов приводится далее.

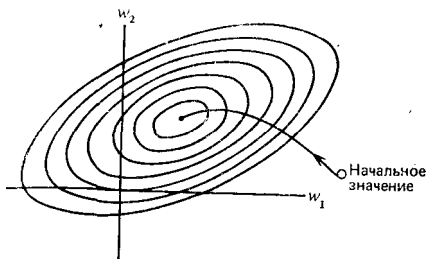


Рис. 4.1. Метод наискорейшего спуска с очень малым размером шага

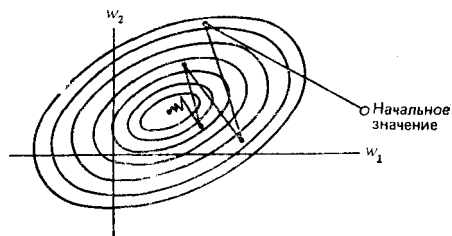


Рис. 4.2. Метод наискорейшего спуска с большим размером шага

Метод наискорейшего спуска может быть представлен следующим рекуррентным соотношением [1]:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \Delta_s \nabla [e^2(k)], \quad (4.8)$$

где  $\mathbf{w}(k)$  — «старое» значение весового вектора в момент времени  $kT$ ;  $\mathbf{w}(k+1)$  — «новое» значение весового вектора в момент времени  $(k+1)T$ ;  $\nabla [e^2(k)]$  — градиент СКО, определяющий направление движения от  $\mathbf{w}(k)$ ;  $\Delta_s$  — константа, определяющая размер шага<sup>1</sup>. Подставляя (4.5) в (4.8), получаем

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - 2\Delta_s (\mathbf{R}_{xx}\mathbf{w}(k) - \mathbf{r}_{xd}). \quad (4.9)$$

### 4.1.3. Модель для метода наискорейшего спуска

Характеристики переходного режима при использовании алгоритма наискорейшего спуска будут достаточно полно отражать аналогичные характеристики алгоритма МСКО, так как единственное различие этих двух алгоритмов подстройки весовых коэффициентов состоит в том, что в первом случае статистики принимаемого сигнала известны точно (так что градиент может быть точно определен в любой точке), тогда как во втором статистики сигнала не известны (хотя здесь они полагаются стационарными) и поэтому подлежат оцениванию. При использовании метода наискорейшего спуска первый этап в определении характеристик переходного режима сводится к нахождению модели, определяющей соотношения в устройстве подстройки весовых коэффициентов с обратной связью (ОС).

<sup>1</sup> Далее  $\Delta_s$  будет также называться шаговой постоянной. (Прим. ред.)

Можно построить функциональную схему следящей системы с ОС, иллюстрирующую соотношения (4.8) и (4.9), в которой градиент играет роль сигнала ошибки в  $N$ -мерной системе, управляющего подстройкой различных весовых коэффициентов. Такая схема показана на рис. 4.3, где через  $Z^{-1}$  обозначена передаточная функция схемы единичной задержки (т. е. задержки на один цикл итерации) [2—5]. Приведенная функциональная схема представляет многомерную дискретную замкнутую систему регулирования первого порядка.

Если положить  $w(0)$  равным начальной оценке весового вектора, то последовательность значений  $w(k)$  будет изменяться так же, как и при действительном алгоритме спуска, с помощью которого подстраиваются весовые коэффициенты. Поскольку «выходным результатом» схемы яв-

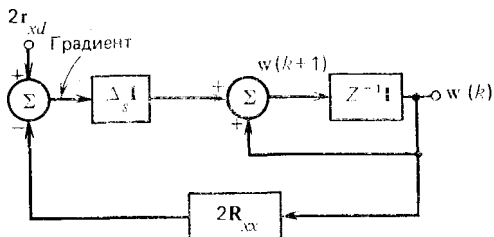


Рис. 4.3. Функциональная схема системы управления с ОС, являющейся моделью для метода пaискорейшего спуска

ляется текущий весовой вектор  $w(k)$ , характер переходного процесса рассматриваемого алгоритма подстройки весовых коэффициентов можно определить на основе анализа характеристик устройства, схема которого приведена на рис. 4.3.

Как видно из рис. 4.3, передаточные функции двух блоков описываются диагональными матрицами. Исключение составляет цепь обратной связи, для которой матрица  $2R_{xx}$  в общем случае будет содержать недиагональные элементы, так как входные сигналы обычно взаимно коррелированы. Следовательно, переходные процессы для различных составляющих весового вектора будут взаимосвязаны, что затрудняет анализ переходного режима. Для упрощения анализа удобно произвести преобразование переменных в схеме так, чтобы матрица, характеризующая цепь ОС, стала диагональной. При этом преобразованные переменные становятся независимыми.

Для выполнения диагонализации рассмотрим сначала выражение (4.4) для СКО. С учетом того, что  $w_{\text{опт}}$  и  $\xi_{\text{min}}$  характеризуются формулами (4.6) и (4.7) соответственно, можно записать следующее выражение для СКО:

$$E \{e^2(k)\} = \xi(k) = \xi_{\text{min}} + [w(k) - w_{\text{опт}}]^T R_{xx} [w(k) - w_{\text{опт}}]. \quad (4.10)$$

Поскольку матрица  $R_{xx}$  является вещественной, симметричной и положительно определенной, она может быть приведена к диагональному виду

$$R_{xx} = Q^{-1} \Lambda Q, \quad (4.11)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения, и  $Q$  — квадратная матрица, строками которой являются собственные векторы матрицы  $R_{xx}$ . Если матрица  $Q$  составлена из нормированных собственных векторов, то она будет ортогональной так, что  $Q^{-1} = Q^T$ , и выражение для СКО примет вид

$$\xi(k) = \xi_{m1n} + [w(k) - w_{\text{опт}}]^T Q^T \Lambda Q [w(k) - w_{\text{опт}}]. \quad (4.12)$$

Теперь определим векторы  $w'(k)$  и  $w'_{\text{опт}}$  соотношениями

$$w'(k) \triangleq Qw(k), \quad (4.13)$$

$$w'_{\text{опт}} \triangleq Qw_{\text{опт}}. \quad (4.14)$$

Тогда выражение (4.12) можно представить в виде

$$\xi(k) = \xi_{m1n} + [w'(k) - w'_{\text{опт}}]^T \Lambda [w'(k) - w'_{\text{опт}}]. \quad (4.15)$$

Вектор  $w'(k)$  можно трактовать как представление вектора  $w(k)$  в новой системе координат, определяемой преобразованием  $Q^1$ . Новые координатные оси совпадают с главными осями квадратичной поверхности уровня  $\xi(k)$ . С учетом изложенного, функциональную схему на рис. 4.3 можно представить в виде схемы на рис. 4.4, в которой отсутствует перекрестная связь между компонентами в цепи ОС. Здесь пере-

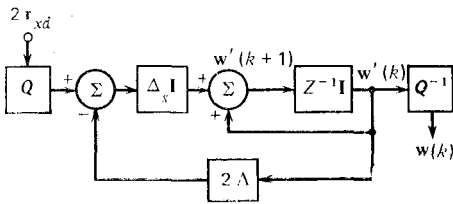


Рис. 4.4. Функциональная схема, полученная из схемы на рис. 4.3 с помощью диагонализации

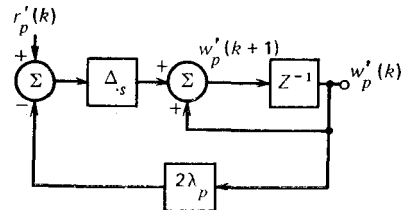


Рис. 4.5. Функциональная схема одномерной модели для  $p$ -й нормальной координаты

ходные процессы для каждой составляющей вектора  $w'(k)$  независимы и поэтому анализ сводится к рассмотрению поведения некоторой произвольной составляющей  $w'_p(k)$ .

Функциональная схема для одномерной модели алгоритма наискорейшего спуска с ОС для  $p$ -й нормальной координаты показана на рис. 4.5. Дискретная передаточная функция такой замкнутой системы с ОС определяется соотношением [1]

$$\frac{w'_p(z)}{r'_p(z)} = \frac{\Delta_s Z^{-1}}{1 + (1 - 2\Delta_s \lambda_p) Z^{-1}}, \quad (4.16)$$

где  $\lambda_p$  —  $p$ -е собственное значение ковариационной матрицы  $R_{xx}$ .

<sup>1</sup> Составляющие вектора  $w'(k)$  называются также нормальными составляющими (координатами) вектора  $w(k)$ . (Прим. ред.)

Импульсная характеристика, соответствующая (4.16), является обратным  $Z$ -преобразованием  $w_p'(z)$ , если положить  $r_p'(z) = 1$ . Отсюда импульсная характеристика имеет вид

$$w_p'(kT) = Ae^{-\alpha_p(kT)},$$

где  $A$  — постоянная;  $T$  — период итерации;

$$\alpha_p = -\frac{1}{T} \ln(1 - 2\Delta_s \lambda_p). \quad (4.17)$$

Выражение (4.17) характеризует устойчивую систему при

$$|1 - 2\Delta_s \lambda_p| < 1. \quad (4.18)$$

Условие (4.18) эквивалентно следующим неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_s > 0, \\ \Delta_s \lambda_{\max} < 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Поскольку корреляционная матрица положительно определена, ее собственные значения положительны. Поэтому система, схема которой показана на рис. 4.4, устойчива при выполнении неравенств

$$\left. \begin{aligned} \Delta_s > 0, \\ \Delta_s \lambda_{\max} < 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

где  $\lambda_{\max}$  — максимальное собственное значение корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$ . Таким образом, устойчивость процесса адаптации при использовании алгоритма наискорейшего спуска будет обеспечена при условии

$$1/\lambda_{\max} > \Delta_s > 0. \quad (4.21)$$

#### 4.2. АЛГОРИТМ МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

При неизвестных (но неизменных) статистиках сигналов (что обычно имеет место на практике) невозможно точно вычислить значение градиента в каждой точке поверхности уровня, и поэтому необходимо сначала оценить указанные статистики. При таких условиях нужно оценить и сам градиент. Для этого класса задач (имеющих квадратичную поверхность уровня) предложен алгоритм минимизации СКО (алгоритм МСКО) [6—10], оказавшийся весьма полезным в практических приложениях. Следует отметить, что для реализации алгоритма МСКО необходимо иметь сигнал ошибки, определяемый соотношением (4.2). Для получения такого сигнала ошибки, в свою очередь, необходимо иметь опорный сигнал  $d(t)$ , характеризующий принимаемый полезный сигнал. В системах связи, где полезный сигнал обычно присутствует, это требование может быть удовлетворено с помощью формирования сигнала, близкого к действительному. В тех же системах, где полезный сигнал обычно отсутствует (как, например, в радио- и гидролокацион-

ных системах), бессмысленно пытаться генерировать воображаемый полезный сигнал. Поэтому рассматриваемый здесь алгоритм МСКО обычно используется для повышения эффективности систем связи. Алгоритм МСКО полностью подобен алгоритму наискорейшего спуска за исключением того, что изменения весового вектора осуществляются в направлении, задаваемом на основе оценки градиента вектора, а не по его действительному значению. Другими словами, изменения весового вектора можно представить как

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \Delta_s \widehat{\nabla}[\xi(k)], \quad (4.22)$$

где  $\mathbf{w}(k)$  — весовой вектор перед началом шага адаптации;  $\mathbf{w}(k+1)$  — весовой вектор после выполнения шага адаптации;  $\Delta_s$  — скалярная постоянная величина, определяющая размер шага и регулирующая скорость сходимости и устойчивость;  $\widehat{\nabla}[\xi(k)]$  — оценка градиента.

В ходе процесса адаптации, описываемого выражением (4.22), предпринимается попытка найти решение, по возможности наиболее близкое к винеровскому решению, определяемому соотношением (4.6). Довольно заманчиво получить требуемое решение непосредственно из (4.6), однако такой подход имеет следующие недостатки:

1) могут появиться серьезные вычислительные трудности из-за необходимости определения и обращения матрицы размером  $N \times N$  при большом  $N$  и высокой скорости поступления выходных данных;

2) в общем случае требуется измерение  $[N(N+3)]/2$  корреляционных моментов — элементов матриц  $\mathbf{R}_{xx}$  и  $\mathbf{r}_{xd}$ . Подобные измерения должны повторяться при изменяющихся во времени статистиках входного сигнала (что происходит во многих практических ситуациях);

3) требуется довольно высокая точность вычисления: выше, чем в рекуррентных алгоритмах, обладающих самокорректирующим свойством. Это свойство наиболее наглядно характеризуется моделями рекуррентных алгоритмов, в которых корректировка осуществляется с помощью цепей ОС.

Для получения оценки градиента СКО найдем градиент оценки ошибки при использовании одного временного отсчета

$$\widehat{\nabla}_k = \nabla[\xi(k)] = 2e(k) \nabla[e(k)]. \quad (4.23)$$

Поскольку

$$e(k) = d(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}, \quad (4.24)$$

то градиент ошибки будет определяться как

$$\nabla[e(k)] = \nabla[d(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}] = -\mathbf{x}(k), \quad (4.25)$$

и поэтому оценка градиента будет

$$\widehat{\nabla}_k = -2e(k) \mathbf{x}(k). \quad (4.26)$$

Сравнивая математическое ожидание оценки градиента с истинным значением градиента СКО, нетрудно убедиться в том, что эта оценка является несмещенной. Математическое ожидание оценки определяется выражением

$$E\{\widehat{\nabla}_k\} = -2E\{\mathbf{x}(k)[d(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}(k)]\} \quad (4.27)$$

или

$$E \{ \widehat{\mathbf{V}}_h \} = -2 [ \mathbf{r}_{xd}(k) - \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{w}(k) ]. \quad (4.28)$$

Рассмотрим теперь СКО

$$\xi [ \mathbf{x}(k) ] = E [ d^2(k) ] + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{w} - 2 \mathbf{w}^T \mathbf{r}_{xd}(k). \quad (4.29)$$

В результате дифференцирования (4.29) по  $\mathbf{w}$  получим выражение для градиента

$$\nabla \{ \xi [ \mathbf{w}(k) ] \} = 2 \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{w}(k) - 2 \mathbf{r}_{xd}(k). \quad (4.30)$$

Из сравнения (4.28) и (4.30) видно, что

$$E \{ \widehat{\mathbf{V}}_h \} = \nabla \{ \xi [ \mathbf{w}(k) ] \}, \quad (4.31)$$

т. е. математическое ожидание оценки градиента равно истинной величине градиента СКО.

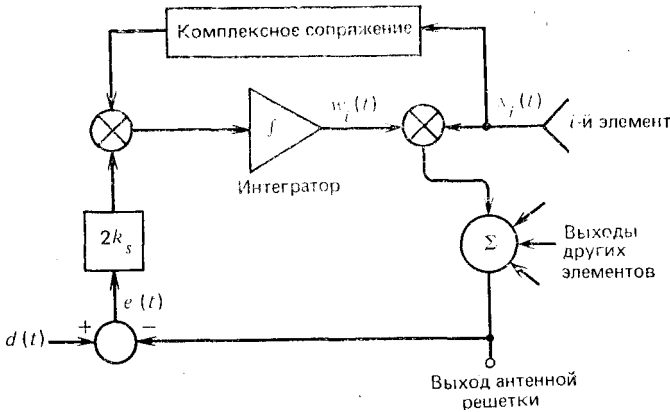


Рис. 4.6. Структурная схема аналоговой реализации алгоритма МСКО для подстройки весовых коэффициентов

Подставив оценку градиента (4.26) в выражение (4.22), получим соотношение

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + 2\Delta_s e(k) \mathbf{x}(k), \quad (4.32)$$

в котором новое значение весового вектора определяется в результате суммирования предыдущего значения весового вектора и вектора входного сигнала, умноженного на значение ошибки. Соотношение (4.32) представляет алгоритм МСКО для дискретного времени.

Для комплексных величин алгоритм МСКО, характеризуемый (4.32), может быть записан как

$$\frac{\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)}{\Delta t} = 2k_s e(k) \mathbf{x}^*(k), \quad (4.33)$$



где  $\Delta t$  — промежуток времени между последовательными итерациями;  $\Delta_s = k_s \Delta t$ . В пределе, при  $\Delta t \rightarrow 0$  (4.33) сводится к представлению алгоритма МСКО в форме дифференциального уравнения, обычно используемого в системах непрерывного времени, т. е.

$$\frac{dw(t)}{dt} = 2k_s e(t) x^*(t). \quad (4.34)$$

Выражение (4.34) может быть представлено также в виде

$$w(t) = 2k_s \int_0^t e(\tau) x^*(\tau) d\tau + w(0). \quad (4.35)$$

Функциональная схема устройства, реализующего алгоритм подстройки весовых коэффициентов (4.35) в аналоговом виде, показана на рис. 4.6.

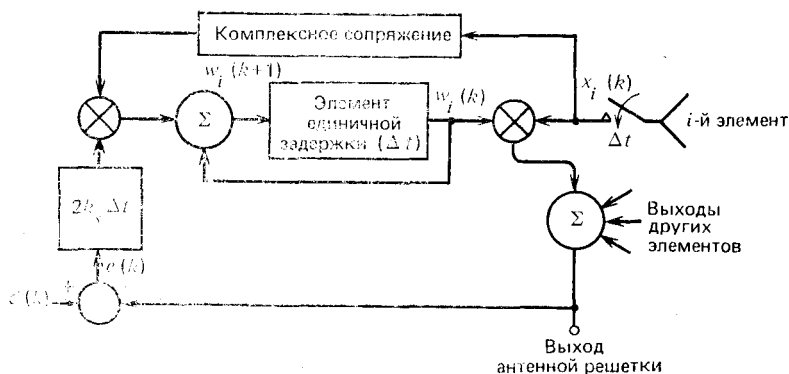


Рис. 4.7. Структурная схема дискретной реализации алгоритма МСКО для подстройки весовых коэффициентов

Вариант выражения (4.34) для дискретного процесса определяется соотношением (4.33) и обычно представляется в виде

$$w(k+1) = w(k) + 2k_s \Delta t e(k) x^*(k). \quad (4.36)$$

Функциональная схема устройства, реализующего алгоритм подстройки весовых коэффициентов (4.36) в дискретной форме, показана на рис. 4.7.

#### 4.2.1. Сходимость к винеровскому решению

Для упрощения рассуждений предположим, что временной интервал между последовательными итерациями в алгоритме МСКО является довольно большим, так что векторы сигнала  $x(k)$  и  $x(k+1)$  становятся некоррелированными. Из (4.32) следует, что весовой вектор  $w(k)$  является функцией только векторов  $x(k-1)$ ,  $x(k-2)$ , ...,  $x(0)$  и  $w(0)$ , и поскольку векторы указанной последовательности

входных сигналов некоррелированные, то вектор  $\mathbf{w}(k)$  не зависит от  $x(k)$ . Покажем, что для входного сигнала, представляющего собой стационарный случайный процесс, удовлетворяющий рассмотренному ранее условию, математическое ожидание весового вектора  $E\{\mathbf{w}(k)\}$  сходится (после достаточного числа итераций) к винеровскому решению (4.6).

Если найти математическое ожидание для обеих частей выражения (4.36), то в результате получим

$$E\{\mathbf{w}(k+1)\} = E\{\mathbf{w}(k)\} + 2k_s \Delta t E\{\mathbf{x}^*(k) [d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k)]\}. \quad (4.37)$$

Положим теперь, что

$$E\{\mathbf{x}^*(k) d(k)\} = \mathbf{r}_{xd}, \quad (4.38)$$

$$E\{\mathbf{x}^*(k) \mathbf{x}^T(k)\} = \mathbf{R}_{xx}. \quad (4.39)$$

Тогда (4.37) можно записать как

$$E\{\mathbf{w}(k+1)\} = E\{\mathbf{w}(k)\} - 2k_s \Delta t \mathbf{R}_{xx} E\{\mathbf{w}(k)\} + 2k_s \Delta t \mathbf{r}_{xd} = [\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{R}_{xx}] E\{\mathbf{w}(k)\} + 2k_s \Delta t \mathbf{r}_{xd}. \quad (4.40)$$

Считая, что начальное значение равно  $\mathbf{w}(0)$ , на  $(k+1)$ -й итерации процедуры (4.40) получаем

$$E\{\mathbf{w}(k+1)\} = [\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{R}_{xx}]^{(k+1)} \mathbf{w}(0) + 2k_s \Delta t \sum_{i=0}^k [\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{R}_{xx}]^i \mathbf{r}_{xd}. \quad (4.41)$$

Учитывая (4.11), получаем

$$E\{\mathbf{w}(k+1)\} = \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{\Lambda}]^{(k+1)} \mathbf{Q} \mathbf{w}(0) + 2k_s \Delta t \mathbf{Q}^{-1} \sum_{i=0}^k [\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{\Lambda}]^i \mathbf{Q} \mathbf{r}_{dx}. \quad (4.42)$$

Поскольку все члены в диагональной матрице  $[\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{\Lambda}]$  меньше единицы, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{\Lambda}]^{(k+1)} \rightarrow 0. \quad (4.43)$$

и поэтому после достаточного числа итераций первым слагаемым в (4.42) можно пренебречь. Второй член выражения (4.42) также упрощается (при использовании формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k [\mathbf{I} - 2k_s \Delta t \mathbf{\Lambda}]^i = \frac{1}{2k_s \Delta t} \mathbf{\Lambda}^{-1}. \quad (4.44)$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\mathbf{w}(k+1)\} = 2k_s \Delta t \mathbf{Q}^{-1} \left( \frac{1}{2k_s \Delta t} \mathbf{\Lambda}^{-1} \right) \mathbf{Q} \mathbf{r}_{dx} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}. \quad (4.45)$$

Формула (4.45) показывает, что при алгоритме МСКО математическое ожидание весового вектора действительно сходится к винеровскому решению.

При получении формулы (4.45) предполагалось, что все элементы диагональной матрицы  $[I - 2k_s \Delta t \Lambda]$  по модулю меньше единицы:

$$|1 - 2k_s \Delta t \lambda_{\max}| < 1$$

или

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} > k_s \Delta t > 0, \quad (4.46)$$

где  $\lambda_{\max}$  — наибольшее собственное значение  $R_{xx}$ . Нетрудно видеть, что условие сходимости (4.46) оказывается точно таким же, как условие устойчивости (4.21) модели с ОС для алгоритма наискорейшего спуска при отсутствии шума.

Рассмотренное условие для  $k_s$ , обеспечивающее сходимость алгоритма МСКО, можно связать с полной мощностью входного сигнала  $P_{вх}$ . Поскольку  $\lambda_{\max}$  удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\max} \leq \text{tr} [R_{xx}], \quad (4.47)$$

где

$$\text{tr} [R_{xx}] = E \{x^\dagger(k) x(k)\} = \sum_{i=1}^N E \{|x_i|^2\} \triangleq P_{вх}, \quad (4.48)$$

то условие сходимости (4.46) будет выполнено, если

$$1/P_{вх} > k_s \Delta t > 0. \quad (4.49)$$

Приведенные результаты, касающиеся сходимости алгоритма МСКО, были получены с учетом предположения о независимости последовательных выборок входного сигнала. Указанное предположение о независимости выборок входного сигнала кажется излишне жестким, так как Гриффитцем [11] были представлены результаты экспериментальных исследований, показывающие, что процесс адаптации при использовании сильно коррелированных выборок также сходится к винеровскому решению, хотя СКО в установившемся режиме оказывается немного больше, чем для независимых выборок. Для некоторых применений представляют интерес сходимость в среднеквадратическом смысле и соответствующие условия устойчивости. В этом случае должны удовлетворяться более строгие условия для параметра  $k_s$  [12].

#### 4.2.2. Характеристики переходного режима при алгоритме адаптации МСКО

Для детального рассмотрения переходного режима, как и при предыдущем анализе результатов сходимости, удобно воспользоваться системой нормальных координат. В нормальных координатах переходные процессы при адаптивной подстройке весовых коэффициентов пред-

ставляют собой сумму экспоненциальных составляющих с постоянными времени, определяемыми как

$$\tau_p = \frac{1}{2(k_s \Delta t) \lambda_p}, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (4.50)$$

где  $\lambda_p$  —  $p$ -е собственное значение корреляционной матрицы  $R_{xx}$ . Поскольку  $\tau_p$  обратно пропорциональна  $\lambda_p$  (где  $\lambda_p$  характеризует мощность сигнала, соответствующую  $p$ -й нормальной координате сигнала),

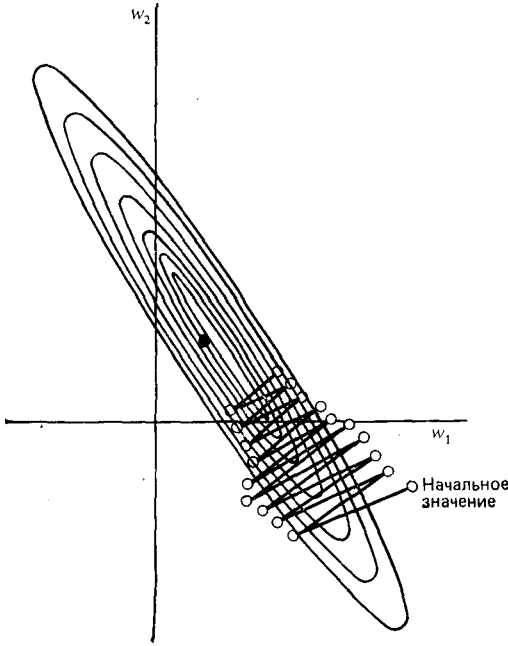


Рис. 4.8. Переходный процесс алгоритма наискорейшего спуска при значительных различиях собственных значений матрицы  $R_{xx}$

то сильному сигналу будет соответствовать более быстрый переходный режим, а слабому сигналу — более медленный. Это обстоятельство показывает, что скорость сходимости алгоритма МСКО зависит от распределения собственных значений матрицы  $R_{xx}$ , особенно если среди этих собственных значений есть существенно различные по величине. Переходный процесс не завершится до тех пор, пока не произойдет «затухание» экспоненты с наибольшей постоянной времени (соответствующей наименьшей мощности нормальной составляющей сигнала). Во многих случаях невозможно выбрать значение  $k_s$  так, чтобы получить достаточно короткий период адаптации.

Влияние распределения собственных значений на скорость сходимости алгоритма наискорейшего спуска иллюстрируется графиком на рис. 4.8, где для двумерного случая представлены поверхности уровня при двух существенно различных собственных значениях. Эллиптические поверхности уровня на рис. 4.8 сильно вытянуты и это приводит к необходимости выполнения большего числа итераций для получения весового вектора, достаточно близкого к винеровскому решению.

Если все собственные значения матрицы  $R_{xx}$  равны, то равны и все постоянные времени, и

$$\tau = \frac{1}{2(k_s \Delta t) \lambda}. \quad (4.51)$$

Удобным способом отображения процесса адаптации является «кривая обучения», представляющая собой зависимость критерия эффективности от числа итераций. Как было показано ранее, изменение весовых коэффициентов в переходном режиме имеет экспоненциальный характер, а так как СКО является квадратичной функцией весовых коэффициентов, то изменение СКО в переходном режиме будет иметь также экспоненциальный характер.

Нетрудно видеть, что, когда все постоянные времени равны, кривая обучения СКО является экспонентой с постоянной времени

$$\tau_{\text{ско}} = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{4(k_s \Delta t) \lambda}. \quad (4.52)$$

В общем случае, конечно, собственные значения  $R_{xx}$  различны. Поэтому

$$\tau_{p \text{ ско}} = \frac{\tau_p}{2} = \frac{1}{4(k_s \Delta t) \lambda_p}, \quad (4.53)$$

где  $\tau_{p \text{ ско}}$  — постоянная времени составляющей кривой обучения СКО, соответствующей  $p$ -й нормальной составляющей весовых коэффициентов;  $\lambda_p$  — соответствующее собственное значение. Поскольку в процессе адаптации используется только одна выборка сигнала на каждую итерацию, то постоянная времени связана с числом выборок простым соотношением

$$T_{p \text{ ско}} = \tau_{p \text{ ско}}. \quad (4.54)$$

Графики экспериментальных кривых обучения имеют вид искаженных экспонент из-за шума, неизбежно присутствующего при любом процессе адаптации. Чем меньше скорость адаптации (т. е. чем меньше значение  $k_s$ ), тем меньше уровень шума, искажающего кривую обучения.

#### 4.2.3. Рассогласование весовых коэффициентов при реализации алгоритма МСКО

При использовании алгоритма адаптации МСКО подстройка весовых коэффициентов основана на одном из методов оценки градиента. Процесс оценивания градиента можно рассматривать как статистическое усреднение при ограниченном объеме выборки. Даже в том случае, когда можно получить точную оценку градиента, результирующий переходный процесс будет аналогичен переходному процессу при методе наискорейшего спуска. Следовательно, при неидеальной оценке градиента (из-за наличия шума) в процессе адаптации должны происходить потери в эффективности, сравнимые с потерями в идеальном случае. Таким образом, скорость адаптации зависит от двух факторов: 1) размера шага и 2) объема выборки, используемой для вычисления требуемых статистических средних. Если в процессе адаптации размер шага выбран достаточно большим, то изменения весовых коэффициентов будут также значительными и при этом переходный процесс будет иметь колебательный характер, как на рис. 4.2. Если объем выборки,

используемой для оценки требуемых статистических средних, мал, то время, необходимое для получения этих средних, также невелико, но качество полученных оценок будет низким. Поэтому в общем случае эффективность в установившемся режиме зависит от скорости адаптации: чем выше скорость адаптации, тем ниже эффективность.

Поскольку статистика входного сигнала априорно не известна, то невозможно получить минимум СКО, соответствующий винеровскому решению. Степень превышения реальной СКО по отношению к минимальной является мерой рассогласования адаптивных весовых коэффициентов. Определим «рассогласование» как отношение

$$M \triangleq \frac{[\xi_p - \xi_{\min}]}{\xi_{\min}}, \quad (4.55)$$

где

$$\xi = E \{e^2\}.$$

Рассогласование, соответствующее алгоритму МСКО, можно определить для каждого значения  $k_s \Delta t$  на основе анализа шума, проявляющегося в процессе оценивания градиента.

Предположим, что процесс адаптации сходится к установившемуся значению в окрестности точки минимума СКО. Шум оценки градиента в точке минимума (где истинный градиент СКО равен нулю) равен самой оценке градиента, и поэтому вектор шума градиента есть

$$g(k) = \widehat{\mathbf{V}}(k) = -2e(k) \mathbf{x}(k). \quad (4.56)$$

Ковариационная матрица этого шума будет определяться выражением

$$\text{cov}[g(k)] = E\{g(k)g^T(k)\} = 4E\{e^2(k)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\}. \quad (4.57)$$

Из теории винеровской фильтрации хорошо известно, что при  $\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}_{\text{опт}}$  ошибка  $e(k)$  не коррелирована с вектором входного сигнала. Если к тому же предположить, что  $e(k)$  и  $\mathbf{x}(k)$  — гауссовские процессы, то в точке минимума они будут не только не коррелированы, но и статистически независимы. При этих условиях выражение (4.57) принимает вид

$$\text{cov}[g(k)] = 4E\{e^2(k)\} E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\} = 4\xi_{\min} \mathbf{R}_{xx}. \quad (4.58)$$

Перейдя к нормальным координатам, вместо  $g(k)$  получим  $g'(k)$ . При этом

$$\text{cov}[g'(k)] = \mathbf{Q} \text{cov}[g(k)] \mathbf{Q}^{-1} = 4\xi_{\min} \mathbf{\Lambda}. \quad (4.59)$$

Адаптация, основанная на искаженных шумом оценках градиента, приведет к появлению шума в весовых коэффициентах. Напомним, что в идеальном случае (при отсутствии шума) метод наискорейшего спуска определяется рекуррентным соотношением

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \Delta_s [-\mathbf{V}(k)], \quad (4.60)$$

где  $\Delta_s$  — постоянная, определяющая устойчивость и скорость сходимости;  $\mathbf{V}(k)$  — градиент в точке  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(k)$ . Согласно работе [15] определим

$$\mathbf{v}(k) \triangleq \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}_{\text{опт}}$$

и, вычтя  $w_{\text{OUT}}$  из обеих частей выражения (4.60), получаем

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{v}(k) + \Delta_s [-\nabla(k)]. \quad (4.61)$$

Подставив в (4.61) вместо истинных градиентов их оценки, получим

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{v}(k) + \Delta_s (-\widehat{\nabla}(k)) = \mathbf{v}(k) + \Delta_s [-\nabla(k) - \mathbf{g}(k)]. \quad (4.62)$$

Поскольку  $\nabla(k)$  определяется соотношением (4.5), то

$$\nabla(k) = -2r_{xd} + 2\mathbf{R}_{xx} [w_{\text{OUT}} + \mathbf{v}(k)] = 2\mathbf{R}_{xx}\mathbf{v}(k). \quad (4.63)$$

Поэтому (4.62) можно записать в виде соотношения

$$\mathbf{v}(k+1) = (\mathbf{I} - 2\Delta_s \mathbf{R}_{xx}) \mathbf{v}(k) - \Delta_s \mathbf{g}(k), \quad (4.64)$$

которое представляет собой векторное разностное уравнение первого порядка со случайной возбуждающей функцией  $-\Delta_s \mathbf{g}(k)$ . Для упрощения анализа удобно перейти к нормальным координатам (обозначаемым штрихом) путем умножения обеих частей (4.64) на  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{v}'(k+1) = (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) \mathbf{v}'(k) - \Delta_s \mathbf{g}'(k). \quad (4.65)$$

В установленном режиме  $\mathbf{v}'(k)$  соответствует стационарному случайному процессу  $-\Delta_s \mathbf{g}'(k)$ . Из определения нормальных координат следует, что составляющие как  $\mathbf{g}'(k)$ , так и  $\mathbf{v}'(k)$  взаимно не коррелированы, и поэтому ковариационная матрица  $\mathbf{g}'(k)$  — диагональна. Для определения ковариационной матрицы  $\mathbf{v}'(k)$  рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(k+1) \mathbf{v}'^T(k+1) &= (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) \mathbf{v}'(k) \mathbf{v}'^T(k) \times \\ &\times (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) + \Delta_s^2 \mathbf{g}'(k) \mathbf{g}'^T(k) - \Delta_s (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) \mathbf{v}'(k) \mathbf{g}'^T(k) - \\ &- \Delta_s \mathbf{g}'(k) \mathbf{v}'^T(k) (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Вычислив математическое ожидание для обеих частей (4.66) (и заметив, что  $\mathbf{v}'(k)$  и  $\mathbf{g}'(k)$  не коррелированы, поскольку  $\mathbf{v}'(k)$  определяется шумом предыдущих итераций), получим

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mathbf{v}'(k)] &= (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) \text{cov}[\mathbf{v}'(k)] (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) + \Delta_s^2 \text{cov}[\mathbf{g}'(k)] = \\ &= \Delta_s^2 [4\Delta_s \Lambda - 4\Delta_s^2 \Lambda^2]^{-1} \text{cov}[\mathbf{g}'(k)]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

На практике, как правило, алгоритм МСКО применяется при малом  $\Delta_s$ , так что

$$\Delta_s \Lambda \ll \mathbf{I}. \quad (4.68)$$

При выполнении условия (4.68) квадратичными членами в (4.67), содержащими  $\Delta_s \Lambda$ , можно пренебречь. Тогда

$$\text{cov}[\mathbf{v}'(k)] = \frac{\Delta_s}{4} \Lambda^{-1} \text{cov}[\mathbf{g}'(k)]. \quad (4.69)$$

С учетом (4.59) получим

$$\text{cov}[\mathbf{v}'(k)] = \frac{\Delta_s}{4} \Lambda^{-1} (4\xi_{\min} \Lambda) = \Delta_s \xi_{\min} \mathbf{I}. \quad (4.70)$$

Поэтому ковариационная матрица шума весовых коэффициентов (в окрестности минимума СКО) имеет вид

$$\text{cov} [\mathbf{v}(k)] = \Delta_s \xi_{\min} \mathbf{I}. \quad (4.71)$$

При отсутствии шума весового вектора реальная СКО равна  $\xi_{\min}$ . Наличие шума весового вектора приводит (в установившемся режиме) к флуктуациям весового вектора в окрестности точки минимума. Эти флуктуации приводят к увеличению СКО по сравнению с  $\xi_{\min}$ . Так как

$$\xi(k) = \overline{d^2}(k) - 2\mathbf{r}_{xd}^T \mathbf{w}(k) + \mathbf{w}^T(k) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}(k), \quad (4.72)$$

где

$$\xi_{\min} = \overline{d^2}(k) - \mathbf{w}_{\text{opt}}^T \mathbf{r}_{xd}, \quad (4.73)$$

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}, \quad (4.74)$$

то (4.72) можно переписать в следующем виде [см. также (4.10)]:

$$\xi(k) = \xi_{\min} + \mathbf{v}^T(k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{v}(k). \quad (4.75)$$

При использовании нормальных координат (4.75) можно записать как

$$\xi(k) = \xi_{\min} + \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(k). \quad (4.76)$$

Из выражения (4.76) видно, что среднее превышение СКО

$$E \{ \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(k) \} = \sum_{p=1}^N \lambda_p E \{ [v'_p(k)]^2 \}. \quad (4.77)$$

Учитывая (4.70), можно заметить, что  $E \{ [v'_p(k)]^2 \}$  равно  $\Delta_s \xi_{\min}$  при любых  $p$ . Поэтому

$$E \{ \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(k) \} = \Delta_s \xi_{\min} \sum_{p=1}^N \lambda_p = \Delta_s \xi_{\min} \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}). \quad (4.78)$$

Таким образом, рассогласование для алгоритма МСКО определяется формулой

$$M = \frac{E \{ \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(k) \}}{\xi_{\min}} = \Delta_s \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}). \quad (4.79)$$

Поскольку  $\Delta_s = k_s \Delta t$ , то соотношение (4.79) показывает, что степень рассогласования при реализации алгоритма МСКО может регулироваться простым изменением константы  $k_s$  (т. е. размером шага). Конечно, при уменьшении шага время, необходимое для достижения установившегося состояния, увеличивается и поэтому степень рассогласования и скорость адаптации выбираются из компромиссных соображений.

Степень рассогласования  $M$  может быть представлена также в другом виде, показывающем ее связь со скоростью адаптации. Из (4.53) следует, что

$$\Delta_s \lambda_p = 1/(4\tau_{p \text{ ско}}). \quad (4.80)$$

К тому же

$$\Delta_s \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = \Delta_s \sum_{p=1}^N \lambda_p = \sum_{p=1}^N \left( \frac{1}{4\tau_{p \text{ ско}}} \right) = \frac{N}{4} \left( \frac{1}{\tau_{p \text{ ско}}} \right)_{\text{ср}}, \quad (4.81)$$



где

$$\left( \frac{1}{\tau_{p \text{ ско}}} \right)_{\text{ср}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \left( \frac{1}{\tau_{p \text{ ско}}} \right), \quad (4.82)$$

$a$   $N$  — число степеней свободы адаптивного процессора. Следовательно, рассогласование может быть записано как

$$M = \frac{N}{4} \left( \frac{1}{\tau_{p \text{ ско}}} \right)_{\text{ср}} = \frac{N}{4} \left( \frac{1}{T_{p \text{ ско}}} \right)_{\text{ср}}, \quad (4.83)$$

где  $T_{p \text{ ско}}$  — постоянная времени кривой обучения, представляемая в виде числа выборочных значений. Следует отметить, что в то время, как в дискретных системах основной единицей измерения времени является период выборки, в аналоговых системах такой единицей является период Найквиста, соответствующий ширине полосы частот сигнала.

#### 4.2.4. Практические соображения, связанные с реализацией алгоритма адаптации МСКО

Для получения сигнала ошибки в адаптивном процессоре при использовании алгоритма МСКО необходимо иметь ожидаемый полезный сигнал. Если этот сигнал совпадает с полезным, то выходной сигнал адаптивной антенной решетки является наилучшей оценкой полезного сигнала (по минимуму СКО); при этом шум подавляется в максимальной степени. Однако на практике необходимая информация о полезном сигнале отсутствует, иначе не требовался бы приемник с антенной решеткой.

В реальных адаптивных антенных системах, в которых реализуется алгоритм МСКО, в качестве ожидаемого полезного сигнала искусственно вводится полностью известный «опорный» или «пилот-сигнал». Пилот-сигнал (называемый также контрольным сигналом) должен иметь такие же, как у полезного входного сигнала (или по крайней мере близкие), пространственные и спектральные характеристики. Такие характеристики иногда априорно известны, но чаще всего имеются в распоряжении только их оценки. Во многих практических системах связи опорный сигнал формируется из выходного сигнала антенной решетки, при этом характеристики адаптивной решетки должны быть совместимы с параметрами принимаемых сигналов. В общем случае это непростая задача, так как [13]:

1) весовые коэффициенты адаптивной антенной решетки являются случайными процессами, модулирующими полезный сигнал, а для того чтобы эта модуляция не ухудшала качество системы, необходимо соответствующим образом выбрать форму полезного сигнала и алгоритм адаптации;

2) для распознавания полезного сигнала и сигнала помехи с помощью адаптивной решетки необходимо, чтобы эти сигналы имели определенные различия;

3) разработчик должен располагать способом формирования опорного сигнала.

Опорный сигнал не обязательно должен быть точной копией полезного сигнала, но он должен удовлетворять следующим условиям [13]:

1) он должен быть сильно коррелирован с выходным полезным сигналом антенной решетки;

2) он не должен быть коррелирован с составляющими сигнала помехи на выходе антенной решетки.

Если указанные условия выполняются, то адаптивная решетка будет работать в заданном режиме, поскольку на весовые коэффициенты влияет лишь степень корреляции между опорным сигналом и сигналами  $x_i(t)$  на выходах элементов решетки. Влияние фазового сдвига в цепи формирования опорного сигнала на работу системы (в случае, когда опорный сигнал получается из выходного сигнала антенной решетки) рассмотрено в работе [14].

Адаптивная антенная решетка, в которой реализуется алгоритм МСКО с пилот-сигналом, формирует луч в направлении, определяемом параметрами пилот-сигнала. В пределах полосы частот пилот-сигнала амплитудно-частотная характеристика этого луча постоянна, а фазо-частотная — линейна. К тому же в этой полосе частот адаптивная решетка будет формировать нули диаграммы в направлении на точечные источники шума.

Поскольку сильный пилот-сигнал блокирует приемник (снижая его чувствительность), то для преодоления этого недостатка разработаны специальные схемы адаптации. Две такие схемы рассмотрены в следующем разделе.

#### 4.2.5. Одно- и двухрежимный алгоритмы адаптации МСКО

Структурная схема устройства, реализующего двухрежимный алгоритм адаптации МСКО [10], при котором с помощью контрольного сигнала формируется основной луч, а затем при выключенном контрольном сигнале осуществляется адаптация по принимаемым сигналам с целью подавления шума, изображена на рис. 4.9. Идеальные линии задержки  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$  выбраны так, чтобы сформировалась совокупность входных сигналов, соответствующих плоской волне, пришедшей с ожидаемого направления. Входы адаптивного процессора подключаются либо к выходам элементов решетки (в режиме подавления шума), либо к выходам указанных линий задержки (в режиме формирования основного луча).

В режиме подавления сигналы, поступающие на входы адаптивного процессора, определяются действительным шумовым полем. В процессе адаптации в указанном режиме осуществляется подавление всех принятых сигналов, так как опорный сигнал устанавливается равным нулю.

В режиме формирования основного луча входные сигналы адаптивного процессора формируются из контрольного сигнала. Например, если в качестве контрольного сигнала служит синусоидальный сигнал с частотой  $f_0$ , то минимизация СКО приведет к тому, что коэффициент передачи антенной решетки в заданном направлении будет иметь определенные амплитуду (не равную нулю) и фазу на этой частоте. Если

же контрольный сигнал представляет собой сумму нескольких синусоидальных сигналов различных частот, то для заданного направления в процессе адаптации будут вырабатываться определенные значения амплитуд и фаз коэффициентов передачи решетки для каждой из этих частот. Наконец, если просуммировать несколько контрольных сигналов, соответствующих различным ожидаемым направлениям, то коэффициент передачи зафиксируется одновременно для всех заданных частот и направлений. Таким образом, при двухрежимном процессе адаптации минимизируется суммарная мощность всех принятых сигналов,

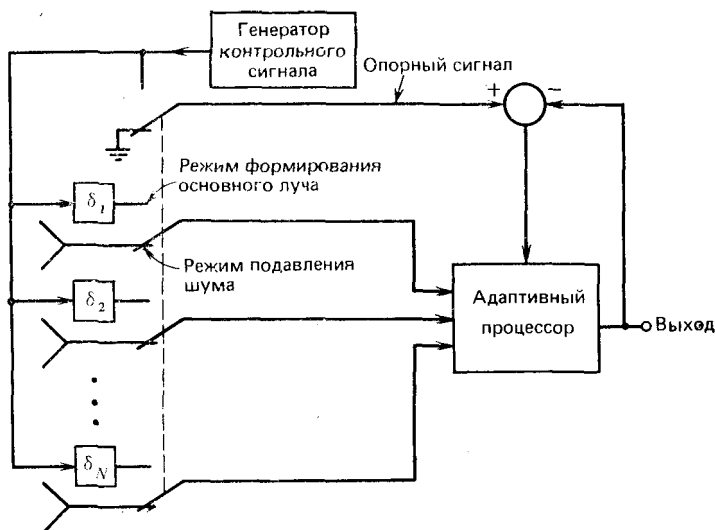


Рис. 4.9. Структурная схема устройства, реализующего двухрежимный алгоритм адаптации МСКО

некоррелированных с контрольным сигналом, при фиксированных (комплексных) коэффициентах передачи антенной решетки для задаваемых контрольным сигналом частот и угловых направлений.

Структурная схема устройства, реализующего однорежимный алгоритм адаптации МСКО, для подавления составляющих шума, не коррелированных с контрольным сигналом, и формирования основного луча показана на рис. 4.10. В этой схеме недостаток предыдущего устройства, обусловленный невозможностью приема реального сигнала при подключенном к процессору контрольном сигнале, устраняется введением вспомогательного адаптивного процессора. В качестве ожидаемого полезного сигнала дополнительного адаптивного процессора служит контрольный сигнал, а на его входы подается сумма действительного входного и контрольного сигналов. Второй (ведомый) процессор не участвует в адаптации (его весовые коэффициенты регулируются адаптивным процессором). Его роль сводится к формированию реального выходного сигнала. На входы ведомого процессора не поступает

контрольный сигнал, в результате чего обеспечивается непрерывный прием сигналов.

При использовании однорежимного метода адаптации контрольный сигнал присутствует постоянно и поэтому адаптивный процессор воспроизводит на выходе этот сигнал с минимальной СКО, подавляя (наилучшим образом) все другие некоррелированные с ним сигналы. Та-

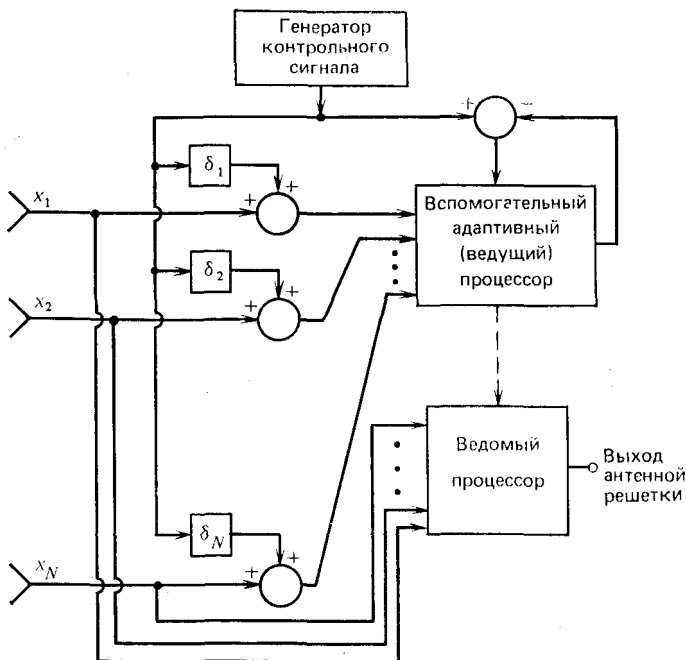


Рис. 4.10. Структурная схема устройства, реализующего однорежимный алгоритм адаптации МСКО

ким образом, адаптивный процессор обеспечивает сохранение желаемой формы диаграммы направленности антенной решетки в заданных направлениях (в полосе частот контрольного сигнала), в то же время формируя нули диаграммы в направлениях на источники шума (в пределах полосы частот шума).

#### 4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Ранее было показано, что если градиент точно известен на каждой итерации, то в процессе адаптации весовой вектор сходится к оптимальному весовому вектору. На практике точное измерение градиента невозможно и приходится довольствоваться оценками градиента, полученными по выборке ограниченного объема. В данном разделе рассматривается дифференциальный алгоритм наискорейшего спуска (ДНС) [15], отличающийся от других способом получения оценки градиента.

В случае, когда имеется только один весовой коэффициент  $w$ , СКО можно записать в виде

$$\xi [w(k)] \triangleq \xi(k) = \xi_{min} + \alpha w^2(k). \quad (4.84)$$

Зависимость СКО от одной составляющей весового вектора  $w$  показана на рис. 4.11. Первая и вторая производные СКО определяются как

$$\left[ \frac{d\xi(k)}{dw} \right]_{w=w(k)} = 2\alpha w(k), \quad (4.85)$$

$$\left[ \frac{d^2 \xi(k)}{dw^2} \right]_{w=w(k)} = 2\alpha. \quad (4.86)$$

Эти производные можно приближенно вычислить следующим образом:

$$\left[ \frac{d\xi(k)}{dw} \right]_{w=w(k)} = \frac{\xi[w(k) + \delta] - \xi[w(k) - \delta]}{2\delta}, \quad (4.87)$$

$$\left[ \frac{d^2 \xi(k)}{dw^2} \right]_{w=w(k)} = \frac{\xi[w(k) + \delta] - 2\xi[w(k)] + \xi[w(k) - \delta]}{\delta^2}. \quad (4.88)$$

Процедура вычисления первой производной, иллюстрируемая рис. 4.11, требует изменения весового коэффициента на  $\pm \delta$  относительно текущего значения  $w(k)$ . Среднее значение СКО, полученных

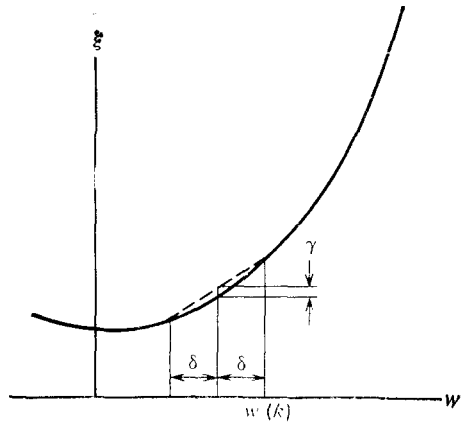


Рис. 4.11. Определение градиента в одномерном случае

при  $w(k) + \delta$  и  $w(k) - \delta$ , будет больше значения СКО в точке  $w = w(k)$  на величину  $\gamma$ . Следовательно, изменение весового коэффициента приводит к ухудшению эффективности при таком способе нахождения производной.

#### 4.3.1. Ухудшение эффективности, обусловленное применением метода измерения градиента

Как видно из рис. 4.11, в одномерном случае

$$\gamma = \frac{\alpha [w(k) + \delta]^2 + \alpha [w(k) - \delta]^2 + 2\xi_{min}}{2} - \alpha w^2(k) - \xi_{min} = \alpha \delta^2, \quad (4.89)$$

откуда видно, что  $\gamma$  зависит только от  $\alpha$  и не зависит от  $\omega(k)$ . Для того чтобы характеризовать ухудшение эффективности, вызванное применением метода вычисления градиента, удобно ввести безразмерную величину  $P$  — возмущение, определяемое следующим образом:

$$P \triangleq \frac{\gamma}{\xi_{\min}} = \frac{\alpha \delta^2}{\xi_{\min}}. \quad (4.90)$$

Возмущение характеризует увеличение СКО по отношению к минимальной достижимой СКО.

Для того чтобы перейти к двумерному случаю, сначала запишем корреляционную матрицу сигнала

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

Средняя квадратическая ошибка, соответствующая этой корреляционной матрице, может быть записана в виде

$$\xi = r_{11} \omega_1^2 + r_{22} \omega_2^2 + 2r_{12} \omega_1 \omega_2 + \xi_{\min}. \quad (4.92)$$

Возмущение, соответствующее частной производной СКО по координате  $\omega_1$ , определяется формулой

$$P = r_{11} \delta^2 / \xi_{\min}. \quad (4.93)$$

Аналогично для производной по  $\omega_2$  имеем

$$P = r_{22} \delta^2 / \xi_{\min}. \quad (4.94)$$

Среднее возмущение равно

$$P_{\text{ср}} = \frac{\delta^2}{\xi_{\min}} \frac{r_{11} + r_{22}}{2}. \quad (4.95)$$

В  $N$ -мерном случае определим общее возмущение как среднее всех возмущений, соответствующих составляющим градиента, т. е.

$$P = \frac{\delta^2}{\xi_{\min}} \frac{\text{tr}(\mathbf{R}_{xx})}{N}, \quad (4.96)$$

где символом  $\text{tr} \mathbf{R}_{xx}$  обозначен след матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$ , равный сумме ее диагональных элементов. Нетрудно убедиться в том, что след матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$  равен сумме ее собственных значений<sup>1</sup>.

Обозначив

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i,$$

получим

$$P = \delta^2 \lambda_{\text{ср}} / \xi_{\min}. \quad (4.97)$$

В практических системах используются также другие методы измерения градиента. Производная может быть определена на основе измерения взаимной корреляции значений весового коэффициента и СКО

<sup>1</sup> Для этого необходимо воспользоваться формулами (4.11) и (Г.2), согласно которым  $\text{tr} \mathbf{R}_{xx} = \text{tr}(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1})$ . (Прим. ред.)

при синусоидальном возмущении (модуляции) этого коэффициента. В многомерном случае составляющие градиента можно получить аналогичным образом, модулируя весовые коэффициенты синусоидальными сигналами различных частот. Процедура, иллюстрируемая рис. 4.11, соответствует модуляции прямоугольными импульсами.

#### 4.3.2. Шум, связанный с измерением градиента, и расстройка весового вектора

Значения градиента, полученные методом конечных разностей случайны, так как они основаны не на истинных значениях СКО, а на их статистических оценках. Оценка СКО  $\widehat{\xi}$ , полученная по выборке объема  $K$ , определяется как

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^2(k). \quad (4.98)$$

На основании известных формул [16] дисперсию оценки  $\widehat{\xi}$  можно записать как

$$\text{var} [\widehat{\xi}] = \langle E\{e^4(k)\} - [E\{e^2(k)\}]^2 \rangle / K. \quad (4.99)$$

Если случайная величина  $e(k)$  распределена по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , то ее четвертый момент равен  $3\sigma^4$  и поэтому

$$\text{var} [\widehat{\xi}] = \frac{1}{K} (3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{2\sigma^4}{K} = \frac{2\xi^2}{K}, \quad (4.100)$$

откуда видно, что дисперсия оценки  $\widehat{\xi}$  прямо пропорциональна квадрату СКО и обратно пропорциональна объему выборки. В общем случае

$$\text{var} [\widehat{\xi}] = \eta \xi^2 / K, \quad (4.101)$$

где коэффициент  $\eta = 2$  для гауссовского распределения  $e(k)$  с нулевым средним значением. При негауссовских распределениях обычно  $\eta < 2$ , но близка к этому значению. Поэтому в дальнейшем будем считать, что формула (4.100) верна.

При алгоритме ДНС производные измеряются по формуле (4.87). Так как оценки СКО в (4.87), соответствующие различным по знаку приращениям, формируются из различных выборочных отсчетов, то погрешность измерения производной состоит из двух независимых составляющих (поскольку значения  $e(k)$  полагаются независимыми). Дисперсия каждой из указанных составляющих определяется выражением (4.100). Предположим, что производная измеряется в точке, близкой к точке минимума СКО, и возмущение  $P$  невелико. Тогда дисперсии обеих составляющих будут практически одинаковыми и общая дис-

персия погрешности измерения производной будет равна их сумме. Из (4.87) и (4.100) следует, что

$$\begin{aligned} \text{var} \left[ \frac{d\xi}{dw} \right]_{w=w(k)} &= \frac{1}{4\delta^2} \left[ \frac{2\xi^2 [w(k) + \delta]}{K} + \right. \\ &\left. + \frac{2\xi^2 [w(k) - \delta]}{K} \right] \cong \frac{\xi_{\min}^2}{K\delta^2}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

При измерении всех составляющих градиента полагают, что погрешности для различных составляющих независимы. Определим вектор шума градиента  $\mathbf{g}(k)$  соотношением

$$\mathbf{g}(k) \triangleq \widehat{\nabla}(k) - \nabla(k), \quad (4.103)$$

где  $\widehat{\nabla}(k)$  — оценка градиента  $\nabla(k)$ . При принятых допущениях ковариационная матрица вектора  $\mathbf{g}(k)$  примет вид

$$\text{cov}[\mathbf{g}(k)] = \frac{\xi_{\min}^2}{K\delta^2} \mathbf{I}. \quad (4.104)$$

Перейдя к нормальным координатам, получаем

$$\mathbf{g}'(k) = \mathbf{Q}\mathbf{g}(k). \quad (4.105)$$

Поскольку согласно (4.104) ковариационная матрица  $\mathbf{g}(k)$  является скалярной, то таковой же будет и ковариационная матрица после ортогонального преобразования

$$\text{cov}[\mathbf{g}'(k)] = E\{\mathbf{Q}\mathbf{g}(k)\mathbf{g}^T(k)\mathbf{Q}^{-1}\} = \frac{\xi_{\min}^2}{K\delta^2} \mathbf{I}. \quad (4.106)$$

Этот результат говорит о том, что вблизи точки минимума СКО ковариационная матрица шума градиента приблизительно постоянна и не зависит от  $w(k)$ .

Из-за наличия шума градиента весовые коэффициенты, получаемые в процессе адаптации, будут также содержать шумовую составляющую. При использовании вместо градиента его оценок метод наискорейшего спуска можно описать следующим векторным разностным уравнением:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k+1) &= \mathbf{v}(k) + \Delta_s (-\widehat{\nabla}(k)) = \\ &= \mathbf{v}(k) + \Delta_s [-\nabla(k) - \mathbf{g}(k)], \end{aligned} \quad (4.107)$$

где  $\mathbf{v}(k) \triangleq w(k) - w_{\text{опт}}$ . Так как согласно (4.63) истинное значение градиента

$$\nabla(k) = 2\mathbf{R}_{xx}\mathbf{v}(k), \quad (4.108)$$

то уравнение (4.107) можно переписать в виде

$$\mathbf{v}(k+1) = [\mathbf{I} - 2\Delta_s\mathbf{R}_{xx}] \mathbf{v}(k) - \Delta_s\mathbf{g}(k). \quad (4.109)$$



Это уравнение является разностным уравнением первого порядка со случайной возбуждающей функцией  $-\Delta_s \mathbf{g}(k)$ . В нормальных координатах получим

$$\mathbf{v}'(k+1) = [\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda] \mathbf{v}'(k) - \Delta_s \mathbf{g}'(k). \quad (4.110)$$

После затухания переходных составляющих наступает установившийся режим и изменение весового вектора  $\mathbf{v}'(k)$  в ответ на возбуждающую функцию  $-\Delta_s \mathbf{g}'(k)$  будет стационарным случайным процессом. Поскольку в нормальных координатах составляющие весового вектора не связаны друг с другом, а компоненты  $\mathbf{g}'(k)$  не коррелированы, то компоненты вектора  $\mathbf{v}'(k)$  будут также взаимно некоррелированными и ковариационная матрица  $\mathbf{v}'(k)$  будет диагональной. Эта ковариационная матрица будет описывать шумовую составляющую весового вектора, возникающую в результате случайного воздействия. Найдем выражение для ковариационной матрицы  $\mathbf{v}'(k)$ . Так как  $\text{cov}[\mathbf{v}'(k)] \triangleq E\{\mathbf{v}'(k)\mathbf{v}'^T(k)\}$ , то для  $\mathbf{v}'(k+1)\mathbf{v}'^T(k+1)$  с учетом (4.110) запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(k+1)\mathbf{v}'^T(k+1) &= (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) \mathbf{v}'(k)\mathbf{v}'^T(k)(\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) + \\ &+ \Delta_s^2 \mathbf{g}'(k)\mathbf{g}'^T(k) - \Delta_s (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) \mathbf{v}'(k)\mathbf{g}'^T(k) - \Delta_s \mathbf{g}'(k)\mathbf{v}'^T(k). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Вычислив математическое ожидание для обеих частей выражения (4.111) и учтя некоррелированность  $\mathbf{v}'(k)$  и  $\mathbf{g}'(k)$ , обусловленную тем, что  $\mathbf{v}'(k)$  зависит только от предыдущих значений шума градиента, получаем в установившемся режиме

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mathbf{v}'(k)] &= (\mathbf{I} - 2\Delta_s \Lambda) \text{cov}[\mathbf{v}'(k)] (\mathbf{I} - \\ &- 2\Delta_s \Lambda) + \Delta_s^2 \text{cov}[\mathbf{g}'(k)] = (\mathbf{I} - 4\Delta_s \Lambda + \\ &+ 4\Delta_s^2 \Lambda^2) \text{cov}[\mathbf{v}'(k)] + \Delta_s^2 \text{cov}[\mathbf{g}'(k)]. \end{aligned} \quad (4.112)$$

После несложных преобразований в (4.112) запишем

$$\text{cov}[\mathbf{v}'(k)] = \Delta_s^2 [4\Delta_s \Lambda - 4\Delta_s^2 \Lambda^2]^{-1} \text{cov}[\mathbf{g}'(k)]. \quad (4.113)$$

На практике значение шаговой постоянной при методе наискорейшего спуска выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_s \Lambda \ll \mathbf{I}. \quad (4.114)$$

В силу (4.114) квадратичными членами в выражении (4.113) можно пренебречь, и поэтому

$$\text{cov}[\mathbf{v}'(k)] \simeq \frac{\Delta_s}{4} \Lambda^{-1} \text{cov}[\mathbf{g}'(k)] \quad (4.115)$$

или с учетом (4.106)

$$\text{cov}[\mathbf{v}'(k)] \simeq \frac{\Delta_s \xi_{\min}^2}{4K\delta^2} \Lambda^{-1}. \quad (4.116)$$

Напомним, что  $\mathbf{R}_{xx}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v}$ . Поэтому (4.116) эквивалентно соотношению

$$\text{cov} [\mathbf{v}(k)] = E \{ \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}'(k) \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{Q} \} = \frac{\Delta_s \xi_{\min}^2}{4K\delta^2} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \quad (4.117)$$

в исходной системе координат.

При отсутствии шума весового вектора метод наискорейшего спуска обеспечивает сходимость в установившемся режиме к точке, соответствующей минимуму СКО, т. е.  $\xi_{\min}$ . Из-за неизбежно присутствующего шума весового вектора решение в установившемся режиме будет флуктуировать около точки минимума СКО. В результате этих флуктуаций установившееся значение СКО будет превышать  $\xi_{\min}$ . Оценим это превышение.

Как было показано в разд. 4.1.3, СКО определяется выражением

$$\xi(k) = \xi_{\min} + \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(k), \quad (4.118)$$

где  $\mathbf{v}'(k) = \mathbf{w}'(k) - \mathbf{w}'_{\text{опт}}$ . Следовательно, среднее значение искомого превышения СКО будет

$$E \{ \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(k) \} = \sum_{p=1}^N \lambda_p E \{ [v'_p(k)]^2 \}. \quad (4.119)$$

Однако согласно (4.116) можно записать

$$E \{ [v'_p(k)]^2 \} = \frac{\Delta_s \xi_{\min}^2}{4K\delta^2} \left( \frac{1}{\lambda_p} \right). \quad (4.120)$$

Поэтому (4.119) можно переписать в виде

$$E \{ \mathbf{v}'^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(k) \} = \frac{N\Delta_s \xi_{\min}^2}{4K\delta^2}. \quad (4.121)$$

Если учесть, что рассогласование  $M$  определялось как отношение среднего превышения СКО к минимальной СКО, то для алгоритма ДНС

$$M = \frac{N\Delta_s \xi_{\min}}{4K\delta^2}. \quad (4.122)$$

Более удобно выразить полученный результат через постоянную времени обучающего процесса и возмущение  $P$ .

Для определения каждой составляющей градиента используется  $2K$  выборочных отсчетов. Поскольку на каждой итерации требуется  $N$  составляющих градиента, то общее число отсчетов равно  $2KN$ . Как было показано в разд. 4.2.2, постоянная времени, соответствующая  $p$ -й нормальной составляющей весового вектора, определяется как

$$\tau_{p \text{ ско}} = \frac{1}{4\Delta_s \lambda_p} = \frac{\tau_p}{2}. \quad (4.123)$$

Целесообразно ввести новую постоянную времени  $T_{p \text{ ско}}$ , характеризующую переходный процесс, где единицей измерения времени является период выборки. Тогда для алгоритма ДНС

$$T_{p \text{ ско}} \triangleq 2KN\tau_{p \text{ ско}}. \quad (4.124)$$

Реальный временной интервал (в секундах), соответствующий  $T_{p\text{ско}}$ , можно легко определить, если известна частота дискретизации.

При алгоритме ДНС рассогласование получается подстановкой выражения для  $\xi_{\min}$  из (4.90) в формулу (4.122):

$$M = \frac{N\Delta_s \lambda_{\text{ср}}}{4KP}. \quad (4.125)$$

Подставив (4.123) в (4.124), получим

$$T_{p\text{ско}} = \frac{NK}{2\Delta_s \lambda_p}, \quad (4.126)$$

откуда

$$\lambda_p = \frac{NK}{2\Delta_s} \left( \frac{1}{T_{p\text{ско}}} \right), \quad (4.127)$$

так что

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{NK}{2\Delta_s} \left( \frac{1}{T_{\text{ско}}}_{\text{ср}} \right). \quad (4.128)$$

Подставив (4.128) в (4.125), определим рассогласование как

$$M = \frac{N^2}{8P} \left( \frac{1}{T_{\text{ско}}}_{\text{ср}} \right). \quad (4.129)$$

Таким образом, для алгоритма ДНС рассогласование прямо пропорционально квадрату числа весовых коэффициентов и обратно пропорционально возмущению. Кроме того, рассогласование обратно пропорционально скорости адаптации (чем выше скорость, тем больше рассогласование). Поскольку алгоритм ДНС основан на методе наименьшего спуска, то при его реализации также возникает проблема распределения собственных значений, рассмотренная в разд. 4.2.2.

Здесь будет уместно сравнить уровни рассогласования для алгоритмов ДНС и МСКО, определяемые выражениями (4.129) и (4.83) соответственно. При заданном уровне рассогласования с ростом числа весовых коэффициентов  $N$  постоянная времени процесса адаптации при алгоритме МСКО возрастает линейно в то время, как при алгоритме ДНС — по квадратичному закону. Кроме того, при алгоритме МСКО отсутствуют возмущения. Следовательно, в типовых условиях скорость адаптации алгоритма МСКО может быть выше скорости адаптации алгоритма ДНС.

Рассогласование  $M$  определяется как нормированные потери в эффективности, обусловленные наличием шума весового вектора. В реальных адаптивных системах, где используется алгоритм ДНС, погрешность при определении весового вектора содержит не только случайную составляющую, обусловленную шумом, но и добавочную систематическую составляющую, вызванную применением метода измерения градиента. В связи с этим возникают дополнительные потери в эффективности, мерой которых является значение возмущения  $P$ , также характеризующее нормированное превышение СКО. Таким обра-

зом, общее превышение СКО является суммой указанных составляющих и будет называться в дальнейшем полным рассогласованием  $M_{\Pi}$ . Полное рассогласование определяется выражением

$$M_{\Pi} = M + P \quad (4.130)$$

или с учетом (4.129)

$$M_{\Pi} = \frac{N^2}{8P} \left( \frac{1}{T_{\text{СКО}}}_{\text{ср}} \right) + P. \quad (4.131)$$

Так как параметр  $P$ , определяемый формулой (4.90), является конструктивным, то его можно выбрать, варьируя значение  $\delta$ . Желательно минимизировать полное рассогласование  $M_{\Pi}$  соответствующим выбором значения  $P$ . В результате такой оптимизации получим

$$P_{\text{опт}} = \frac{1}{2} (M_{\Pi})_{\text{min}}, \quad (4.132)$$

$$(M_{\Pi})_{\text{min}} = \frac{N^2}{4P_{\text{опт}}} \left( \frac{1}{T_{\text{СКО}}}_{\text{ср}} \right) = \left[ \frac{N^2}{2} \left( \frac{1}{T_{\text{СКО}}}_{\text{ср}} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.133)$$

В отличие от алгоритма МСКО алгоритм ДНС чувствителен к корреляции между выборочными значениями сигнала ошибки  $e(k)$ , поскольку такая корреляция фактически означает уменьшение эффективного объема выборки при вычислении оценки градиента. Следствием этого является увеличение фактического рассогласования по сравнению с величиной, определяемой формулой (4.133), полученной в предположении о статистической независимости выборочных значений ошибки.

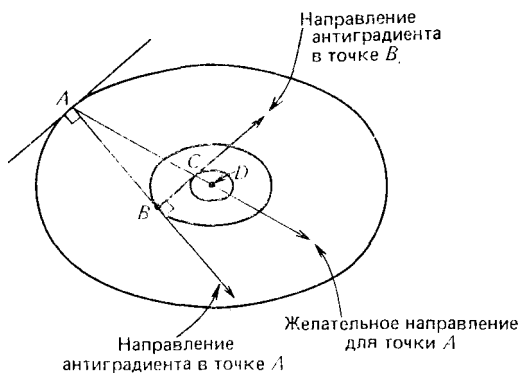
#### 4.4. УСКОРЕННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД

Алгоритмам, основанным на методе наискорейшего спуска, свойственна нежелательная зависимость скорости сходимости от распределения собственных значений ковариационной матрицы входного сигнала. Существует много способов увеличения скорости сходимости алгоритмов наискорейшего спуска, основанных на методе сопряженных градиентов [17—22]. Несмотря на то, что эти способы нашли практическое применение в задачах управления [23], пока не было сведений об их применении в адаптивных антенных решетках. Это объясняется следующими причинами:

- 1) сложностью технической (аппаратурной) реализации алгоритма;
- 2) возможностью получения более высокой скорости сходимости с помощью других методов (рассматриваемых в последующих главах);
- 3) чувствительностью всех ускоренных градиентных методов (хотя и в разной степени) к искажениям сигналов из-за шума;
- 4) увеличением (по сравнению с методами наискорейшего спуска) количества вычислений и объема памяти.

Несмотря на это, представляется целесообразным рассмотреть один из ускоренных градиентных алгоритмов, чтобы определить возможности

увеличения скорости сходимости с помощью таких методов. С этой целью будет проанализирован метод спуска, предложенный Пауэллом (Powell) [18]. Достоинством указанного метода является его низкая чувствительность к погрешностям, вызванным шумом. Вместе с тем, следует иметь в виду, что другие методы теоретически могут обеспечить более высокую скорость сходимости. Метод Пауэлла основан на том, что при квадратичном критерии эффективности  $\Phi(w)$  любая прямая, проходящая через точку минимума, пересекает семейство поверхностей уровня под одинаковым углом. Это свойство в двухмерном случае иллюстрируется рис. 4.12, на котором линия  $AD$ , соеди-



**Рис. 4.12.** Геометрические соотношения для метода Пауэлла в двухмерном случае

няющая точку  $A$  с точкой минимума  $D$ , пересекает линии уровня под одинаковыми углами. Вследствие этой особенности (неизменности угла пересечения) прямая, соединяющая точки  $A$  и  $C$  на рис. 4.12, проходит через точку  $D$ , в которой градиент критерия равен нулю.

Процедура отыскания минимума критерия эффективности описывается далее. Для заданного исходного значения  $w_0$  в точке  $A$  вначале определяется направление градиента, перпендикулярное касательной к поверхности уровня в этой точке. Затем при движении от точки  $A$  в направлении антиградиента, т. е. в направлении, обратном направлению градиента, достигается точка  $B$ , в которой производная  $\Phi(w)$  по этому направлению равна нулю. В принципе можно взять любую точку на этой прямой, находящуюся на конечном расстоянии от точки  $A$ ; однако сходимость процедуры гарантируется лишь при указанном способе выбора точки  $B$ .

Определив положение точки  $B$ , аналогичным способом находим направление антиградиента в этой точке. Найденное направление параллельно направлению касательной в начальной точке  $A$ . Перемещаясь от точки  $B$  по прямой линии в направлении антиградиента, находим точку, в которой производная критерия  $\Phi(w)$  по этому направлению равна нулю (точка  $C$  на рис. 4.12). Прямая, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , проходит также и через точку  $D$ . Точка минимума  $D$  может быть определена как точка, в которой производная  $\Phi(w)$  по направлению прямой  $AC$  равна нулю.

Предыдущую процедуру можно распространить на  $N$ -мерный случай, имея в виду, однако, что геометрические соотношения, иллюстрируемые рис. 4.12, справедливы только в двухмерном случае. Первый шаг (от точки  $A$  к точке  $B$ ) осуществляется просто путем перемещения в  $N$ -мерном пространстве в направлении антиградиента. Определив

положение точки  $B$ , можно найти  $(N - 1)$  векторов, взаимно ортогональных и ортогональных предыдущему направлению градиента. С помощью этих векторов отыскиваются последовательно  $(N - 1)$  точек  $C, D, E, \dots$ . Последние три точки, полученные таким способом, играют ту же роль, что и точки  $A, B, C$  на рис. 4.12. При перемещении по линии, соединяющей точки  $A$  и  $C$ , можно определить новую точку  $D$ . Эта точка  $D$  затем снова рассматривается как точка  $C$  на рис. 4.12 и проводится новая прямая линия, соединяющая эту точку с точкой, полученной тремя шагами ранее.

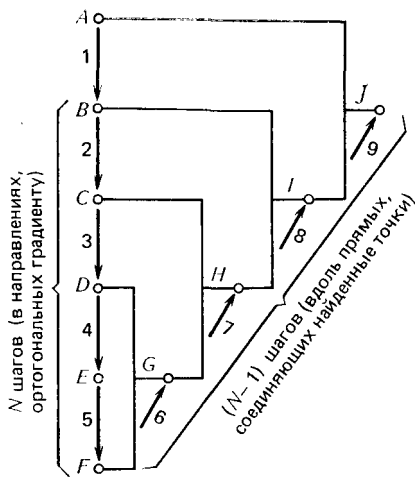


Рис. 4.13. Последовательность шагов одного полного цикла алгоритма спуска методом Пауэлла (при  $N=5$ )

Последовательность шагов одного полного цикла алгоритма спуска методом Пауэлла в пяти-

мерном случае иллюстрируется рис. 4.13. На первом шаге осуществляется перемещение от точки  $A$  к точке  $B$  в направлении антиградиента  $\mathbf{v}_1$  с размером шага  $\alpha$ , удовлетворяющим условию

$$\frac{d}{d\alpha_1} \{ \mathcal{P} [\mathbf{w}(0) + \alpha_1 \mathbf{v}_1] \} = 0, \quad (4.134)$$

так что

$$\mathbf{w}(1) = \mathbf{w}(0) + \alpha_1 \mathbf{v}_1. \quad (4.135)$$

Затем определяется положение точки  $C$  перемещением от точки  $B$  в направлении антиградиента  $\mathbf{v}_2$  (которое также ортогонально направлению  $\mathbf{v}_1$ ) с шагом  $\alpha_2$ , удовлетворяющим условию

$$\frac{d}{d\alpha_2} \{ \mathcal{P} [\mathbf{w}(1) + \alpha_2 \mathbf{v}_2] \} = 0. \quad (4.136)$$

Используя указанную процедуру, находят положение точки  $D$ , и этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут найдены все пять точек (от  $B$  до  $F$ , как показано на рис. 4.13).

Направление спуска  $\mathbf{v}_6$  определяется прямой, соединяющей точки  $D$  и  $F$  (аналогично линии  $AC$  на рис. 4.12). Точка  $G$  находится в результате перемещения по этой прямой с шагом  $\alpha_6$ , который удовлетворяет условию

$$\frac{d}{d\alpha_6} \{ \mathcal{P} [\mathbf{w}(5) + \alpha_6 \mathbf{v}_6] \} = 0. \quad (4.137)$$

Новое направление спуска  $\mathbf{v}_7$  характеризуется линией, соединяющей точки  $C$  и  $G$ , при этом  $\alpha_7$  должен удовлетворять условию

$$\frac{d}{d\alpha_7} \{\mathfrak{P}[\mathbf{w}(6) + \alpha_7 \mathbf{v}_7]\} = 0. \quad (4.138)$$

В результате перемещения получается точка  $H$ . Этот процесс продолжается, пока не будет найдена последняя точка  $J$  цикла. Таким образом, для выполнения одного цикла в алгоритме Пауэлла для  $N$ -мерного случая требуется  $N + N - 1 = 2N - 1$  шагов. В общем случае может потребоваться повторение рассмотренной процедуры, при этом в качестве исходного весового вектора в новом цикле используется его последнее значение, найденное в предыдущем цикле.

#### 4.4.1. Алгоритм, основанный на методе Пауэлла

Как уже было показано, на каждом шаге ускоренного градиентного алгоритма Пауэлла (алгоритма УГП) производится перемещение в направлении  $\mathbf{v}$  с величиной перемещения (шага)  $\alpha$ , удовлетворяющей условию

$$\frac{d}{d\alpha} \{\mathfrak{P}(\mathbf{w} + \alpha\mathbf{v})\} = 0. \quad (4.139)$$

Для комплексных весовых коэффициентов СКО определяется соотношением

$$\xi(\mathbf{w}) = E \{d^2\} - \mathbf{w}^\dagger \mathbf{r}_{xd} - \mathbf{r}_{xd}^\dagger \mathbf{w} + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}. \quad (4.140)$$

Градиент  $\xi(\mathbf{w} + \alpha\mathbf{v})$  по  $\alpha$  равен

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha [\xi(\mathbf{w} + \alpha\mathbf{v})] = & -\mathbf{v}^\dagger \mathbf{r}_{xd} + \mathbf{r}_{xd}^\dagger \mathbf{v} + \\ & + \mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{v} + 2\alpha \mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Положив  $\nabla_\alpha [\xi(\mathbf{w} + \alpha\mathbf{v})] = 0$ , получим

$$\alpha = \frac{-\mathbf{v}^\dagger \mathbf{r}_{xd} + \mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}}{\mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{v}}. \quad (4.142)$$

Поскольку  $\mathbf{r}_{xd}$  и  $\mathbf{R}_{xx}$  неизвестны, то для определения шага  $\alpha$  необходимо оценить выражение, стоящее в числителе (4.142). Так как  $-\mathbf{r}_{xd} + \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} = \mathbf{V} \{\xi(\mathbf{w})\}/2$ , то можно считать, что числитель в (4.142) приближенно равен  $\mathbf{v}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v} \{e(k) \times (k)\}$ . Заметим, что величину  $\mathbf{v}^\dagger \mathbf{x}$  можно рассматривать как выходной сигнал процессора с весовым вектором  $\mathbf{v}$ , а  $\mathbf{A} \mathbf{v} \{(\mathbf{v}^\dagger \mathbf{x})(\mathbf{x}^\dagger \mathbf{v})\}$  — как приближенное значение величины  $\mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{A} \mathbf{v} \{\cdot\}$  — среднее арифметическое, вычисленное по  $K$  выборочным отсчетам. Поскольку необходимо учитывать изменения условий приема сигналов, оценивать выражения в числителе и знаменателе (4.142) следует одновременно<sup>1</sup>. Для одновременного получения оце-

<sup>1</sup> Точнее выражения в числителе и знаменателе должны оцениваться по одним и тем же выборочным значениям. (Прим. перев.)

нок  $\widehat{\nabla}_{\nu}$  и  $A\nu\{\nu^{\dagger}x x^{\dagger}\nu\}$  требуется два параллельно работающих процессора, один из которых имеет весовой вектор  $w(k)$ , а другой —  $\nu(k)$ .

Рассмотрим теперь последовательность шагов полного цикла алгоритма Пауэлла.

**Шаг 1.** Для начального значения весового вектора  $w(0)$  оценивается антиградиент  $\nu(0)$  по выборке объемом  $K$  и после вычисления шага  $\alpha$  согласно (4.135) получается  $w(1)$ . Для вычисления  $\alpha$  по формуле (4.142) требуется дополнительно  $K$  выборочных отсчетов.

**Шаги 2  $\rightarrow N$ .** На этом этапе оценивается антиградиент в точке  $w(k)$  по выборке объемом  $K$ . Если градиент и предыдущие шаги оценены безошибочно, то текущий градиент будет автоматически ортогонален предыдущему градиенту. Так как оценки градиента неточны, то для определения нового направления  $\nu(k)$  (которое должно быть ортогональным всем предыдущим направлениям  $\nu(0), \nu(1), \dots, \nu(k-1)$ ) используется процедура ортогонализации Шмидта<sup>1</sup>. При этом

$$\nu(k) = \widehat{\nabla}(k) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{[\nu^{\dagger}(i)\widehat{\nabla}(k)]}{[\nu^{\dagger}(i)\nu(i)]} \nu(i). \quad (4.143)$$

Зная  $\nu(k)$  и размер шага  $\alpha$ , получаем  $w(k+1) = w(k) + \alpha\nu(k)$ .

**Шаги  $N+1 \rightarrow 2N-1$ .** На этом этапе алгоритма определяется новое направление по формуле

$$\nu(k) = w(k) - w[2(N-1) - k]. \quad (4.144)$$

Вектор  $w(k+1)$  находится по  $\nu(k)$  и  $\alpha$  так же, как и на предыдущих шагах. Поскольку здесь уже не требуется оценивать градиент, то необходимый объем выборки равен  $K$ .

#### 4.5. ГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Первоначально адаптивная обработка сигналов РЛС применялась для подавления помех, поступающих по боковым лепесткам диаграммы направленности антенны, без учета сигналов, принимаемых по главному лепестку. Это было вполне обоснованным, поскольку адаптивные процессоры в то время не обладали достаточным числом степеней свободы. Однако в последнее время в связи с повышением требований к эффективности радиолокационных систем необходимо применять адаптивные процессоры с большим числом степеней свободы. Такие процессоры можно построить так, чтобы избежать ухудшения эффективности обработки сигналов, принимаемых по главному лепестку, за счет введения ограничений.

В системах с адаптивными решетками, характеризующихся большим числом степеней свободы и высокой скоростью настройки, может проявляться нежелательная реакция адаптивного процессора на протяженные отраженные сигналы со сравнительно высокой энергией. Это может привести к искажению сигнала и его подавлению. К тому же, так

<sup>1</sup> Эта процедура известна как процедура Грама—Шмидта. (Прим. ред.)



как уровень мощности помехи может влиять на реакцию решетки в направлении главного лепестка, помехи «мерцающих» источников будут модулировать сигнал, снижая тем самым эффективность последующей когерентной обработки. Поэтому далее будет рассмотрена процедура оптимизации с ограничениями, предложенная в работе [24] для градиентных алгоритмов. Ограничения здесь сводятся к тому, чтобы в

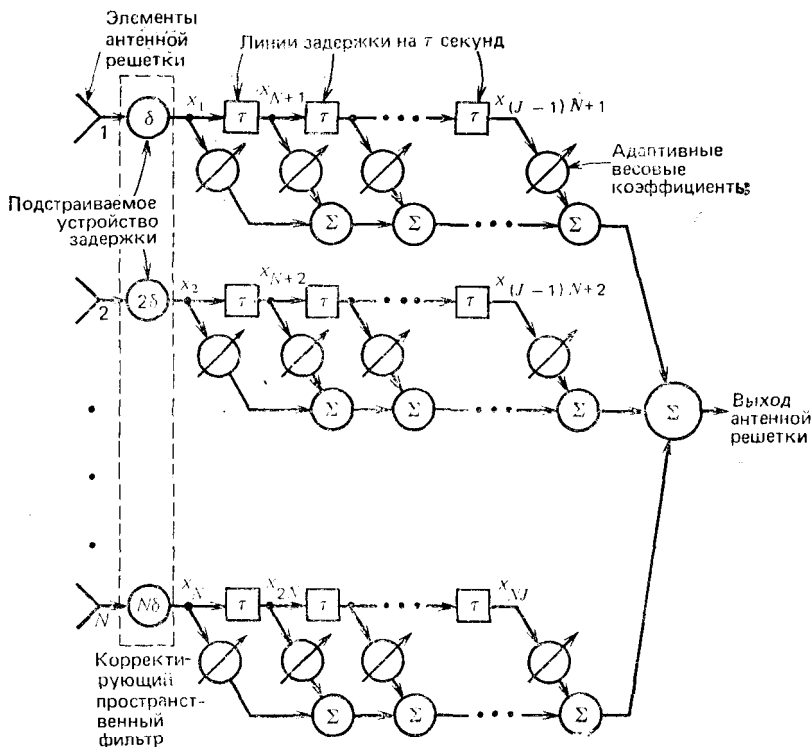


Рис. 4.14. Структурная схема широкополосной адаптивной  $N$ -элементной антенной решетки с подстройкой  $J$  весовых коэффициентов в каждом канале

процессе адаптации сохранялись неизменными некоторые характеристики главного луча диаграммы направленности. Оказывается, что адаптивная система с ограничением состоит из двух частей: 1) предпроцессорной части, называемой «корректирующим пространственным фильтром» и предназначенной для согласования геометрии антенной решетки с плоским волновым фронтом сигналов, и 2) сигнального процессора с адаптивными весовыми коэффициентами, выполняющего основную функцию системы с адаптивной решеткой.

Предположим, что в заданном направлении необходимо обеспечить требуемую частотную характеристику широкополосной антенной решетки, показанной на рис. 4.14. Априорное задание направления и частотной характеристики в алгоритме МСКО с ограничениями необходимо для правильного выбора налагаемых ограничений. При этом рас-

смаатриваемый алгоритм будет обеспечивать минимизацию мощности выходного шума. Предположим, что выбранное направление перпендикулярно прямой, вдоль которой расположены элементы решетки (в этом случае времена задержки, устанавливаемые в корректирующем пространственном фильтре, равны нулю). Тогда на входах линий задержки (ЛЗ) основного процессора появляются одинаковые составляющие сигнала  $(x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t))$  на рис. 4.14), которые затем распространяются «параллельно» по многоотводным ЛЗ, подключенным к элементам антенной решетки (так что  $x_{N+1}(t) = x_{N+2}(t) = \dots = x_{2N}(t)$  и  $x_{(J-1)N+1}(t) = x_{(J-1)N+2}(t) = \dots = x_{NJ}(t)$ ). Составляющие шума, поступающие к элементам решетки с других направлений, в вертикальных столбцах отводов ЛЗ имеют, как правило, различные значения. Поэтому для сигнала адаптивный процессор представляет собой одну эквивалентную многоотводную ЛЗ, каждый весовой коэффициент которой равен сумме весовых коэффициентов в соответствующем вертикальном столбце исходного процессора. Эти  $J$  весовых коэффициентов эквивалентной многоотводной ЛЗ должны устанавливаться так, чтобы обеспечивалась требуемая частотная характеристика в заданном направлении. Их задание будет определять  $J$  ограничивающих условий (ограничений). В том случае, когда интересующее нас направление не перпендикулярно линии, вдоль которой расположены элементы решетки, времена задержки в корректирующем пространственном фильтре должны выбираться так, чтобы обеспечить синфазность сигнальных составляющих на выходе предпроцессора.

Адаптивный процессор, представленный на рис. 4.14, имеет  $N$  элементов решетки и  $J$  отводов ЛЗ для каждого элемента и поэтому общее число подстраиваемых весовых коэффициентов равно  $NJ$ . Как отмечалось, для задания частотной характеристики в интересующем нас направлении требуется наложить  $J$  ограничений так, чтобы для минимизации мощности выходного шума осталось  $(NJ - J)$  степеней свободы. Поскольку указанные ограничения фиксируют частотную характеристику в заданном направлении, то минимизация суммарной мощности выходного шума эквивалентна минимизации мощности шума, поступающего с других направлений при условии некоррелированности сигнала и составляющих шума. Если шум коррелирован с сигналом, то часть или все сигнальные составляющие на выходе процессора могут быть подавлены. Указанная ситуация встречается не часто. Коррелированный с сигналом шум появляется при многолучевом распространении сигналов, а также при отражениях от местных предметов в радио- и гидролокаторах.

Для возможности подавления шума необходимо, чтобы шумовые составляющие были коррелированы между собой. Источниками таких шумовых составляющих могут быть атмосферные электрические разряды, передатчики помех, шум транспортных средств, пространственно сосредоточенные пассивные помехи и др. Некоррелированные составляющие шума (например, тепловой шум усилителя) могут быть частично подавлены адаптивной антенной решеткой в результате накопления (суммирования) или уменьшения весовых коэффициентов для элементов, обуславливающих наибольший шум.

#### 4.5.1. Оптимальный весовой вектор при ограничениях

Для получения оптимального весового вектора рассмотрим дискретный вариант аналогового процесса, показанного на рис. 4.14. При этом будем полагать, что напряжения на каждом из отводов появляются в дискретные моменты времени, следующие с интервалом в  $\Delta$  секунд, где для простоты  $\Delta$  считается кратным  $\tau$ . Вектор напряжений на отводах для  $k$ -го момента времени обозначим через

$$\mathbf{x}^T(k) \triangleq [x_1(k\Delta), x_2(k\Delta), \dots, x_{NJ}(k\Delta)]. \quad (4.145)$$

Напряжение на каждом отводе может рассматриваться как сумма сигнала  $s$ , поступившего с заданного направления, и шума  $n$ , поступившего с других направлений, т. е.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (4.146)$$

где  $NJ$ -мерный вектор сигнала есть

$$\mathbf{s}(k) \triangleq \begin{bmatrix} s(k\Delta) \\ \vdots \\ s(k\Delta) \\ s(k\Delta - \tau) \\ \vdots \\ s(k\Delta - \tau) \\ s[k\Delta - (J-1)\tau] \\ \vdots \\ s[k\Delta - (J-1)\tau] \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} s(k\Delta) \\ \vdots \\ s(k\Delta) \end{matrix}} \right\} N \text{ отводов} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} s(k\Delta - \tau) \\ \vdots \\ s(k\Delta - \tau) \end{matrix}} \right\} N \text{ отводов} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} s[k\Delta - (J-1)\tau] \\ \vdots \\ s[k\Delta - (J-1)\tau] \end{matrix}} \right\} N \text{ отводов} \end{array} \right\} \quad (4.147)$$

а вектор шума

$$\mathbf{n}^T(k) \triangleq [n_1(k\Delta), n_2(k\Delta), \dots, n_{NJ}(k\Delta)]. \quad (4.148)$$

Вектор весовых коэффициентов  $\mathbf{w}$  определяется как

$$\mathbf{w}^T \triangleq [w_1, w_2, \dots, w_{NJ}]. \quad (4.149)$$

Предполагаем, что как сигналы, так и шумы являются случайными процессами с нулевым средним и неизвестными статистиками второго порядка. Ковариационные матрицы  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  обозначим следующим образом:

$$E \{\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\} = \mathbf{R}_{xx}, \quad (4.150)$$

$$E \{\mathbf{s}(k) \mathbf{s}^T(k)\} = \mathbf{R}_{ss}, \quad (4.151)$$

$$E \{\mathbf{n}(k) \mathbf{n}^T(k)\} = \mathbf{R}_{nn}. \quad (4.152)$$

Поскольку векторы сигнала и шума, по предположению, не коррелированы между собой, то

$$E \{\mathbf{n}(k) \mathbf{s}^T(k)\} = \mathbf{0}. \quad (4.153)$$

Будем считать также, что для рассматриваемых условий приема сигналов матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$  и  $\mathbf{R}_{nn}$  симметричны и положительно определены.

Выходной сигнал адаптивной решетки (представляющий собой оценку сигнала) в  $k$ -й момент времени определяется как

$$y(k) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}. \quad (4.154)$$

Из выражения (4.154) следует, что математическое ожидание выходной мощности

$$E \{y^2(k)\} = E \{w^T x(k) x^T(k) w\} = w^T R_{xx} w. \quad (4.155)$$

Будем считать теперь, что весовые коэффициенты в  $j$ -м вертикальном столбце отводов удовлетворяют условию

$$c_j^T w = f_j; \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (4.156)$$

где  $NJ$ -мерный вектор  $c_j$  определяется формулой

$$c_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} N \\ \} N \\ \} N \\ \} N \end{array} \right\} j\text{-й столбец, состоящий из } N \text{ элементов.} \quad (4.157)$$

Определим  $J \times NJ$ -матрицу ограничений  $C$  и  $J$ -мерный вектор  $f$  следующим образом:

$$C \triangleq [c_1 \dots c_j \dots c_J], \quad (4.158)$$

$$f \triangleq \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_J \end{bmatrix}, \quad (4.159)$$

где  $c_j$  и  $f_j$  такие же, как в (4.156). Нетрудно видеть, что условие (4.156) можно записать в матричном виде как

$$C^T w = f. \quad (4.160)$$

Задача оптимизации с ограничениями теперь сводится к следующей:

$$\text{минимизировать } w^T R_{xx} w \quad (4.161)$$

$$\text{при условии } C^T w = f. \quad (4.162)$$

Решение этой задачи можно найти методом множителей Лагранжа [25]. Суммируя целевую функцию (4.161) с левой частью уравнения ограничений (4.162), домноженной на  $J$ -мерный вектор неопределенных множителей Лагранжа  $\lambda$  (и вводя для простоты коэффициент 0,5

при целевой функции), сведем задачу оптимизации с ограничениями к следующей задаче без ограничений:

$$\text{минимизировать } \mathfrak{F}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \lambda^T [\mathbf{C}^T \mathbf{w} - \mathbf{f}]. \quad (4.163)$$

Градиент функции Лагранжа  $\mathfrak{F}(\mathbf{w})$  по  $\mathbf{w}$  определяется как

$$\mathbf{V}_w \mathfrak{F}(\mathbf{w}) = \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \mathbf{C} \lambda. \quad (4.164)$$

Необходимым условием минимума (4.163) является равенство нулю градиента, т. е.

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \mathbf{C} \lambda = \mathbf{0}, \quad (4.165)$$

откуда

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = -\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \lambda. \quad (4.166)$$

Остается найти вектор множителей Лагранжа  $\lambda$ . Он может быть получен из уравнения ограничений

$$\mathbf{C}^T \mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{f} = \mathbf{C}^T [-\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \lambda], \quad (4.167)$$

откуда следует, что

$$\lambda = -[\mathbf{C}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}, \quad (4.168)$$

где существование  $[\mathbf{C}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1}$  гарантируется положительной определенностью матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$  и тем, что ранг матрицы  $\mathbf{C}$  равен  $J$ . Объединив (4.166) и (4.168), получим оптимальный весовой вектор:

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}, \quad (4.169)$$

и подставив  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$  в (4.154), запишем

$$y_{\text{опт}}(k) = \mathbf{w}_{\text{опт}}^T \mathbf{x}(k). \quad (4.170)$$

Если вектор  $\mathbf{f}$  выбирается так, что амплитудно-частотная характеристика в заданном направлении постоянна, а фазочастотная — линейна, то выходной сигнал адаптивного процессора, работающего по методу МСКО с ограничениями, является оценкой максимального правдоподобия стационарного процесса в гауссовском шуме (при условии, что направление прихода сигнала известно) [26]. Можно также получить и ряд других оптимальных процессоров, выбирая соответствующим образом вектор  $\mathbf{f}$  [27]. Следует отметить, что решение (4.169) зависит от отклонений действительного направления на источник сигнала от заданного направления, определяемого матрицей  $\mathbf{C}$ , и от случайных вариаций параметров антенной решетки [28].

#### 4.5.2. Алгоритм адаптации

Будем полагать, что корреляционная матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  априорно неизвестна и должна быть определена в процессе обучения адаптивного процессора. При стационарных в процессе обучения, но тем не менее изменяющихся во времени условиях, оценки оптимальных весовых коэффициентов адаптивного процессора должны периодически обновляться. Начальное значение весового вектора должно удовлетворять условию (4.162). Поэтому

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{C} [\mathbf{C}^T \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}, \quad (4.171)$$

где матрица  $\mathbf{C} [\mathbf{C}^T \mathbf{C}]^{-1}$  является псевдообратной матрице  $\mathbf{C}_T$  [29]. После выполнения  $k$ -й итерации градиентных алгоритмов следующее значение весового вектора будет

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \Delta_s \nabla_{\mathbf{w}} \mathfrak{F}[\mathbf{w}(k)] = \\ &= \mathbf{w}(k) - \Delta_s [\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}(k) + \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}(k)], \end{aligned} \quad (4.172)$$

где  $\Delta_s$  — шаговая постоянная, а  $\mathfrak{F}$  — критерий эффективности. Для того чтобы  $\mathbf{w}(k+1)$  удовлетворяло условию (4.160), необходимо выполнение равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \mathbf{C}^T \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{C}^T \{ \mathbf{w}(k) - \\ &- \Delta_s [\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}(k) + \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}(k)] \}; \end{aligned} \quad (4.173)$$

откуда следует, что множитель Лагранжа определяется соотношением

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = -[\mathbf{C}^T \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}(k) - \frac{1}{\Delta_s} [\mathbf{C}^T \mathbf{C}]^{-1} \{ \mathbf{f} - \mathbf{C}^T \mathbf{w}(k) \}. \quad (4.174)$$

Подставив (4.174) в (4.172), получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \Delta_s \{ \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}(k) + \\ &+ \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \{ \mathbf{f} - \mathbf{C}^T \mathbf{w}(k) \}. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Определив  $NJ$ -мерный вектор

$$\mathbf{f} \triangleq \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (4.176)$$

и матрицу размером  $NJ \times NJ$

$$\mathbf{P} \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T, \quad (4.177)$$

перепишем соотношение (4.175) в виде

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{P} [\mathbf{w}(k) - \Delta_s \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}(k)] + \mathbf{f}. \quad (4.178)$$

В реальной системе корреляционная матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  входного сигнала неизвестна, поэтому необходимо получить некоторую оценку этой матрицы для использования ее вместо  $\mathbf{R}_{xx}$  в рекуррентном соотношении (4.178). В качестве оценки  $\mathbf{R}_{xx}$  на  $k$ -м шаге можно взять  $\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)$ . Подставляя эту оценку в (4.178) и учитывая, что  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}(k)$ , получаем алгоритм МСКО с ограничениями в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}(0) &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{P} [\mathbf{w}(k) - \Delta_s \mathbf{y}(k) \mathbf{x}(k)] + \mathbf{f}. \end{aligned} \right\} \quad (4.179)$$

Если требуется обеспечить только единичный коэффициент передачи адаптивной антенной решетки для нормированного входного сигнала, приходящего с заданного направления, то можно обойтись без корректирующего пространственного фильтра, а необходимую компенсацию фазового рассогласования выполнять непосредственно в адаптивном процессоре [30]. Обозначим комплексный коэффициент передачи антенной решетки через  $Y(\theta)$ , где  $\theta$  — угол, отсчитываемый от нормали к плоскости раскрыва решетки. Ограничения, налагаемые на адаптивные весовые коэффициенты, определяются из соотношений  $\text{Re} \{Y(\theta)\} = 1$  и  $\text{Im} \{Y(\theta)\} = 0$ , где  $\theta = \theta_c$  — заданное направление.

### 4.5.3. Условия сходимости к оптимальному решению

Весовой вектор  $w(k)$ , определяемый соотношениями (4.179), является случайным. Сходимость среднего значения весового вектора к оптимальному эквивалентна сходимости разностного вектора (получаемого вычитанием из среднего значения весового вектора оптимального вектора) к нулю.

Запишем рекуррентное соотношение для весового вектора

$$w(k+1) = P[w(k) - \Delta_s x(k) y(k)] + \dot{f}. \quad (4.180)$$

Вычислим математическое ожидание обеих частей (4.180), учитывая, что  $y(k) = x^T(k)w(k)$ ,

$$E[w(k+1)] = P\{E[w(k)] - \Delta_s R_{xx} E[w(k)]\} + \dot{f}. \quad (4.181)$$

Определим разностный вектор

$$v(k+1) \triangleq E[w(k+1)] - w_{\text{опт}}. \quad (4.182)$$

Подставляя (4.181) в (4.182) и учитывая соотношения  $\dot{f} = (I - P) \times \times w_{\text{опт}}$  и  $PR_{xx}w_{\text{опт}} = 0$  [которые вытекают из (4.169) и (4.177)], можно показать, что разностный вектор удовлетворяет уравнению

$$v(k+1) = Pv(k) - \Delta_s PR_{xx}v(k). \quad (4.183)$$

Поскольку матрица  $P$  — идемпотентна (т. е.  $P^2 = P$ ), то, умножив обе части (4.183) на  $P$ , получим  $Pv(k+1) = v(k+1)$  для всех  $k$ . В результате уравнение (4.183) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v(k+1) &= [I - \Delta_s PR_{xx}P] v(k) = \\ &= [I - \Delta_s PR_{xx}P]^{(k+1)} v(0). \end{aligned} \quad (4.184)$$

Из (4.184) следует, что матрица  $PR_{xx}P$  определяет как скорость сходимости среднего значения весового вектора к оптимальному, так и отклонение весового вектора от оптимального в установившемся режиме. Матрица  $PR_{xx}P$  имеет  $J$  нулевых собственных значений (соответственно числу столбцов матрицы ограничений  $C$ ) и  $NJ - J$  ненулевых собственных значений  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, NJ - J$  [31]. Величины  $NJ - J$  ненулевых собственных значений удовлетворяют неравенствам:

$$\lambda_{\min} \leq \sigma_{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_{\max} \leq \lambda_{\max}, \quad (4.185)$$

где  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы  $R_{xx}$ , а  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$  — наименьшее и наибольшее ненулевые собственные значения матрицы  $PR_{xx}P$ .

Начальный разностный вектор  $v(0) = \dot{f} - w_{\text{опт}}$  можно представить в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы  $PR_{xx}P$ , соответствующих ненулевым собственным значениям [31]. Следовательно, если  $v(0)$  просто равен собственному вектору  $e_i$  матрицы  $PR_{xx}P$ , соответствующему ненулевому собственному значению  $\sigma_i$ , то

$$\begin{aligned} v(k+1) &= [I - \Delta_s PR_{xx}P]^{(k+1)} e_i = \\ &= [1 - \Delta_s \sigma_i]^{(k+1)} e_i. \end{aligned} \quad (4.186)$$

Из (4.186) следует, что в направлении собственного вектора матрицы  $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$  среднее весового вектора сходится к оптимальному вектору по закону геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии  $(1 - \Delta_s \sigma_i)$ . Следовательно, время, за которое длина разностного вектора уменьшается до  $1/e$  своего первоначального значения (постоянная времени), будет

$$\tau_i = \frac{\Delta t}{\ln(1 - \Delta_s \sigma_i)} \simeq \frac{\Delta t}{\Delta_s \sigma_i}, \text{ если } \Delta_s \sigma_i \ll 1, \quad (4.187)$$

где  $\Delta t$  — интервал времени, соответствующий одной итерации.

Если шаговая постоянная  $\Delta_s$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < \Delta_s < 1/\sigma_{\max}, \quad (4.188)$$

то длина (норма) для любого значения разностного вектора будет удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} (1 - \Delta_s \sigma_{\max})^{(k+1)} \|\mathbf{v}(0)\| &\leq \|\mathbf{v}(k+1)\| \leq \\ &\leq (1 - \Delta_s \sigma_{\min})^{(k+1)} \|\mathbf{v}(0)\|. \end{aligned} \quad (4.189)$$

Отсюда следует, что при конечной длине начального разностного вектора среднее весового вектора сходится к оптимальному значению, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E\{\mathbf{w}(k)\} - \mathbf{w}_{\text{опт}}\| = 0. \quad (4.190)$$

Алгоритм МСКО предназначен для непрерывной подстройки весовых коэффициентов сигнального процессора в нестационарных условиях. Однако в стационарных условиях эта подстройка приводит к тому, что весовой вектор испытывает нежелательные флуктуации около оптимального значения. Это обуславливает появление дополнительного шума на выходе адаптивной антенной решетки.

Минимальный (оптимальный) уровень шума на выходе определяется соотношением

$$\begin{aligned} E\{y_{\text{опт}}^2(k)\} &= \mathbf{w}_{\text{опт}} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{\text{опт}} = \\ &= \mathbf{f}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (4.191)$$

Дополнительный шум, вызванный флуктуациями весовых коэффициентов, определяет потери, связанные с данным адаптивным алгоритмом (в стационарных условиях). Естественной мерой этих потерь является «рассогласование»  $M$ , определяемое формулой (4.55). Если шаговая постоянная  $\Delta_s$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < \Delta_s < \frac{1}{\sigma_{\max} + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})}, \quad (4.192)$$

то можно показать [32], что для рассогласования в установившемся режиме справедлива неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_s}{2} \frac{\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})}{1 - (\Delta_s/2) [\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}) + 2\sigma_{\min}]} &\leq M \leq \\ &\leq \frac{\Delta_s}{2} \frac{\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})}{1 - (\Delta_s/2) [\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}) + 2\sigma_{\max}]} \end{aligned} \quad (4.193)$$



Если

$$0 < \Delta_s < \frac{2}{3 \operatorname{tr}(\mathbf{R}_{xx})}, \quad (4.194)$$

то условия (4.192) будут автоматически выполняться. Следует также отметить, что верхняя граница в (4.194) может быть рассчитана по принятым данным, поскольку

$$\operatorname{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = E \{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) \} = \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2(k).$$

#### 4.5.4. Геометрическая интерпретация

Алгоритм МСКО с ограничением (4.179) имеет простую геометрическую интерпретацию [24], позволяющую отчетливо увидеть присущее ему свойство коррекции погрешностей, которое заставляет весовой вектор изменяться только так, чтобы не нарушались ограничения. Благодаря этому свойству устраняются даже неизбежные погрешности вычислений, обусловленные операциями округления, усечения или квантования.

При отсутствии погрешностей значения  $NJ$ -мерного весового вектора  $\mathbf{w}$  точно удовлетворяют уравнению ограничения (4.162) и поэтому располагаются на плоскости ограничения  $\Lambda$ , определяемой соотношением

$$\Lambda = \{ \mathbf{w} : \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{f} \}. \quad (4.195)$$

Эта  $(NJ - J)$ -мерная плоскость ограничения может быть условно показана так, как на рис. 4.15.

Любые векторы, направление которых перпендикулярно плоскости ограничения, представляют собой линейные комбинации вектор-столбцов матрицы ограничения  $\mathbf{C}$  и поэтому все имеют форму  $\mathbf{C}\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор, составляющие которого определяют эту линейную комбинацию. Следовательно, начальный весовой вектор в алгоритме (4.179)  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$  ориентирован в направлении, перпендикулярном плоскости ограничения. Кроме того, этот вектор будет соответствовать точке на плоскости ограничения, поскольку  $\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ , т. е.  $\hat{\mathbf{f}}$  будет вектором наименьшей длины, как показано на рис. 4.15.

Положив  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , получим однородную форму уравнения ограничения

$$\mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (4.196)$$

определяющего вторую плоскость [которая также является  $(NJ - J)$ -мерной], проходящую через начало координат и называемую «подпространством ограничений». Эта плоскость также условно показана на рис. 4.15.

Алгоритм МСКО с ограничением (4.179) содержит операцию предварительного умножения вектора  $\mathbf{w}$ -пространства на проекционную матрицу  $\mathbf{P}$ . Операция умножения вектора на матрицу  $\mathbf{P}$  приводит к исключению составляющих вектора, перпендикулярных плоскости

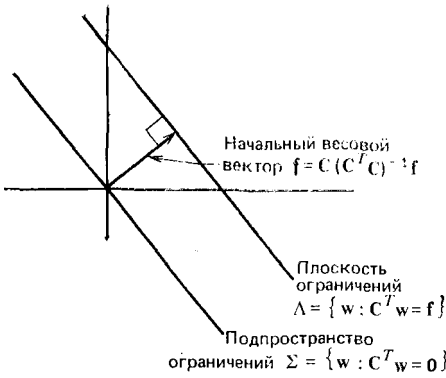


Рис. 4.15. Условное изображение плоскости ограничений, подпространства ограничений и начального весового вектора в  $w$ -пространстве

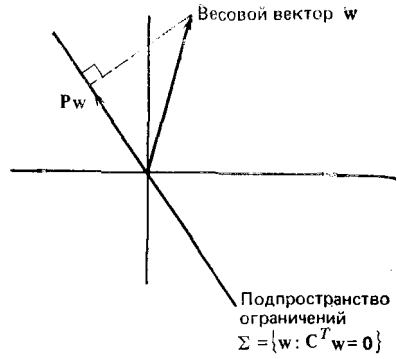


Рис. 4.16. Иллюстрация операции проецирования

$\Sigma$ , тем самым проецируя начальный весовой вектор на подпространство ограничений, как показано на рис. 4.16.

Единственной не рассмотренной составляющей выражения (4.179) является вектор  $y(k) \times(k)$ , представляющий собой оценку градиента критерия эффективности. Напомним, что согласно (4.163) критерий эффективности равен  $\frac{1}{2} w^T R_{xx} w$ , а из (4.164) следует, что градиент имеет вид  $R_{xx} w$ . Поскольку корреляционная матрица  $R_{xx}$  заранее не известна, в алгоритме используется оценка градиента  $y(k) \times(k)$ .

Задача оптимизации с ограничениями, определяемая выражениями (4.161) и (4.162), может быть проиллюстрирована графически в  $w$ -пространстве, как это сделано на рис. 4.17. При этом согласно алгоритму должно производиться перемещение весового вектора по плоскости ограничения  $\Lambda$  от начального значения  $f$  к оптимальному  $w_{\text{опт}}$ . Рассмотрим работу алгоритма МСКО с ограничением (4.179) при решении указанной задачи оптимизации.

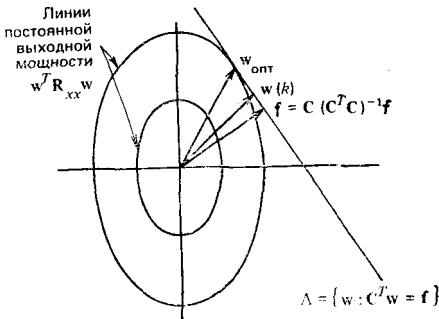


Рис. 4.17. Графическая интерпретация задачи оптимизации с ограничением

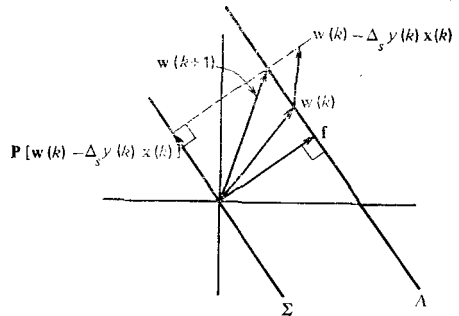


Рис. 4.18. Графическое представление операций алгоритма МСКО с ограничением

Как видно из рис. 4.18, текущее значение весового вектора  $w(k)$  преобразуется путем сложения его с оценкой антиградиента  $-y(k)x(k)$ , умноженной на  $\Delta_s$ . В общем случае в итоге такого преобразования получается новый вектор, лежащий вне плоскости ограничения. Умножение вектора  $[w(k) - \omega_s y(k)x(k)]$  на матрицу  $\mathbf{P}$  дает проекцию на подпространство ограничений. Суммируя вектор  $\hat{f}$  с этой проекцией, получаем новый весовой вектор, лежащий на плоскости ограничения. В результате выполнения указанной процедуры новый весовой вектор  $w(k+1)$  удовлетворяет заданному ограничению с погрешностью, зависящей только от точности выполнения арифметических операций. За счет этого корректирующего свойства алгоритма МСКО с ограничениями можно избежать накопления любых погрешностей.

Свойства сходимости алгоритма МСКО с ограничением близки к рассмотренным ранее свойствам сходимости алгоритма МСКО без ограничений. Аналогичным образом те же процедуры повышения скорости сходимости, которые использовались в алгоритме МСКО без ограничений, могут применяться и в алгоритме МСКО с ограничением.

#### 4.6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Было показано [15], что алгоритм ДНС характеризуется менее благоприятным сочетанием уровня рассогласования и скорости адаптации, чем алгоритм МСКО. Поэтому нужно определить возможности улучшения этого сочетания параметров (по сравнению с алгоритмом МСКО) с помощью ускоренного градиентного алгоритма Пауэлла при заданном распределении собственных значений корреляционной матрицы входного сигнала.

Для того чтобы проанализировать указанные алгоритмы, необходимо выбрать конфигурацию антенной решетки и условия приема сигнала. Геометрические соотношения для антенной решетки и источников полезного сигнала и помех показаны на рис. 4.19. Здесь представлено расположение четырехэлементной Y-образной антенной решетки (с межэлементным расстоянием  $d = 0,787\lambda$ ), источника полезного сигнала (под углом  $0^\circ$ ) и трех точечных источников узкополосных гауссовских помех (под углами  $15^\circ$ ,  $90^\circ$  и  $165^\circ$  соответственно). Корреляционная матрица принимаемого сигнала в этом случае имеет вид

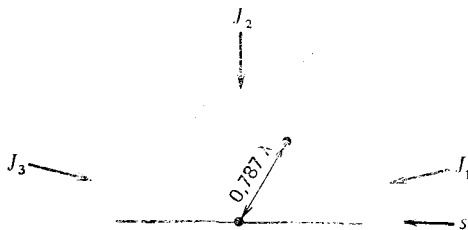


Рис. 4.19. Геометрические соотношения для четырехэлементной Y-образной антенной решетки и расположения источников полезного сигнала и помех

$$\frac{1}{n} \mathbf{R}_{xx} = \frac{s}{n} (\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger) + \sum_{i=1}^3 \frac{J_i}{n} (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\dagger) + \mathbf{I}, \quad (4.197)$$

где  $n$  — мощность собственного (теплового) шума приемника (берется равной единице),  $s/n$  — отношение сигнал-собственный шум приемника;  $J_i/n$  — отношение помеха-собственный шум приемника для каждой из трех помех ( $i = 1, 2, 3$ ). Составляющие опорного сигнального вектора  $\mathbf{u}$  и векторов помех  $\mathbf{v}_i$  определяются геометрией антен-

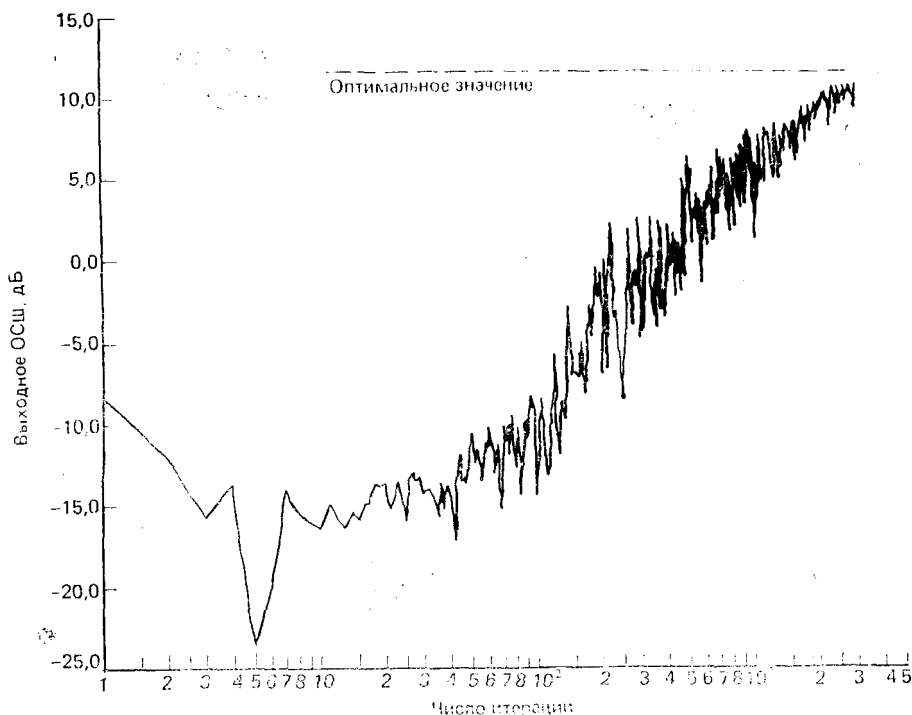


Рис. 4.20. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций в алгоритме МСКО при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=2440$  и  $\alpha_L=0,1$

ной решетки и углами прихода сигналов. Считается, что полезный сигнал является фазоманипулированным и имеет в каждой выборке равновероятно фазовый угол 0 или  $180^\circ$ .

Моделировались две ситуации, соответствующие различным распределениям собственных значений корреляционной матрицы принимаемого сигнала. В первой ситуации разброс собственных значений характеризуется отношением  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ , во второй —  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 16\,700$ . Выбрав отношения помеха-собственный шум приемника  $J_1/n = 500$ ,  $J_2/n = 40$  и  $J_3/n = 200$ , а отношение сигнал-собственный шум приемника  $s/n = 10$ , получим собственные значения  $\lambda_1 = 2,44 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_2 = 4,94 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_3 = 25,62$  и  $\lambda_4 = 1$ , при которых оптимальное выходное ОСШ составляет  $\text{ОСШ}_{\text{опт}} = 15$  (11,7 дБ). Аналогично, выбрав  $J_1/n = 4000$ ,  $J_2/n = 40$ ,  $J_3/n = 400$  и сохранив прежнее  $s/n = 10$ , получим  $\lambda_1 = 1,67 \cdot 10^4$ ,  $\lambda_2 = 10^3$ ,  $\lambda_3 = 29$  и  $\lambda_4 = 1$ , при которых, как и в предыдущем случае,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}} = 15$ . В обеих

ситуациях начальный весовой вектор полагался равным  $\mathbf{w}^T(0) = [0, 1; 0; 0; 0]$ . На рис. 4.20 и 4.21 показаны зависимости выходного ОСШ для алгоритмов МСКО и Пауэлла от числа итераций при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$  (здесь выходное ОСШ означает отношение мощности сигнала к сумме мощностей помехи и собственного шума приемника).

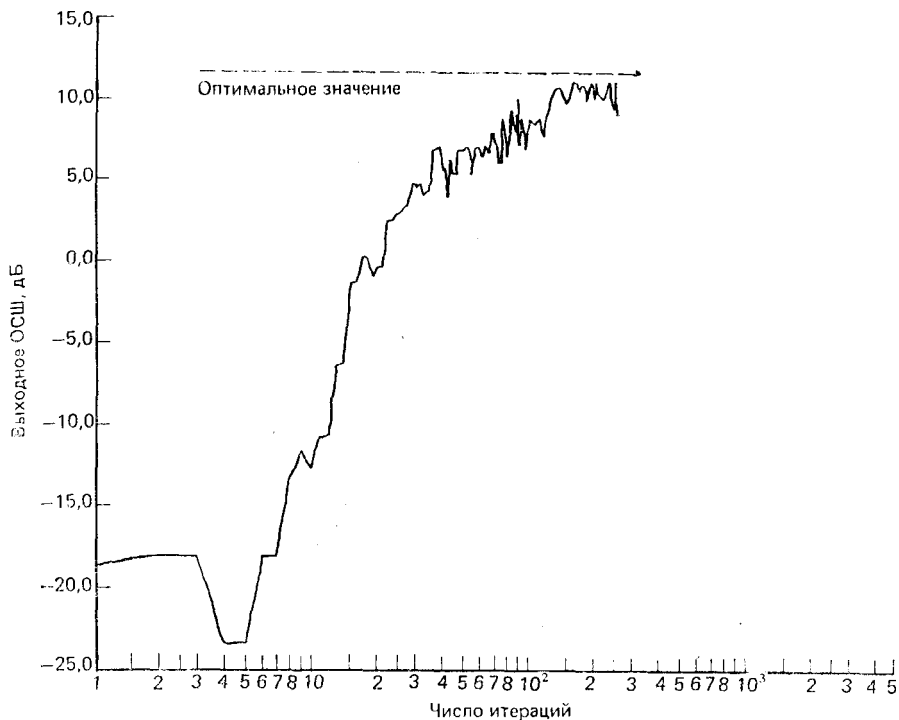


Рис. 4.21. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций в алгоритме Пауэлла при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$  и  $K = 9$

Математическое ожидание градиента и величины  $\mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{v}$ , необходимые для алгоритма Пауэлла, определялись по выборке, содержащей  $K = 9$  отсчетов. Поэтому одна итерация в алгоритме Пауэлла осуществляется один раз на каждые девять отсчетов, даже если на некоторых итерациях не происходила корректировка весового коэффициента. Петлевое усиление в алгоритме МСКО выбиралось в соответствии с условиями (4.49), где для устойчивости требовалось, чтобы  $\Delta_s \operatorname{tr} \mathbf{R}_{(xx)} < 1$ . Обозначим  $\Delta_s \operatorname{tr} (\mathbf{R}_{xx}) = \alpha_L$ . Значение  $\alpha_L = 0,1$  обеспечивает устойчивость системы при сравнительно высокой скорости сходимости и приемлемой погрешности рассогласования. В силу изложенного временной масштаб на рис. 4.21 для алгоритма Пауэлла оказывается в девять раз больше масштаба времени на рис. 4.20. Из рис. 4.21 видно, что при использовании алгоритма Пауэлла уровень ОСШ, лежащий на 3 дБ ниже оптимального, достигается после выполнения примерно

80 итераций (720 выборочных отсчетов), тогда как из рис. 4.20 следует, что для достижения такого же уровня при алгоритме МСКО потребуется примерно 1500 отсчетов. Кроме того, нетрудно видеть, что уровни рассогласования в установившемся режиме для обоих алгоритмов примерно одинаковы, так что в этом примере алгоритм Пауэлла обладает вдвое большей скоростью сходимости, чем алгоритм МСКО.

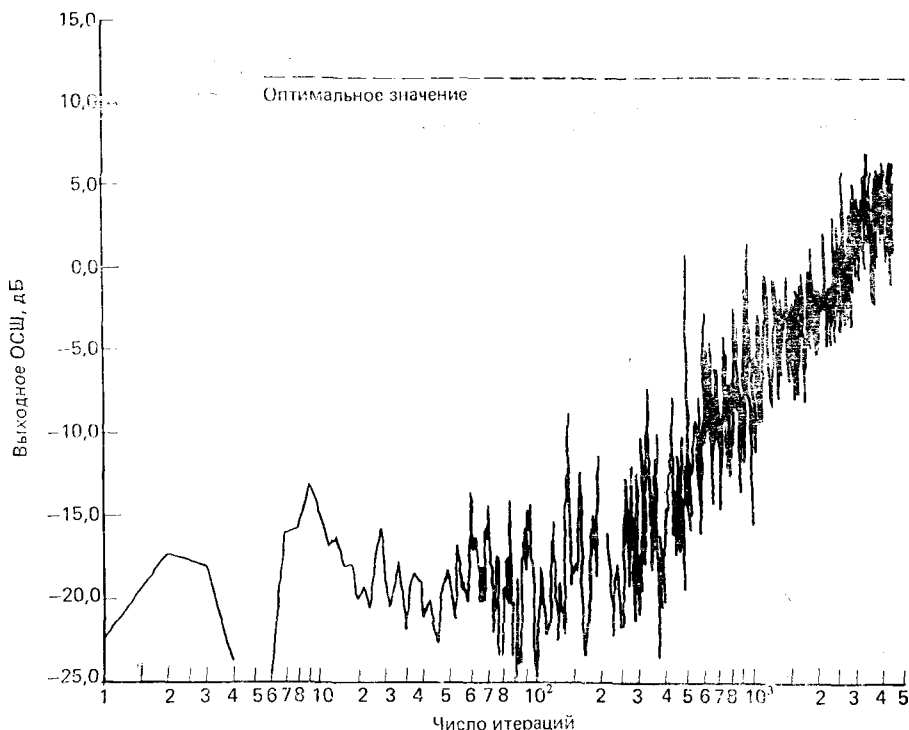


Рис. 4.22. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций в алгоритме МСКО при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$  и  $\alpha_L=0,1$

Результаты моделирования алгоритмов МСКО и Пауэлла для тех же самых параметров, что и на рис. 4.20 и 4.21, но при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$  представлены на рис. 4.22 и 4.23. Как показано на рис. 4.23, алгоритм Пауэлла достигает уровня, лежащего на 3 дБ ниже оптимального значения, после выполнения примерно 200 итераций (1800 выборочных отсчетов). Из рис. 4.22 видно, что при алгоритме МСКО этот уровень не достигается даже после обработки 4500 отсчетов. Таким образом выигрыш в скорости сходимости, обеспечиваемый алгоритмом Пауэлла, возрастает пропорционально разбросу собственных значений.

Однако следует с осторожностью подходить к выводам относительно сходимости, ожидаемой при использовании алгоритма Пауэлла. Представленные здесь результаты моделирования были получены для

антенной решетки, имеющей только четыре элемента. С ростом числа элементов решетки число шагов, которые необходимо будет сделать в направлениях, ортогональных направлению градиента, также возрастает, что приводит к значительным погрешностям на последующих шагах, так как погрешности оценивания накапливаются. Следовательно, для заданного уровня рассогласования постоянная времени кри-

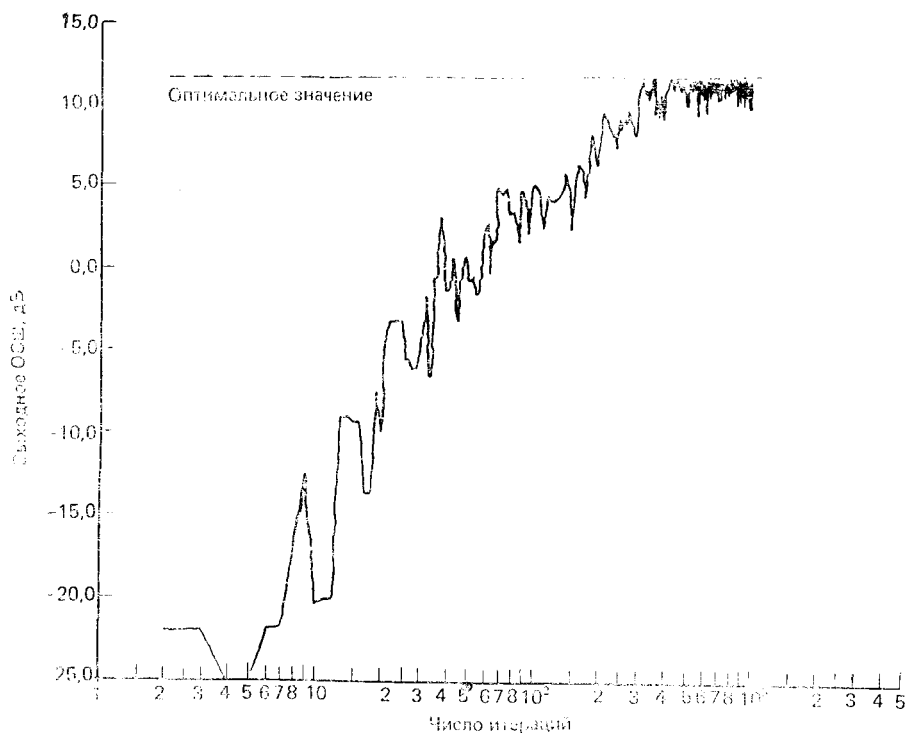


Рис. 4.23. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций в алгоритме Пауэлла при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$  и  $K=9$

вой обучения будет увеличиваться не линейно с ростом  $N$  (как при адаптации по алгоритму МСКО), а значительно быстрее, и это приведет к тому, что при  $N > 10$  алгоритм Пауэлла на самом деле может сходиться медленнее алгоритма МСКО.

#### 4.7. ВЫВОДЫ

Алгоритм МСКО основан на применении метода наискорейшего спуска при использовании в качестве критерия эффективности СКО и служит для получения простой реализации адаптивной антенной решетки, наиболее подходящей для систем связи с непрерывными сигналами. Для реализации алгоритма МСКО необходимо вырабатывать опорный сигнал, который сравнивается с выходным сигналом антен-

ной решетки и используется для получения сигнала ошибки. Этот метод целесообразно применять для адаптивных решеток, когда можно ожидать различий в модуляционных характеристиках полезного сигнала и помехи. Основной частью системы, реализующей алгоритм МСКО с обратной связью, является коррелятор (умножитель), формирующий произведение  $e(t) x_i(t)$ , необходимое для получения оценки градиента. Поэтому в случае  $N$ -элементной антенной решетки при реализации алгоритма МСКО потребуется  $N$  корреляторов для управления каждым элементом.

В некоторых практических приложениях может оказаться нежелательным использование корреляторов, как при алгоритме МСКО. В таких случаях можно использовать алгоритм ДНС, при котором требуется непосредственное измерение критерия эффективности (например, мощности сигнала ошибки, когда критерием эффективности является СКО). По сравнению с алгоритмом МСКО алгоритм ДНС характеризуется менее благоприятным сочетанием уровня рассогласования и скорости адаптации. Оба указанных алгоритма обладают одинаковой чувствительностью скорости сходимости к распределению собственных значений корреляционной матрицы входного сигнала.

Одним из путей уменьшения чувствительности скорости сходимости к разбросу собственных значений является использование ускоренного градиентного метода при условии, что число степеней свободы процессора не очень велико. Был рассмотрен алгоритм, основанный на методе Пауэлла, показавший возможность увеличения скорости сходимости. Однако ускоренные градиентные методы обладают определенными недостатками, связанными с их реализацией. Поэтому могут использоваться и другие методы (обсуждаемые в последующих главах), обладающие малой чувствительностью скорости сходимости к разбросу собственных значений.

В приложениях, связанных с обработкой сигналов больших энергии и длительности, часто бывает желательно ввести ограничение на форму главного лепестка диаграммы направленности решетки, устраняющее возможность искажения в нем из-за помехи. Для этой цели был рассмотрен алгоритм МСКО с ограничениями. В следующей главе приводится еще ряд методов с ограничениями.

## ЗАДАЧИ

1. Рассогласование и скорость адаптации в алгоритмах МСКО и ДНС [15]. Для алгоритма МСКО полное рассогласование в установившемся режиме определяется выражением (4.83), а для алгоритма ДНС — формулой (4.133).

А. Считая все собственные значения корреляционной матрицы входного сигнала одинаковыми так, что  $(T_{рско})_{ср} = T_{ско}$ , постройте зависимость  $T_{ско}$  от  $N$  для алгоритма МСКО при  $N = 2, 4, 8, \dots, 512$  и  $M = 10\%$ .

Б. Полагая, как и в п. А, все собственные значения одинаковыми так, что  $(T_{рско})_{ср} = T_{ско}$ , постройте зависимость  $T_{ско}$  от  $N$  для алгоритма ДНС при  $N = 2, 4, \dots, 512$  и  $(M_{п})_{\min} = 10\%$ . Сравните полученную зависимость с аналогичной зависимостью из п. А.

2. Формирование опорного сигнала для адаптации согласно алгоритму МСКО при использовании поляризационных различий сигналов [33]. При адаптации согласно алгоритму МСКО формируемый опорный сигнал должен быть достаточно сильно коррелирован либо с полезным сигналом, либо с помехой,



чтобы адаптивная система сохраняла полезный сигнал на выходе. Обычно для создания опорного сигнала используются такие характеристики полезного сигнала, как частота, длительность и вид модуляции. Однако если полезный сигнал и помеха различаются по поляризации, то и этот параметр можно учесть при формировании опорного сигнала.

Пусть  $s$  — полезный линейно-поляризованный сигнал, имеющий известный угол поляризации  $\theta$ , а  $n$  — линейно-поляризованный помеха с углом поляризации  $\alpha$  (причем известно лишь, что  $\alpha \neq \theta$ ). Предположим, что эти сигналы по-

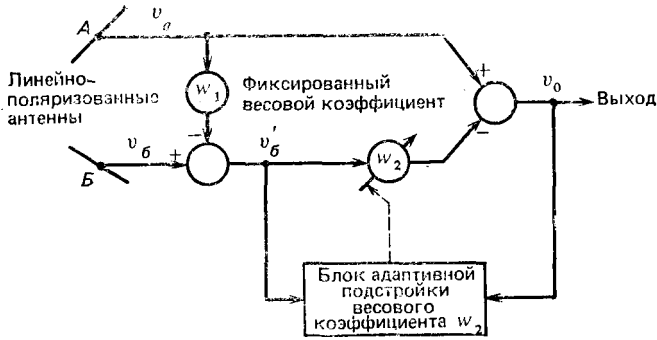


Рис. 4.24. Структурная схема адаптивной антенной решетки с подавлением помехи при использовании поляризационных различий сигнала и помехи. Для адаптации применяется алгоритм МСКО

ступают на две линейно-поляризованные антенны, углы поляризации которых отличаются на  $\beta$  (рис. 4.24). Сигналы на выходах антенн  $v_a$  и  $v_b$  можно представить в виде

$$v_a = s \cos \theta + n \cos \alpha,$$

$$v_b = s \cos (\beta - \theta) + n \cos (\beta - \alpha).$$

А. Покажите, что за счет введения весового коэффициента  $w_1$  (см. рис. 4.24) можно получить сигнал  $v'_b = v_b - w_1 v_a$ , не содержащий полезного сигнала при

$$w_1 = \frac{\cos (\beta - \theta)}{\cos \theta},$$

так что

$$v'_b = n \frac{\sin \beta}{\cos \theta} \sin (\alpha - \theta) = n f (\alpha, \beta, \theta).$$

Б. Используя результат, полученный в п. А, покажите, что  $v_0 = v_a - w_2 v'_b = s \cos \theta + n [\cos \alpha - w_2 f (\alpha, \beta, \theta)]$ .

Поскольку выходной сигнал  $v_0$  содержит составляющие как полезного сигнала, так и помехи, то, вычисляя корреляцию  $v_0$  с составляющей  $v'_b$  (не содержащей полезного сигнала), можно определить уровень помехи, остающейся в выходном сигнале, и затем с помощью подстройки адаптивного весового коэффициента  $w_2$  уменьшить уровень помехи на выходе системы.

В. Погрешность в выходном сигнале  $v_0$  представляет собой составляющую помехи, остающуюся после вычитания  $w_2 v'_b$  из  $v_a$ . Предположим, что полезный сигнал и помеха не коррелированы, тогда

$$E \{v_0^2\} = E \{s^2\} \cos^2 \theta + E \{n^2\} [\cos \alpha - w_2 f (\alpha, \beta, \theta)]^2.$$

Покажите, что если скорость изменения  $\omega_2$  пропорциональна  $\partial \dot{E} \{v_0^2\} / \partial \omega_2$ , то весовой коэффициент в установившемся режиме, когда  $\partial E \{v_0^2\} / \partial \omega_2 = 0$ , будет

$$\omega_2 = \frac{\cos \alpha}{f(\alpha, \beta, \theta)}.$$

Г. Покажите, что выходной сигнал в установившемся режиме будет определяться выражением

$$v_0 = s \cos \theta$$

при значении  $\omega_2$  таком же, как в и. В. Это означает, что в установившемся режиме на выходе системы отсутствует помеха. При получении этого результата предполагается: 1) точное знание угла  $\theta$  и безошибочная (точная) установка весового коэффициента  $\omega_1$ ; 2) отсутствие шума в устройстве; 3) равенство числа входных сигналов числу антенн. Указанные идеальные условия не выполняются на практике; в [33] приводится анализ работы системы в реальных условиях.

**3. Относительная чувствительность процессора, реализующего алгоритм с ограничением, к искажениям формы сигнала, поступающего с заданного направления [28].** Решение задачи минимизации среднего значения выходной мощности антенной решетки  $\eta = E \{w^\dagger x x^\dagger w\}$  при ограничении  $x_0^\dagger w = f$  (или, что эквивалентно,  $\eta = f^2$ ) определяется выражением (4.169). Поскольку  $x_0$  соответствует сигналу с плоским волновым фронтом, приходящему с направления  $\theta_0$ , то процессор, работающий согласно такому алгоритму, может рассматриваться как фильтр, пропускающий плоские волны с направления  $\theta_0$  и подавляющий волны с других направлений.

Пусть сигнал с искаженным волновым фронтом описывается вектором  $x$  с составляющими

$$x_k = A_{k_0} (1 + \alpha_k) \exp [j(\varphi_{k_0} + \xi_k)],$$

где  $\alpha_k$  и  $\xi_k$  характеризуют амплитудные и фазовые отклонения от номинальных значений, соответствующих вектору  $x_0$ . Предположим, что для каждого из элементов антенной решетки  $\alpha_k$ ,  $\xi_k$  являются некоррелированными гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_\alpha^2$ ,  $\sigma_\xi^2$ .

А. Используя выражение  $\eta = w^\dagger E \{x x^\dagger\} w$  и учитывая, что

$$\begin{aligned} E \{x_i x_j^*\} &= x_{i_0} x_{j_0}^* \exp(-\sigma_\xi^2) \text{ при } i \neq j, \\ E \{x_i x_i^*\} &= |x_{i_0}|^2 (1 + \sigma_\alpha^2) \text{ при } i = j, \end{aligned}$$

покажите, что

$$\eta = \exp(-\sigma_\xi^2) w^\dagger x_0 x_0^\dagger w + [1 - \exp(-\sigma_\xi^2 + \sigma_\alpha^2)] w^\dagger w$$

или  $\eta \approx f^2 + (\sigma_\xi^2 + \sigma_\alpha^2) w^\dagger w$  для малых значений  $\sigma_\xi^2$ ,  $\sigma_\alpha^2$  при условии  $|x_{i_0}|^2 = 1$ , которое выполняется для плоской волны.

Б. Результат, полученный в п. А, можно переписать в виде

$$\eta = f^2 [1 + \delta (\sigma_\xi^2 + \sigma_\alpha^2)],$$

где  $\delta \triangleq w^\dagger w / f^2$ .

Поэтому отношение  $\delta$  можно рассматривать как относительную чувствительность процессора к искажениям. Покажите, что при весовых коэффициентах, определяемых (4.169),

$$\delta = \frac{x_0^\dagger R_{xx}^{-2} x_0}{(x_0^\dagger R_{xx}^{-1} x_0)^2}.$$

Относительная чувствительность  $\delta$  может быть большой, если собственные значения  $R_{xx}$  имеют значительный разброс.

## Глава 5. АДАПТИВНЫЙ ПРОЦЕССОР ХАУЭЛСА — АППЕЛЬБАУМА

Способ адаптивного подавления помехи, поступающей по боковым лепесткам диаграммы направленности, реализованный в радиолокационном устройстве, работающем на промежуточной частоте, описан в патенте Хауэлса [1]. Аппельбаум проанализировал указанный подход и разработал теорию управления работой контура адаптивной подстройки для каждого элемента антенной решетки. Алгоритм Аппельбаума максимизирует обобщенное ОСШ в предположении о том, что полезный сигнал отсутствует в течение большей части времени приема (как в импульсных радио- или гидролокационных системах) и направление прихода полезного сигнала известно. Ввиду относительной простоты технической реализации процессор Хауэлса—Аппельбаума широко использовался в радиолокационных системах для подавления помех и отражений от местных предметов [3—6]. Приведенные здесь анализ процессора, максимизирующего ОСШ, и иллюстративные примеры основаны на результатах работы [7]<sup>1</sup>.

### 5.1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Прежде чем приступить к анализу адаптивного процессора Хауэлса—Аппельбаума, максимизирующего ОСШ, представляется целесообразным вначале рассмотреть как предпосылку фазовое сопряжение, а также работу корреляционных интерферометров и интегрирующего RC-фильтра. Ознакомившись с этими вводными представлениями, можно приступить к анализу простой двухэлементной антенной решетки с одним аналоговым адаптивным контуром управления. Изучение характеристик такой наиболее простой системы способствует пониманию принципа действия многоэлементной адаптивной антенной решетки и позволяет проанализировать влияние изменяющихся параметров на ее эффективность. Для простоты изложения будут рассматриваться аналоговые устройства, однако в сложных системах зачастую оказывается более предпочтительной цифровая обработка.

#### 5.1.1. Фазовое сопряжение

В адаптивных антенных решетках пространственная фильтрация заключается в автоматическом определении направления прихода сигнала от источника помехи, формировании дополнительной диаграммы направленности с максимумом в этом направлении и последующем вычитании сформированной диаграммы из исходной. Данный способ формирования нуля результирующей диаграммы в направлении на источник помехи иллюстрируется графиками на рис. 5.1. При этом максимум дополнительной диаграммы при приеме автоматически ориентируется в направлении на источник помехи. Для формирования до-

<sup>1</sup> Здесь частично использован перевод данной статьи, опубликованный ранее в журнале ТИИЭР. (Прим. перев.)

полнительной диаграммы направленности необходимо задержать сигнала с выхода каждого элемента решетки так, чтобы обеспечивалось одновременное появление принятого сигнала на выходах всех элементов задержки. Поскольку время задержки для узкополосных сигналов эквивалентно фазовому сдвигу (с точностью до  $\pm 2\pi$ ), то устройства задержки можно заменить фазовращателями, причем фазовый сдвиг,

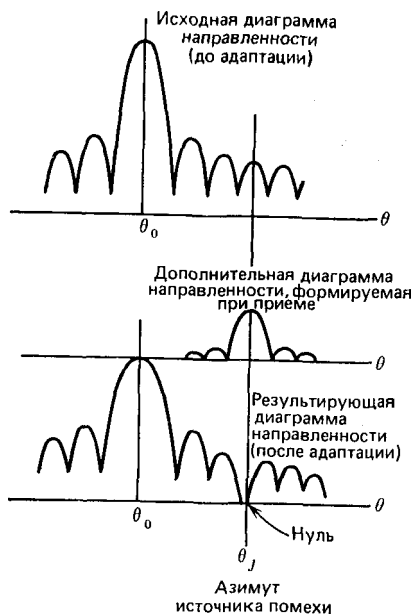


Рис. 5.1. Графики, иллюстрирующие способ формирования диаграммы направленности адаптивной антенной решетки при одном источнике помехи с использованием дополнительной диаграммы направленности [7]

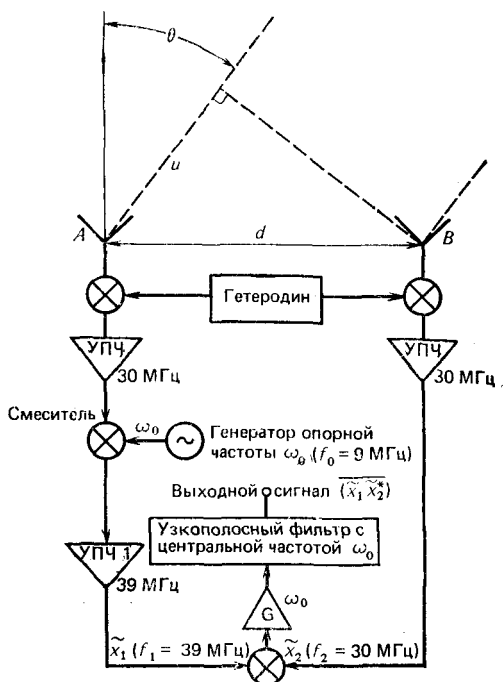


Рис. 5.2. Функциональная схема корреляционного интерферометра [7]

обеспечиваемый на выходе каждого элемента решетки, должен быть равен фазе принимаемого этим элементом сигнала, взятой с обратным знаком. Это условие будет в дальнейшем называться условием фазового сопряжения.

Как известно [8], необходимое фазовое сопряжение можно легко получить с помощью смесителя. При этом, если на выходе смесителя выделяется сигнал разностной частоты, то частота опорного синусоидального сигнала (создаваемого гетеродином) должна быть выше частоты принимаемого сигнала или равна ей.

### 5.1.2. Корреляционный интерферометр

В адаптивной антенной решетке с процессором Хауэлса—Аппельбаума значения весовых коэффициентов, необходимые для обеспечения фазового сопряжения (с целью формирования дополнительной приемной

диаграммы), находятся в результате взаимной корреляционной обработки опорного сигнала и выходных сигналов элементов решетки. В качестве опорного сигнала может быть выбран выходной сигнал как отдельной антенны, так и всей антенной решетки, в которой находится регулируемый элемент. В каждом из этих случаев принцип работы устройства оказывается таким же, как и в корреляционном интерферометре [9, 10], схема которого показана на рис. 5.2. Далее будет показано, как с помощью корреляционного интерферометра может быть извлечена информация, необходимая для получения фазового сопряжения с принимаемым сигналом.

Пусть одиночный точечный источник, расположенный под углом  $\theta$  относительно нормали к раскрытию антенной системы, излучает сигнал, волновой фронт которого поступает на антенны  $A$  и  $B$  с разностью фаз  $u$  (см. рис. 5.2). Эта разность фаз определяется выражением

$$u = (2\pi d/\lambda) \sin \theta, \quad (5.1)$$

где  $d$  — расстояние между фазовыми центрами антенн;  $\lambda$  — длина волны принимаемого сигнала. Высокочастотные (ВЧ) сигналы с выходов антенн  $A$  и  $B$  преобразуются в сигналы более низкой и удобной для обработки промежуточной частоты (ПЧ) с помощью двух смесителей, на которые подается сигнал от общего гетеродина. После преобразования сигналы на ПЧ имеют те же амплитудно-фазовые соотношения, что и исходные ВЧ сигналы. Если комплексный сигнал антенны  $B$  на ПЧ обозначить через  $\tilde{x}_2$ , то его вещественная часть может быть записана в виде

$$x_2 = b \cos (\omega t - u), \quad (5.2)$$

где  $b$  — амплитуда принятого сигнала;  $\omega$  — промежуточная частота;  $u$  — опережение по фазе сигнала антенны  $B$  относительно сигнала антенны  $A$ . Комплексный сигнал антенны  $A$  (на ПЧ) преобразуется в сигнал высокой промежуточной частоты с помощью второго смесителя, на который подается также сигнал генератора опорной частоты  $\omega_0$ . За счет второго преобразования частоты удается избежать трудностей, которые возникли бы в дальнейшем в связи с необходимостью выделения постоянной составляющей малого уровня, балансировки усилителя постоянного тока и устранения фликер-шума. Вещественную часть комплексного сигнала  $\tilde{x}_1$  на выходе второго смесителя можно представить в виде

$$x_1 = a \cos [(\omega + \omega_0) t + \varphi_0], \quad (5.3)$$

где  $a$  — амплитуда сигнала антенны  $A$ ;  $\omega + \omega_0$  — вторая промежуточная частота;  $\varphi_0$  — постоянный фазовый сдвиг генератора частоты  $\omega_0$ .

Сигналы  $x_1$  и  $x_2$ , как показано на рис. 5.2, подаются на оконечный смеситель, на выходе которого выделяется сигнал разностной частоты  $\omega_0$ . Таким образом, выходной сигнал оконечного смесителя может рассматриваться как вещественная часть произведения  $\tilde{x}_1$  на комплексно-сопряженное значение  $\tilde{x}_2^*$ , т. е.

$$\text{выходной сигнал смесителя} = \text{Re} \{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^* \} = \frac{ab}{2} \cos (\omega_0 t + \varphi_0 - u). \quad (5.4)$$

Следовательно, оконечный смеситель формирует взаимную корреляционную функцию сигналов, принятых антеннами  $A$  и  $B$  на частоте несущей  $\omega_0$ <sup>1)</sup>. При этом амплитуда выходного сигнала смесителя пропорциональна произведению амплитуд входных сигналов ( $a$  и  $b$ ), а фаза (с точностью до постоянной  $\varphi_0$ ) равна разности фаз  $u$  этих сигналов.

Выходной сигнал оконечного смесителя усиливается полосовым усилителем (с центральной частотой  $\omega_0$  и большим коэффициентом усиления  $G$ ), после чего для увеличения ОСШ интегрируется узкополосным фильтром с высокой добротностью  $Q$ . Огибающая выходного сигнала фильтра может быть представлена в виде

$$\text{выходной сигнал фильтра} = \int_t^{t+\tau} \text{Re} \{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^* \} dt. \quad (5.5)$$

Таким образом, на выходе корреляционного интерферометра, показанного на рис. 5.2, формируется комплексный сигнал на опорной частоте  $\omega_0$ . Амплитуда этого комплексного сигнала пропорциональна произведению амплитуд сигналов, принятых антеннами  $A$  и  $B$ , а фаза, равная разности фаз  $u$  этих сигналов, является сопряженной с фазой сигнала, принятого антенной  $B$  (относительно антенны  $A$ ). Следовательно, выходной сигнал корреляционного интерферометра содержит информацию, необходимую для формирования адаптивных весовых коэффициентов дополнительной диаграммы с максимумом в направлении на источник сигнала.

### 5.1.3. Интегрирующий фильтр

Интегрирующий фильтр, включенный на выходе адаптивной антенной решетки, показанной на рис. 5.2, должен обладать очень высокой фазовой стабильностью, а также регулируемой постоянной времени. Эти требования делают более предпочтительным вариант построения схемы с разложением высокочастотного сигнала на синфазную  $I$  и квадратурную  $Q$  составляющие, которые в дальнейшем обрабатываются в фазовых каналах и сглаживаются с помощью простых  $RC$ -фильтров, как показано в схеме на рис. 5.3. Биполярные видеосигналы  $I$  и  $Q$  могут использоваться для модуляции гармонического колебания частоты  $\omega_0$  (в биполярных умножителях) для получения комплексного весового коэффициента  $\tilde{\omega}$  на опорной частоте  $\omega_0$ .

Будем полагать, что в качестве интегрирующего фильтра служит простая  $RC$ -цепь, схема которой показана на рис. 5.4. Дифференциальное уравнение, описывающее такую цепь, имеет вид

$$C \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{R} = \frac{v}{R} \quad (5.6)$$

или

$$\tau_0 \frac{d\omega}{dt} + \omega = v, \quad (5.7)$$

<sup>1)</sup> Точнее, взаимная корреляционная функция сигналов антенн будет формироваться на выходе интегрирующего фильтра, включенного после смесителя. (Прим. ред.)

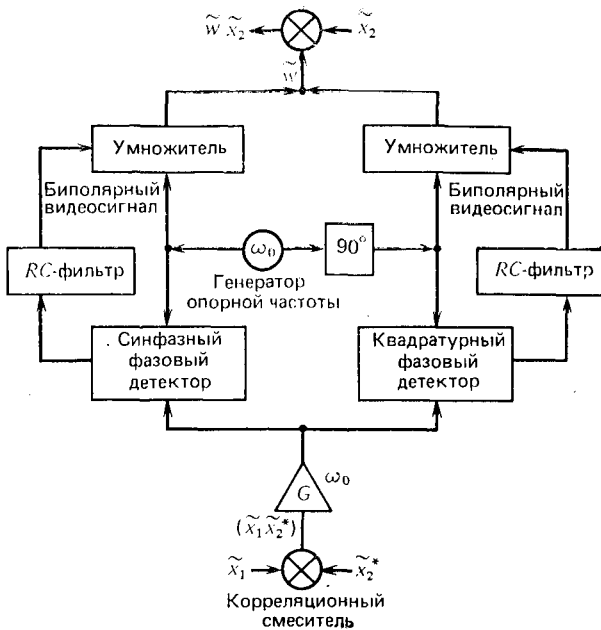


Рис. 5.3. Структурная схема узкополосного фильтра, реализованного с помощью интегрирующих  $RC$ -фильтров в синфазном и квадратурном каналах [7]

где  $\tau_0 = RC$  — постоянная времени, а  $v$  — входное напряжение в виде ступенчатой функции

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ v_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Применив к (5.7) преобразование Лапласа, получим

$$\tau_0 s w(s) - \tau_0 w(0+) + w(s) = v_0/s, \quad (5.9)$$

откуда

$$w(s) = \frac{w(0+)}{s + \alpha_0} + \frac{\alpha_0 v_0}{s(s + \alpha_0)}, \quad (5.10)$$

где  $\alpha_0 = 1/\tau_0$ ,  $w(0+)$  — начальное значение выходного напряжения  $w$  в момент времени  $t = 0+$ . Вычислив обратное преобразование Лапласа для (5.10), получим

$$w(t) = w(0+) e^{-\alpha_0 t} + v_0 (1 - e^{-\alpha_0 t}) \quad (5.11)$$

или

$$w(t) = [w(0+) - v_0] e^{-\alpha_0 t} + v_0. \quad (5.12)$$

Поскольку рассмотренная операция в  $RC$ -фильтре осуществляется в обоих квадратурных ( $I$  и  $Q$ ) каналах (рис. 5.4), то выраже-

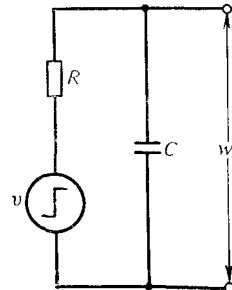


Рис. 5.4. Схема простого интегрирующего  $RC$ -фильтра [7]

ние (5.12) можно переписать с учетом комплексных величин  $\tilde{w}$  и  $\tilde{v}_0$  в следующем виде:

$$\tilde{w}(t) = [\tilde{w}(0+) - \tilde{v}_0] e^{-\alpha_0 t} + \tilde{v}_0. \quad (5.13)$$

Уравнение (5.13) описывает переходный процесс изменения комплексного весового коэффициента  $\tilde{w}$ . Знак  $\sim$ , обозначающий комплексную величину, в дальнейшем не используется, так как (если это не оговорено специально) будет считаться, что все рассматриваемые величины представляются их комплексными огибающими.

## 5.2. ДВУХЭЛЕМЕНТНАЯ АНТЕННАЯ РЕШЕТКА С ОДНИМ КОНТУРОМ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Простейшая адаптивная решетка, которая будет рассматриваться в этом разделе, является двухэлементной с одним контуром адаптивной подстройки Хауэлса—Аппельбаума (рис. 5.5). Структура контура адаптивного управления схемы на рис. 5.5 подобна структуре кон-

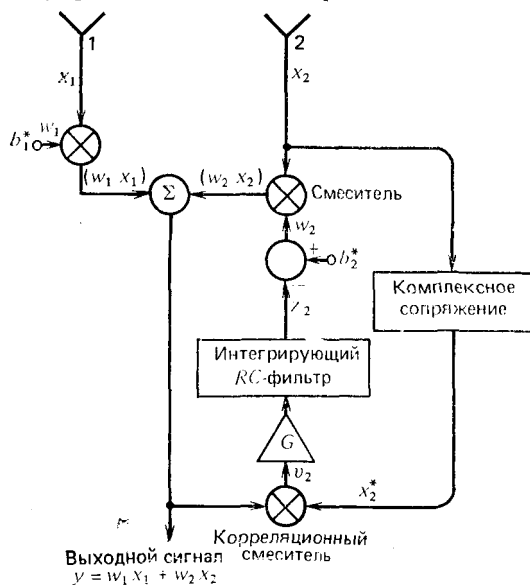


Рис. 5.5. Структурная схема двухэлементной антенной решетки с одним контуром адаптации Хауэлса — Аппельбаума [7]

тура управления компенсатора помех, действующих по боковым лепесткам (КБЛ), описанного в [1], за исключением того, что в рассматриваемой схеме сигнал управления диаграммой направленности  $b_2^*$  вводится в контур так, как предложено в работе [2]. Отметим, что устройство, схема которого приведена на рис. 5.5, содержит корреляционный интерферометр (см. рис. 5.2). Представляется целесообразным сравнить контур адаптации в схеме на рис. 5.5 с аналоговой реализацией



алгоритма МСКО, схема которой приведена на рис. 4.6. Нетрудно видеть, что по своей структуре эти два контура адаптации довольно похожи. В контуре адаптации Хауэлса—Апельбаума вместо интегратора обычно используется фильтр нижних частот. Кроме того, в контуре адаптации методом МСКО сигнал управления («полезный опорный сигнал») вводится до корреляционного смесителя, тогда как в схеме с контуром адаптации Хауэлса—Апельбаума подобный сигнал («сигнал управления диаграммой») вводится после корреляционного смесителя. В разд. 5.3.1 определено соотношение, которому должны удовлетворять сигналы управления при использовании алгоритмов адаптации МСКО и максимума ОСШ (МСШ), чтобы обеспечивались одинаковые изменения весового вектора. Поскольку схемы контуров адаптации рассматриваемых алгоритмов незначительно отличаются друг от друга, то не удивительно, что их характеристики будут также похожи. Тем не менее будет полезно проанализировать характеристики схемы на рис. 5.5 в условиях, когда полезный сигнал отсутствует. В этом случае условия работы отличаются от условий, рассмотренных при анализе алгоритма МСКО. Кроме того, здесь рассматривается аналоговый вариант алгоритма адаптации МСКО в отличие от дискретного варианта, рассмотренного ранее.

Весовой коэффициент  $\omega_1$  первого элемента решетки не подстраивается, а устанавливается равным соответствующему значению сигнала управления диаграммой  $b_1^*$ . Весовой коэффициент  $\omega_2$  второго элемента решетки является адаптивным и равен разности между сигналом управления диаграммой  $b_2^*$  и выходным сигналом  $z_2$  интегрирующего  $RC$ -фильтра. Сигналы элементов решетки, умноженные на соответствующие весовые коэффициенты, суммируются, формируя выходной сигнал решетки ( $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$ ), который также подается на корреляционный смеситель, осуществляющий операцию взаимной корреляции этого сигнала с сигналом  $x_2^*$ . Схема на рис. 5.5 ведет себя так, как система управления с отрицательной обратной связью: соответствие между такой моделью и схемой на рис. 5.5 можно установить на основе более детального рассмотрения сигналов и характера их обработки.

Следует заметить, что показанная на рис. 5.5 схема построена при некоторых упрощающих предположениях, которые помогают сконцентрировать основное внимание на важных характеристиках системы, не останавливаясь на несущественных деталях. Предполагается, что все сигналы представляются их комплексными огибающими. Кроме того, в схеме на рис. 5.5 не показаны присутствующие в реальной системе гетеродин, усилители промежуточной частоты и полосовые фильтры. Сигналы управления диаграммой  $b_1^*$  и  $b_2^*$  вводятся на некоторой опорной частоте  $\omega_0$ , однако общий множитель  $\exp(j\omega_0 t)$  отсутствует как не представляющий интереса для дальнейшего анализа.

Назначением сигналов  $b_1^*$  и  $b_2^*$  является управление приемной диаграммой так, чтобы ее максимум был ориентирован в заданном азимутальном направлении  $\theta_0$  (это эквивалентно предположению о том, что направление прихода полезного сигнала известно). При стационарных условиях (когда полезный сигнал отсутствует и имеется только соб-

ственный шум приемника) адаптивный весовой коэффициент  $\omega_2$  имеет некоторое стационарное значение, обозначаемое через  $\omega_q$ . Значения  $\omega_1$  и  $\omega_q$  должны быть такими, чтобы обеспечивалась ориентация максимума диаграммы в направлении  $\theta_0$ . В качестве опорной точки для отсчета фазы выберем центр симметрии двухэлементной антенной решетки с межэлементным расстоянием  $d$ . Тогда с учетом обозначений на рис. 5.2 и в (5.1)  $\omega_1$  и  $\omega_q$  можно выбрать в виде весовых коэффициентов с единичными амплитудами, соответствующими заданному направлению  $\theta_0$ , т. е.

$$\omega_1 = e^{ju_0}, \quad (5.14)$$

$$\omega_q = \omega_1^* = e^{-ju_0}, \quad (5.15)$$

где

$$u_0 = (\pi d/\lambda) \sin \theta_0. \quad (5.16)$$

С помощью полученных весовых коэффициентов формируется стационарная диаграмма направленности  $G_q(\theta)$ , определяемая выражением

$$G_q(\theta) = \frac{1}{2} [e^{j(u-u_0)} + e^{-j(u-u_0)}] = \cos(u-u_0), \quad (5.17)$$

где

$$u = (\pi d/\lambda) \sin \theta, \quad (5.18)$$

$\theta$  — азимутальная координата в дальней зоне. Теперь значение  $b_1^*$  устанавливается просто равным  $\omega_1$ , а значение  $b_2^*$  должно быть пропорциональным  $\omega_q$  с коэффициентом пропорциональности  $c_2$  (его значение определяется далее) так, чтобы

$$b_2^* = c_2 \omega_q = c_2 e^{-ju_0}. \quad (5.19)$$

Пусть сигналы элементов решетки  $x_1$  и  $x_2$  состоят из собственного шума каналов  $n_1$  и  $n_2$  и статистически не зависимых сигналов  $J_i$  источника узкополосной помехи, расположенного под углом  $\theta_i$ . Предположим также, что изменение помехи характеризуется ступенчатой функцией, что эквивалентно «включению» источника помехи в момент времени  $t = 0$ . Тогда сигналы элементов антенной решетки будут определяться выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= n_1 \\ x_2 &= n_2 \end{aligned} \right\} \text{при } t < 0 \text{ (без помехи),} \quad (5.20)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= n_1 + J_i e^{-ju_i} \\ x_2 &= n_2 + J_i e^{ju_i} \end{aligned} \right\} \text{при } t > 0, \quad (5.21)$$

где

$$u_i = (\pi d/\lambda) \sin \theta_i. \quad (5.22)$$

Адаптивный весовой коэффициент  $\omega_2$  будет определяться как

$$\omega_2 = b_2^* - z_2, \quad (5.23)$$

где  $z_2$  — напряжение на выходе коррелятора. Коррелятор состоит из смесителя, усилителя и интегрирующего (сглаживающего) фильтра. Для анализа переходных процессов в корреляторе можно воспользоваться подходом, предложенным в разд. 5.1.3 применительно к  $RC$ -фильтру. Будем считать, что входное напряжение имеет вид ступенчатой функции. Тогда уравнение (5.7) для выходного сигнала  $z_2$  и входного сигнала  $Gv_2$  будет иметь вид

$$\tau_0 \frac{dz_2}{dt} + z_2 = Gv_2, \quad (5.24)$$

где  $G$  — коэффициент усиления усилителя;  $v_2$  — выходной сигнал смесителя. Выходной сигнал смесителя равен

$$v_2 = k^2 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) x_2^*, \quad (5.25)$$

где  $k$  — постоянная преобразования смесителя. Из (5.25) видно, что любые быстрые изменения сигналов  $x_1$  и  $x_2$  приведут к столь же быстрым изменениям величины  $v_2$  (насколько позволит ширина полосы пропускания приемного канала). Поэтому для сигналов  $x_1$  и  $x_2$  с огибающей в виде ступенчатой функции, определяемых (5.20) и (5.21), время нарастания  $v_2$  приближенно равно величине, обратной ширине полосы приемного канала. Таким образом, для того чтобы  $v_2$  можно было считать ступенчатой функцией для  $RC$ -фильтра, полоса пропускания этого фильтра не должна превышать 10 % от полосы пропускания приемного канала. Это соотношение между полосами пропускания  $RC$ -фильтра и приемного канала будет более подробно рассмотрено далее при обсуждении модели следящей системы с замкнутой петлей обратной связи.

Подставляя (5.25) и (5.23) в (5.24), можно записать уравнение для выходного сигнала фильтра в следующем виде:

$$\tau_0 \frac{dz_2}{dt} + z_2 [1 + k^2 G |\bar{x}_2|^2] = k^2 G |\bar{x}_2|^2 \left[ b_2^* + \frac{\omega_1 (\bar{x}_1 x_2^*)}{|\bar{x}_2|^2} \right]. \quad (5.26)$$

Решение дифференциального уравнения (5.26) имеет вид, аналогичный выражению (5.12):

$$z_2(t) = [z_2(0+) - z_2(\infty)] e^{-\alpha t} + z_2(\infty), \quad (5.27)$$

где

$$z_2(\infty) = \frac{k^2 G |\bar{x}_2|^2 \{ b_2^* + [\omega_1 (\bar{x}_1 x_2^*) / |\bar{x}_2|^2] \}}{1 + k^2 G |\bar{x}_2|^2}; \quad (5.28)$$

$$\alpha = (1 + k^2 G |\bar{x}_2|^2) / \tau_0. \quad (5.29)$$

В выражениях (5.26)—(5.29) чертой сверху обозначена операция интегрирования (усреднения) огибающих сигналов в соответствии с полосой пропускания фильтра при замкнутой цепи обратной связи. Величина  $z_2(0+)$  определяет начальное значение выходного напряжения фильтра  $z_2(t)$  в момент времени  $t = 0+$ , а величина  $z_2(\infty)$  — значение выходного напряжения фильтра в установившемся режиме после затухания переходного процесса. Полученное решение для  $z_2(t)$  можно подставить в (5.23) и определить весовой коэффициент  $\omega_2(t)$ .

Оптимальным значением весового коэффициента  $\omega_{2\text{опт}}$  будем считать такое значение  $\omega_2$ , при котором минимизируется мощность шума на выходе решетки. Выходной шум решетки представляет собой сумму собственного шума канала и внешней помехи, умноженных на весовые коэффициенты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Если выходное шумовое напряжение решетки обозначить через  $y_n$ , то средний квадрат этого напряжения будет определяться выражением

$$\overline{|y_n|^2} = \overline{(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)^2}. \quad (5.30)$$

Приравняв частную производную (5.30) по  $\omega_2$  нулю, получим оптимальное значение, обеспечивающее минимизацию (5.30):

$$\omega_{2\text{опт}} = -\frac{\overline{(\omega_1 x_1) x_2^*}}{\overline{|x_2|^2}} = -\frac{\omega_1 \overline{(x_1 x_2^*)}}{\overline{|x_2|^2}}. \quad (5.31)$$

Обращаясь к материалам разд. 5.1.1, можно заметить, что  $\omega_{2\text{опт}}$  является (нормированным) значением весового коэффициента, при котором в адаптивной диаграмме формируется нуль в направлении на источник внешней помехи.

Сравнивая (5.28) и (5.31), нетрудно заметить, что выражение для установившегося значения напряжения на выходе коррелятора  $z_2(\infty)$  можно переписать в виде

$$z_2(\infty) = \frac{k^2 G \overline{|x_2|^2} (b_2^* - \omega_{2\text{опт}})}{1 + k^2 G \overline{|x_2|^2}}. \quad (5.32)$$

### 5.2.1. Модель для контура адаптивного управления

Оказывается, что характеристики контура адаптивного управления, показанного на рис. 5.5, аналогичны характеристикам следящей системы 0-типа, приведенной на рис. 5.6, а. Соответствие характеристик следящей системы 0-типа и адаптивного контура Хауэлса—Аппельбаума может быть установлено на основе рассмотрения уравнений, описывающих эти устройства. Прежде всего отметим, что следящая система 0-типа с обратной связью всегда устойчива. Используя такой же подход, как и при анализе переходного процесса в интегрирующем

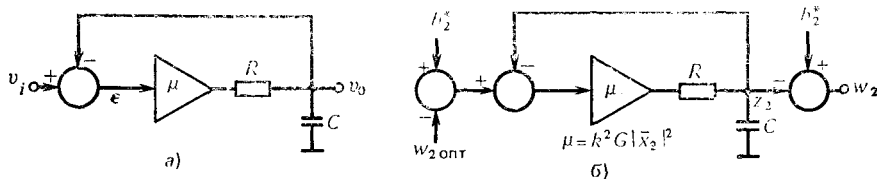


Рис. 5.6. Схемы для анализа одиночного контура адаптивной подстройки: а — следящая система 0-типа; б — модель эквивалентной следящей системы для контура Хауэлса — Аппельбаума [7]

RC-фильтре, к следящей системе 0-типа, можно записать дифференциальное уравнение для такой системы в виде

$$\tau_0 \frac{dv_0}{dt} + v_0 = \mu \varepsilon = \mu (v_i - v_0) \quad (5.33)$$

или

$$\tau_0 \frac{dv_0}{dt} + (1 + \mu) v_0 = \mu v_i, \quad (5.34)$$

где  $\mu \varepsilon = \mu (v_i - v_0)$  — входное напряжение;  $v_0$  — выходное напряжение. Если  $v_i$  — ступенчатая функция, то решение полученного уравнения будет иметь вид

$$v_0 = \left[ v_0(0+) - \left( \frac{\mu v_i}{1 + \mu} \right) \right] e^{-\alpha t} + \frac{\mu v_i}{1 + \mu}, \quad (5.35)$$

где

$$\alpha = \frac{1 + \mu}{\tau_0}. \quad (5.36)$$

Сравнивая (5.34)—(5.36) с (5.26), (5.27) и (5.29), нетрудно заметить соответствия между

$$v_0 \text{ и } z_2; \mu \text{ и } k^2 G |\bar{v}_2|^2; v_i \text{ и } (b_2^* - \omega_{2\text{опт}}).$$

На основе указанного соответствия в качестве модели для контура адаптации в схеме на рис. 5.5 можно воспользоваться эквивалентной схемой на рис. 5.6, б. Тогда выражение для  $z_2(\infty)$  будет иметь вид

$$z_2(\infty) = \frac{\mu}{1 + \mu} (b_2^* - \omega_{2\text{опт}}), \quad (5.37)$$

где

$$\mu = k^2 G |\bar{x}_2|^2. \quad (5.38)$$

Подход с использованием эквивалентной следящей системы оказывается довольно наглядным, так как позволяет продемонстрировать взаимосвязь между значением оптимального весового коэффициента  $\omega_{2\text{опт}}$ , коэффициентом передачи  $\mu$  контура адаптации и степенью приближения действительной величины  $\omega_2(t)$  к оптимальной. В установившемся режиме при  $\mu \gg 1$   $\omega_2 = \omega_{2\text{опт}}$ . Следует иметь в виду, что коэффициент передачи усилителя в эквивалентной следящей системе рис. 5.6, б, определяемый (5.38), пропорционален среднему уровню мощности сигнала второго элемента антенной решетки. Из такой зависимости следуют два важных вывода:

1) минимальное значение  $\mu$  должно соответствовать мощности собственного шума приемника;

2) максимальное значение  $\mu$  должно соответствовать наибольшей мощности помехи, принятой элементами решетки.

Поскольку минимальный уровень сигнала  $x_2$  равен напряжению собственного шума приемника  $n_2$  на выходе смесителей, то

$$\mu_{\min} = k^2 G |\bar{n}_2|^2. \quad (5.39)$$

Поэтому, выбирая соответствующее значение коэффициента усиления  $G$ , можно установить любой требуемый уровень  $\mu_{\min}$ .

Величина  $k^2 |\bar{n}_2|^2$  в (5.39), представляющая собой выходное напряжение смесителя, обусловленное только шумом  $n_2$ , пропорциональна мощности шума. Необходимо обеспечить такое предварительное усиление, чтобы это напряжение превосходило напряжение собственного шума самого смесителя.

Уровень собственного шума приемника  $n_2$  влияет также на значение сигнала управления диаграммой  $b_2^*$ . В этом можно убедиться, подставив (5.37) в (5.23). Тогда

$$\omega_2(\infty) = b_2^* - \frac{\mu}{1 + \mu} (b_2^* - \omega_{2\text{опт}}). \quad (5.40)$$

При отсутствии внешних помех  $x_1 = n_1$  и  $x_2 = n_2$ . Поскольку эти шумовые напряжения являются статистически независимыми, то их взаимная корреляционная функция равна нулю, т. е.

$$E \{n_1 n_2^*\} = 0, \quad (5.41)$$

и, как видно из (5.31), величина  $\omega_{2\text{опт}}$  при этом будет равна нулю. К тому же при стационарных условиях  $\mu = \mu_{\min}$  и значение  $\omega_2(\infty)$  в установившемся режиме будет определяться выражением

$$\omega_2(\infty) = \frac{1}{1 + \mu_{\min}} b_2^* = \frac{c_2}{1 + \mu_{\min}} \omega_q. \quad (5.42)$$

Так как в установившемся режиме  $\omega_2 = \omega_q$ , то из (5.42) можно получить следующее соотношение:

$$c_2 = 1 + \mu_{\min}. \quad (5.43)$$

Поскольку при стационарных условиях уровень шума  $n_2$  определяет величину  $\mu_{\min}$ , то, как видно из (5.43), он будет определять также и  $c_2$ , а следовательно, и значение сигнала  $b_2^*$ .

Рассмотрим теперь, как влияет на параметр  $\mu$  уровень мощности помехи, принимаемой элементами антенной решетки, для того чтобы определить значение  $\mu_{\max}$ . Из выражений (5.36) и (5.38) следует, что с увеличением мощности помехи отношение

$$\frac{\text{постоянная времени отклика}}{\text{постоянная времени интегрирования}} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (5.44)$$

уменьшается. Это приводит к тому, что эквивалентная постоянная времени интегрирования для входных сигналов будет уменьшаться и, в конце концов, перестанут выполняться условия, при которых было получено решение дифференциального уравнения (5.26).

По мере того как отношение (5.44) уменьшается и ухудшается усредняющее действие интегрирующего фильтра, на значения  $\mu$  и  $\omega_2$  начинают оказывать влияние быстрые флуктуации огибающих выходных сигналов элементов решетки, вызывая шумоподобные флуктуации весового коэффициента  $\omega_2$ . В разд. 5.3.2 рассмотрено влияние шума в цепи управления и приведены выражения для дисперсии весовых коэффициентов и уровня дополнительного шума на выходе решетки,

обусловленного флуктуациями весовых коэффициентов. Целесообразно рассмотреть условия, при которых можно пренебречь влиянием шума в контуре управления.

Для того чтобы значения  $\mu$  и  $\omega_2$  не зависели от флуктуаций огибающих сигналов, двухсторонняя полоса пропускания интегрирующего фильтра при замкнутом контуре управления не должна превышать примерно 0,1 полосы пропускания каналов отдельных элементов решетки. При этом условии время интегрирования будет достаточным для усреднения любых быстрых флуктуаций параметра  $\mu$ , что обеспечит статистическую независимость  $\omega_2$  от любых мгновенных флуктуаций огибающих сигналов. В простой следящей системе (рис. 5.6) полоса пропускания замкнутого контура управления (фильтра) равна  $\alpha$ . Если полосу пропускания канала для сигнала отдельного элемента решетки обозначить через  $B_c$ , то указанное ограничение можно записать в виде

$$2\alpha_{\max} \leq \frac{1}{10} 2\pi B_c \quad (5.45)$$

или, учитывая (5.36),

$$\mu_{\max} \leq \frac{\pi B_c \tau_0}{10} - 1, \quad (5.46)$$

где  $\mu_{\max}$  — максимально допустимый коэффициент передачи контура управления.

Параметр  $\mu$  целесообразно выразить через  $\mu_{\min}$  и отношение мощностей. Предварительно заметим, что при наличии помехи

$$|\bar{x}_2|^2 = |\bar{n}_2|^2 + |\bar{J}_i|^2. \quad (5.47)$$

С учетом выражения (5.38) для  $\mu$  можно записать

$$\frac{\mu}{\mu_{\min}} = \frac{k^2 G |\bar{x}_2|^2}{k^2 G |\bar{n}_2|^2} = \frac{|\bar{n}_2|^2 + |\bar{J}_i|^2}{|\bar{n}_2|^2} = 1 + \frac{|\bar{J}_i|^2}{|\bar{n}_2|^2}. \quad (5.48)$$

Если через  $PR_i$  обозначить отношение квадратов амплитуд напряжений в (5.48), которое можно назвать отношением помеха-собственный шум приемника по мощности, то  $\mu$  можно представить в виде

$$\mu = \mu_{\min} (1 + PR_i). \quad (5.49)$$

Подставив (5.49) в (5.46), получим

$$\mu_{\max} = \mu_{\min} (1 + PR_{i_{\max}}) \leq \frac{\pi B_c \tau_0}{10} - 1 \quad (5.50)$$

или

$$\tau_0 \geq \frac{10}{\pi B_c} [1 + \mu_{\min} (1 + PR_{i_{\max}})]. \quad (5.51)$$

Выражение (5.51) определяет соотношение между постоянной времени  $\tau_0$  интегрирующего фильтра и максимальной мощностью принимаемого сигнала помехи, так как полоса пропускания  $B_c$  канала обычно имеет определенную ширину и не изменяется. Рассмотрим в качестве

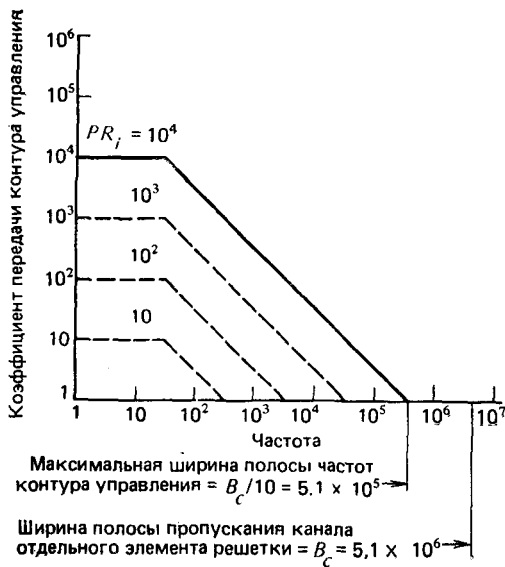


Рис. 5.7. Диаграммы Бode, иллюстрирующие зависимость ширины полосы пропускания контура управления от уровня мощности входного сигнала [7]

пропускания контура управления определяется точкой пересечения соответствующей диаграммы Бode с осью абсцисс.

При анализе характеристик системы адаптивного управления были введены параметры  $\mu$ ,  $\mu_{\min}$ ,  $PR_i$  и  $PR_{i\max}$ . Имеет смысл записать выражения для  $\omega_2(t)$  и  $\omega_{2\text{онт}}$ , используя эти параметры. Из (5.27) получим

$$\omega_2(t) = [\omega_2(0+) - \omega_2(\infty)]e^{-at} + \omega_2(\infty). \quad (5.52)$$

Аналогично из (5.23) следует, что

$$\omega_2(\infty) = b_2^* - z_2(\infty). \quad (5.53)$$

Подставив (5.37) в (5.53), получим

$$\omega_2(\infty) = \frac{1}{1+\mu} b_2^* + \frac{\mu}{1+\mu} \omega_{2\text{онт}}. \quad (5.54)$$

Отметим, что согласно (5.54) в установившемся режиме величина  $\omega_2$  состоит из двух составляющих:

$$\text{управляемая составляющая} = \frac{b_2^*}{1+\mu}, \quad (5.55)$$

$$\text{адаптивная составляющая} = \frac{\mu}{1+\mu} \omega_{2\text{онт}}. \quad (5.56)$$

примера случай, когда максимальный уровень помехи на 40 дБ превышает уровень собственного шума приемника и полосы пропускания  $B_c = 50$  МГц. При  $\mu_{\min} = 1$  из выражения (5.51) получим  $\tau_0 \geq 6,37 \cdot 10^{-3}$  с. Полоса пропускания фильтра, соответствующая  $\tau_0$ , равна  $(1/2\pi\tau_0)$  и составляет примерно 25 Гц.

Связь между коэффициентом передачи контура управления и шириной его полосы пропускания проще всего показать с помощью диаграмм Бode [11], приведенных на рис. 5.7, где показана зависимость коэффициента передачи от частоты. Как видно из графиков, излом линий с наклоном 20 дБ/декада происходит на частоте  $\omega = 1/\tau_0$ , соответствующей граничной частоте полосы пропускания RC-фильтра. Ширина полосы



Поскольку  $b_2^* = (1 + \mu_{\min})\omega_q = (1 + \mu_{\min})\omega_1^*$ , управляемую составляющую можно представить в виде

$$\text{управляемая составляющая} = \frac{1 + \mu_{\min}}{1 + \mu} \omega_1^*. \quad (5.57)$$

Согласно (5.31)

$$\omega_{2\text{опт}} = -\frac{\omega_1 (\overline{x_1 x_2^*})}{|\overline{x_2}|^2}, \quad (5.58)$$

тогда с учетом (5.21) можно записать, что

$$\overline{x_1 x_2^*} = |\overline{J_i}|^2 e^{-i2u_i}, \quad (5.59)$$

так как  $n_1$  и  $n_2$  — независимые случайные процессы с нулевым средним. С учетом соотношений

$$PR_i \triangleq |\overline{J_i}|^2 / |\overline{n_2}|^2, \quad 1 + PR_i = \mu / \mu_{\min}$$

выражение для  $\omega_{2\text{опт}}$  примет вид

$$\omega_{2\text{опт}} = -\omega_1 \left( \frac{\mu_{\min}}{\mu} \right) PR_i e^{-i2u_i}, \quad (5.60)$$

где величина  $u_i$  определяется (5.22). Тогда

$$\alpha = \frac{1 + \mu}{\tau_0}, \quad \mu = \mu_{\min} (1 + PR_i). \quad (5.61)$$

Полученные результаты показывают, что когда  $PR_i$  близко к нулю, то  $\omega_{2\text{опт}}$  также близок к нулю и управляемая составляющая является преобладающей. Аналогично по мере увеличения  $PR_i$  значение  $\mu$  также возрастает, что приводит к уменьшению управляемой составляющей и увеличению адаптивной. При больших значениях отношения  $PR_i$ , когда  $\mu \gg 1$ , управляемая составляющая  $\omega_2(\infty)$  становится пренебрежимо малой и основной вклад в формирование весового коэффициента  $\omega_2$  вносит адаптивная составляющая.

## 5.2.2. Иллюстративный пример. Определение характеристик системы адаптивного управления

Для иллюстрации понятий, введенных в предыдущем разделе, будет полезно рассмотреть характеристики двухэлементной адаптивной антенной решетки, схема которой показана на рис. 5.5, при определенных условиях приема сигналов. Полученные результаты помогут определить наиболее важные характеристики системы и их зависимость от выбираемых параметров и условий приема сигнала.

**Начальные условия и допущения.** Согласно (5.20) предполагается, что в стационарных условиях присутствует только собственный шум приемника, а в момент времени  $t = 0$  включается источник узкополосной помехи (процесс включения описывается ступенчатой функцией). Отношение мощности помехи к мощности собственного шума приемника  $PR_i = 40$  дБ. Для полосы пропускания канала шириной  $B_c = 5$  МГц и минимального значения коэффициента передачи в контуре управления  $\mu_{\min} = 1$  постоянная времени интегрирующего фильтра  $\tau_0 = 6,37 \cdot 10^{-3}$  с.

Предположим, что оба элемента решетки являются ненаправленными и расположены на расстоянии  $d = \lambda/2$ . Это допущение приводит к упрощению вы-

ражений (5.16), (5.18) и (5.22), определяющих значения  $\omega_0$ ,  $u$  и  $u_i$  соответственно. Начальное значение  $\omega_2$  ( $\omega_q$ ) соответствует направлению на источник полезного сигнала с  $\theta_0 = 0$ .

**Изменение весового коэффициента  $\omega_2$  в процессе адаптации.** Изменение весового коэффициента  $\omega_2$  в процессе адаптации характеризуется выражениями (5.52) — (5.61) с учетом указанных ранее предположений и начальных условий.

Переходный процесс установления  $\omega_2$  будет зависеть от двух факторов: 1) от отношения помеха-собственный шум  $PR_i$ , которое входит в формулы как для  $\mu$ , так и для  $\omega_{2\text{опт}}$  и 2) от требуемого угла поворота фазы  $\omega_2$  при адаптации, что является менее очевидным. Графики, иллюстрирующие типичный процесс установления  $\omega_2$ , показаны на рис. 5.8. При этом предполагается, что имеется

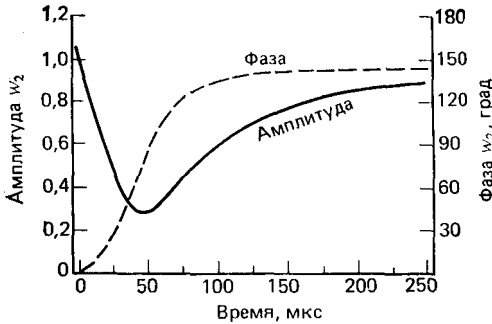


Рис. 5.8. Изменение весового коэффициента  $\omega_2$  в процессе адаптации при  $PR_i = 100$ ,  $\theta_i = 10^\circ$  и  $\theta_0 = 0$  [7]

один источник помехи, расположенный под углом  $\theta_i = 10^\circ$  относительно нормали к оси решетки, и отношение помеха-собственный шум  $PR_i = 100$ . В этом примере фаза  $\omega_2$  должна в течение переходного процесса измениться на  $148^\circ$  для достижения  $\omega_2 = \omega_2(\infty)$ . Если источник помехи переместить из положения  $\theta_i = 10^\circ$  в положение  $\theta_i = 90^\circ$ , где находится нуль диаграммы направленности в стационарном режиме, то  $\omega_2(0+)$  будет совпадать со значением  $\omega_{2\text{опт}}$  и переходный процесс будет отсутствовать. Изменение отношения помеха-собственный шум  $PR_i$  приводит лишь к изменению скорости переходного процесса. Так, если в рассмотренном примере отношение  $PR_i$  увеличивается от

100 до 1000, то форма кривых на рис. 5.8 сохраняется, однако временной масштаб уменьшается в 10 раз. Таким образом, увеличение мощности помехи в 10 раз приводит к десятикратному уменьшению длительности переходного процесса при подстройке весового коэффициента  $\omega_2$ .

**Изменение диаграммы направленности антенной решетки в процессе адаптации.** Изменение формы диаграммы направленности двухэлементной решетки в процессе ее адаптивной подстройки можно легко оценить, фиксируя значения весового коэффициента  $\omega_2$  в определенные моменты времени и вычисляя результирующие диаграммы (в виде выходного напряжения решетки  $y$ ), соответствующие этим моментам времени. Диаграмма направленности прямо пропорциональна  $|y|$  и при графическом изображении ее для удобства, как правило, нормируют к максимальному значению  $y$ . Диаграмма направленности может быть представлена в виде

$$G(\theta, t) = \frac{1}{2} [\omega_1 e^{-iu} + \omega_2(t) e^{iu}]. \quad (5.62)$$

Графики функции  $G(\theta, t)$  в различные моменты времени  $t$  и в установившемся режиме представлены на рис. 5.9. На каждом из рисунков показана также исходная диаграмма, соответствующая стационарному состоянию при  $t = 0$ . Приведенная последовательность графиков демонстрирует постепенное формирование адаптивной диаграммы с нулем в направлении на источник помехи с  $\theta_i = 15^\circ$ .

**Изменение мощности шума на выходе антенной решетки в процессе адаптации.** Конечной целью при использовании алгоритма Хауэлса-Аппельбаума является увеличение выходного ОСШ по сравнению с выходным ОСШ в обычной решетке, работающей в той же помеховой ситуации. Уровень сигнальной составляющей при вычислении ОСШ можно легко определить, зная диаграмму  $G(\theta, t)$ . Мощность шума на выходе решетки оказывает наибольшее влияние на выходное

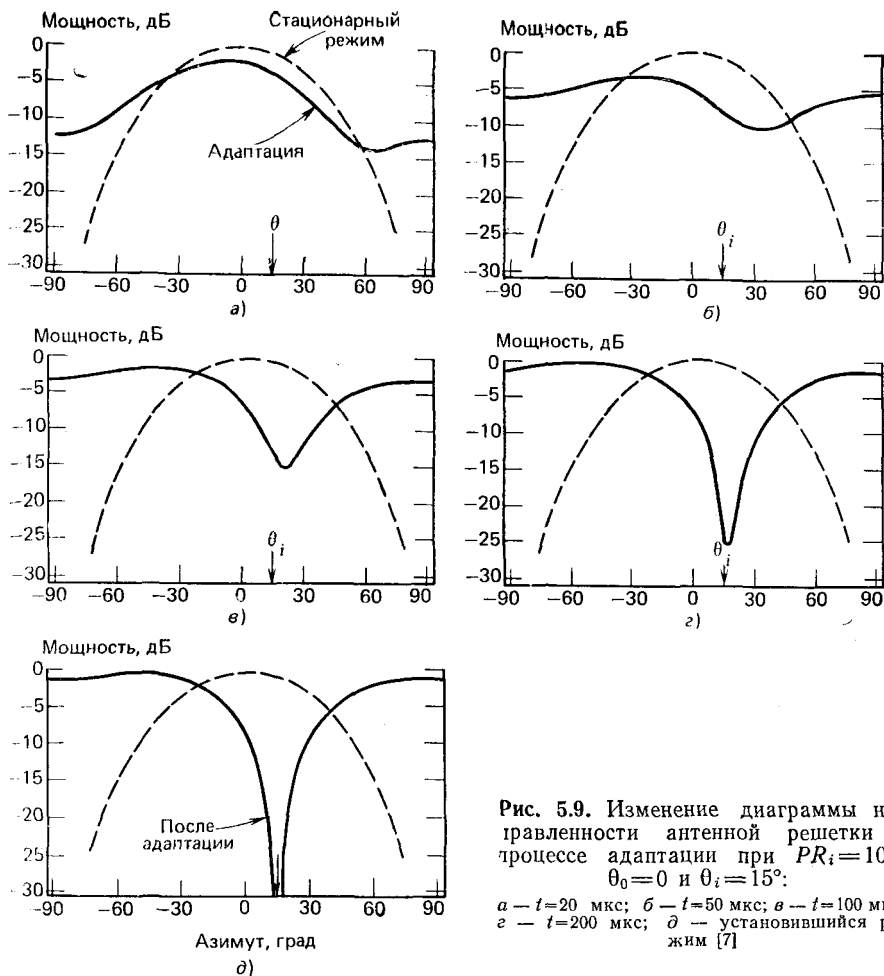


Рис. 5.9. Изменение диаграммы направленности антенной решетки в процессе адаптации при  $PR_i = 100$ ,  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_i = 15^\circ$ :

а —  $t = 20$  мкс; б —  $t = 50$  мкс; в —  $t = 100$  мкс; г —  $t = 200$  мкс; д — установившийся режим [7]

ОСШ и поэтому часто используется в качестве самостоятельной меры эффективности.

Мощность выходного шума представляет собой сумму мощностей собственного шума приемника и помехи. Согласно выражениям (5.21), определяющим сигналы  $x_1$  и  $x_2$ , напряжение выходного шума можно записать как

$$y_n = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + J_i [\omega_1 e^{-j\theta_i} + \omega_2 e^{j\theta_i}]. \quad (5.63)$$

Поскольку  $n_1$  и  $n_2$  являются независимыми составляющими собственного шума приемных каналов, то среднее квадратическое отклонение  $(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)$  равно  $\sqrt{|\omega_1 n_1|^2 + |\omega_2 n_2|^2}$ . Выражение под знаком корня можно упростить, если учесть, что средние квадратические значения амплитуд  $n_1$  и  $n_2$  одинаковы, а амплитуды  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $0 +$ ) являются единичными:

$$|n_2| \sqrt{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2} \Big|_{t=0} = \sqrt{2} |n_2|. \quad (5.64)$$

Увеличение мощности выходного шума, обусловленное включением источника помехи, равно отношению квадрата амплитуды напряжения  $y_n$  к квадрату напряжения выходного собственного шума приемника до ее включения, т. е.

$$\frac{|y_n|^2}{2|n_2|^2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + |\omega_2|^2 + \frac{|J_i|^2}{|n_2|^2} \left| \omega_1 e^{-j\alpha_i} + \omega_2 e^{-j\alpha_i} \right|^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + |\omega_2|^2 + PR_i \left| \omega_1 e^{-j\alpha_i} + \omega_2 e^{j\alpha_i} \right|^2 \right]. \quad (5.65)$$

Графики зависимости отношения (5.65) от времени, иллюстрирующие изменение мощности выходного шума после включения источника помехи в момент времени  $t = 0$ , приведены на рис. 5.10. Эти графики показывают сильную зависимость скорости переходного процесса от отношения  $PR_i$ .

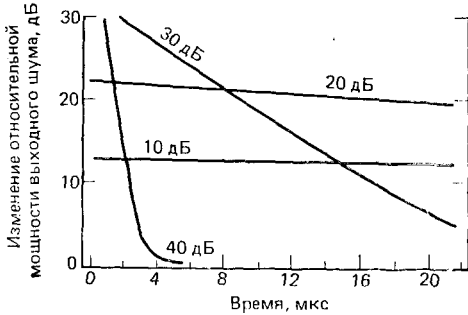


Рис. 5.10. Изменение мощности выходного шума в процессе адаптации при  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_i = 15^\circ$  и  $PR_i = 10, 20, 30$  и  $40$  дБ [7]

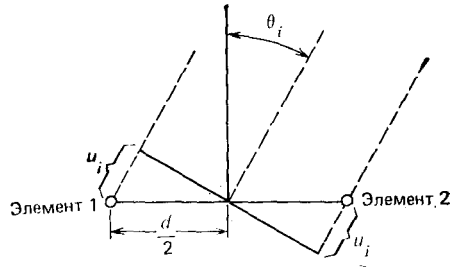


Рис. 5.11. Геометрические соотношения для определения разности хода лучей в двухэлементной антенной решетке [7]

**Влияние ширины полосы частот помехи.** Ширина полосы частот помехи влияет на характеристики адаптивной антенной решетки, поскольку последние являются частотно-зависимыми. В любой момент времени адаптивный весовой коэффициент  $\omega_2$  характеризуется определенными значениями амплитуды и фазы. Задержка (или опережение) приходящего сигнала по фазе в одном элементе решетки по отношению к другому зависит от фактического расстояния, определяемого разностью путей прохождения сигналов, как показано на рис. 5.11. Величина  $u_i$  отсчитывается относительно фазового центра решетки. Для заданной длины волны  $\lambda$  значение  $u_i$  определяется по формуле (5.22). При этом предполагается, что межэлементное расстояние  $d = \lambda/2$ . Теперь же

$$d = \lambda_0/2, \quad (5.66)$$

где  $\lambda_0$  соответствует центральной частоте  $f_0$  полосы частот помехи. Для сигнала с другим значением  $\lambda$  получим

$$u_i = \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\pi}{2} \sin \theta_i = \frac{f}{f_0} \frac{\pi}{2} \sin \theta_i. \quad (5.67)$$

Частоту  $f$  можно представить в виде суммы центральной частоты  $f_0$  и некоторой расстройки  $\Delta f$ , при этом

$$u_i = \left( 1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right) \frac{\pi}{2} \sin \theta_i. \quad (5.68)$$

Полученное соотношение для  $u_i$  зависит от частоты. Представим теперь широкополосную помеху в виде ряда дискретных спектральных линий, равномерно распределенных по шкале частот. При этом  $m$ -й спектральной линии соответст-

ует расстройка по частоте  $\Delta f_m$ , амплитуда напряжения на смесителях составляет  $J_m$  и отношение помеха-собственный шум —  $PR_m$ . Для вычислений удобно считать, что спектр помехи является равномерным, как показано на рис. 5.12. Будем считать также, что отдельные спектральные составляющие не коррелированы друг с другом. Полагая, что общее число спектральных линий равно  $M$ , выражения (5.21), определяющие сигналы элементов  $x_1$  и  $x_2$ , примут вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= n_1 + \sum_{m=1}^M J_m e^{-j\omega_m t} \\ x_2 &= n_2 + \sum_{m=1}^M J_m e^{j\omega_m t} \end{aligned} \right\} \text{при } t \geq 0. \quad (5.69)$$

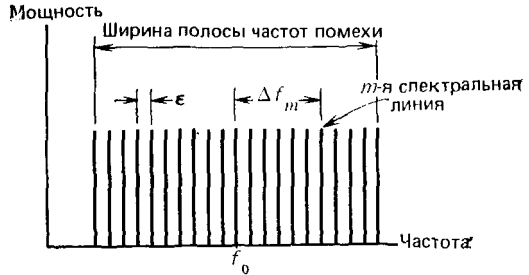


Рис. 5.12. Спектр помехи [7]

Учитывая, что между отдельными составляющими сигналов в (5.69) корреляция отсутствует, можно записать, что

$$\overline{(x_1 x_2^*)} = \sum_{m=1}^M |\overline{J_m}|^2 e^{-j2\omega_m t}. \quad (5.70)$$

Тогда из (5.58) и (5.60) получим

$$\omega_{2\text{опт}} = -\frac{\omega_1 \overline{(x_1 x_2^*)}}{|\overline{x_2}|^2} = -\omega_1 \frac{\mu \text{min}}{\mu} \sum_{m=1}^M PR_m e^{-j2\omega_m t}. \quad (5.71)$$

Заметим, что выражение для параметра  $\mu$  остается таким же, как и в (5.61), где величина  $PR_i$  является суммой отношений помеха-собственный шум приемника для всех спектральных составляющих, т. е.  $PR_i = \sum_m PR_m$ .

Несмотря на то, что весовой коэффициент  $\omega_{2\text{опт}}$  в (5.71) является оптимальным, для отдельных спектральных линий он не оптимален, поскольку теперь каждая спектральная линия имеет свой фазовый сдвиг  $2\omega_m t$  и результирующий весовой вектор получается суммированием его отдельных составляющих. Поэтому  $\omega_{2\text{опт}}$  характеризует адаптацию по «центру тяжести» спектра мощности помехи, а не по его отдельным составляющим.

Увеличение выходной мощности шума, наблюдаемое при включении источника помехи, по аналогии с (5.65) можно представить в виде отношения

$$\frac{|y_n|^2}{2|n_2|^2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + |\omega_2|^2 + \sum_{m=1}^M PR_m |(\omega_1 e^{-j\omega_m t} + \omega_2 e^{j\omega_m t})|^2 \right]. \quad (5.72)$$

Как видно из (5.72), выходная мощность шума содержит сумму мощностей некомпенсированных остатков отдельных спектральных составляющих широкополосной помехи.

Графики зависимости отношения (5.72) от ширины полосы частот помехи представлены на рис. 5.13. На рисунке показаны также зависимости фазы установившегося значения весового коэффициента  $\omega_2$  и мощности выходного шума до адаптации. По оси абсцисс отложены значения относительной ширины полосы частот помехи в процентах. При этом расстояние между соседними спектральными линиями равно 0,2%. Например, в начале координат, где присутствует только одна спектральная линия, отношение помеха-собственный шум приемника наибольшее и составляет  $PR_i = 2000$ . В результате адаптации весовой коэффициент  $\omega_2(\infty)$  в установившемся режиме принимает такое значение, при котором

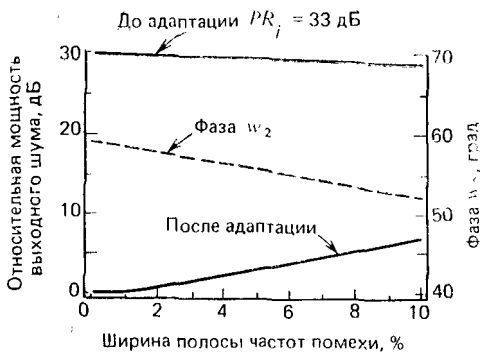


Рис. 5.13. Зависимость относительной мощности выходного шума от ширины полосы частот помехи при  $PR_i=2000$ ,  $\theta_i=45^\circ$  и  $\theta_0=0$  [7]

ставляющими, так что  $PR_i = 666$ . Ширине спектра помехи, равной 10%, соответствует наличие 51 спектральной линии, при этом отношение помеха-собственный шум приемника для каждой спектральной линии составляет  $PR_i=39,2$ . Результаты расчетов, представленные на рис. 5.13, ясно показывают, что с увеличением ширины полосы частот помехи при сохранении неизменной ее общей мощности мощность выходного шума возрастает. При этом предполагается, что ширина полосы частот помехи не превосходит фиксированного значения ширины полосы пропускания канала  $B_c$ .

### 5.2.3. Схема с использованием ограничителя в контуре адаптивного управления

Схема двухэлементной антенной решетки с адаптивным контуром управления, приведенная на рис. 5.5, имеет два недостатка, связанные с тем, что выходное напряжение корреляционного смесителя  $v_2$  пропорционально мощности сигналов, принятых элементами решетки.

1. Динамический диапазон напряжения  $v_2$  равен квадрату диапазона сигнала отдельного элемента. Следовательно, при изменении мощности помехи в диапазоне 40 дБ динамический диапазон элементов контура адаптивного управления должен составлять 80 дБ, что довольно близко к предельно допустимому на практике значению. Эта особенность системы сильно ограничивает динамический диапазон входных сигналов.

2. Поскольку скорость подстройки при адаптации пропорциональна мощности помехи (см. рис. 5.10), то при малых уровнях мощности помех процесс адаптации становится довольно продолжительным.

Для того чтобы уменьшить требуемый динамический диапазон и увеличить скорость адаптации при малом уровне помехи, необходимо ослабить зависимость выходного напряжения корреляционного смесителя от мощности входного сигнала. Одним из лучших известных способов устранения таких недостатков является введение ограничителя в цепь сопряженного сигнала [6]. Модифицированный вариант двухэлементной антенной решетки с использованием ограничителя в

нуль диаграммы устанавливается в направлении на источник помехи и мощность нескомпенсированных остатков помехи на выходе антенной решетки становится пренебрежимо малой. Вторая точка на оси абсцисс соответствует добавлению еще одной спектральной линии, в результате чего результирующая «ширина полосы частот» увеличивается до 0,2%; при этом общая мощность делится поровну между этими двумя составляющими так, что  $PR_i = 1000$ . Аналогично следующая точка на оси абсцисс соответствует добавлению третьей спектральной линии к совокупности из двух имеющихся, увеличению результирующей «ширины полосы частот» до 0,4% и равномерному распределению мощности между тремя со-

контуре адаптивного управления показан на рис. 5.14. Постоянный уровень выходного сигнала ограничителя обозначен через  $h$ .

Введение в контур адаптации ограничителя приводит к изменению уравнений, полученных в предыдущем разделе, так как выходное напряжение корреляционного смесителя теперь будет определяться выражением

$$v_2' = k^2 (w_1 x_1 + w_2 x_2) \frac{hx_2^*}{|x_2|}. \quad (5.73)$$

В этом случае амплитуда напряжения, поступающего на вход корреляционного смесителя из цепи комплексно-сопряженного сигнала, будет постоянна и останутся лишь изменения фазы (так как после огра-

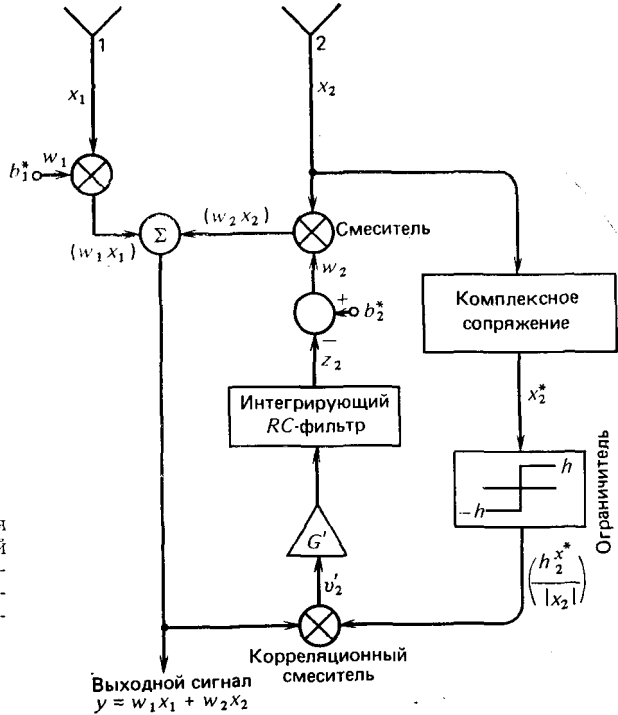


Рис. 5.14. Структурная схема двухэлементной антенной решетки с использованием ограничителя в контуре адаптивного управления [7]

ничения сохраняется только фазовая информация). Выражение (5.38) для коэффициента передачи контура адаптивной подстройки в исходной схеме теперь будет иметь вид

$$\mu' = k^2 G' x_2 \frac{hx_2^*}{|x_2|} = hk^2 G' |\bar{x}_2|, \quad (5.74)$$

т. е. величина  $\mu'$  пропорциональна уровню напряжения, а не мощности. Значение  $G'$ , как и ранее, выбирается в соответствии с (5.39).

Для удобства сравнения, как и ранее в (5.48), выразим  $\mu'$  через  $\mu'_{\min}$  и отношение помеха-собственный шум приемника. Тогда

$$\frac{\mu'}{\mu'_{\min}} = \frac{hk^2 G' |\bar{v}_2|}{hk^2 G' |\bar{n}_2|} = \sqrt{\frac{|\bar{n}_2|^2 + |\bar{J}_i|^2}{|\bar{n}_2|^2}} = \sqrt{1 + PR_i}. \quad (5.75)$$

Нетрудно видеть, что отношение  $\mu'/\mu'_{\min}$  равно квадратному корню из выражения, полученного ранее для схемы без ограничителя.

По аналогии с (5.50) можно записать соотношение между максимальной мощностью помехи и постоянной времени  $RC$ -фильтра  $\tau_0$  в виде

$$\mu'_{\max} = \mu'_{\min} \sqrt{1 + PR_{i_{\max}}} \leq \frac{\pi B_c \tau_0}{10} - 1. \quad (5.76)$$

Если вновь считать, что отношение  $PR_i = 40$  дБ и ширина полосы пропускания канала  $B_c = 5$  МГц, то при  $\mu'_{\min} = 1$  значение  $\tau_0$  будет равно примерно 64,3 мкс, а соответствующая ширина полосы пропускания фильтра — 2475 Гц. Заметим, что поскольку значение  $\mu'_{\max}$  пропорционально  $\sqrt{PR_{i_{\max}}}$ , а не  $PR_{i_{\max}}$ , как в исходной схеме без ограничителя, то постоянная времени фильтра уменьшается примерно в 100 раз, что позволяет увеличить скорость адаптации.

Выражение (5.31) для оптимального весового коэффициента  $\omega_{2\text{опт}}$  остается тем же самым, однако в нем должно использоваться новое значение параметра  $\mu'$ . Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{2\text{опт}} &= \frac{\omega_1 \sqrt{x_1 x_2^*}}{|\bar{x}_2|^2} = \\ &= -\omega_1 \left( \frac{\mu'_{\min}}{\mu'} \right)^2 PR_i e^{-j2u_i}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

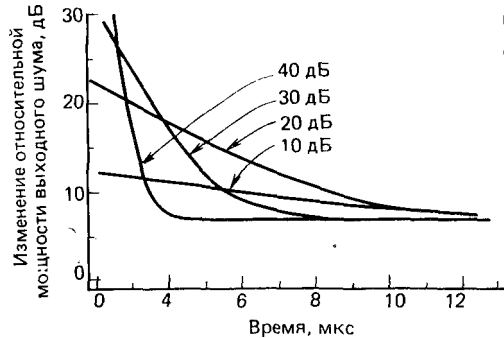


Рис. 5.15. Изменение относительной мощности выходного шума в схеме с ограничителем в процессе адаптации при  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_i = 15^\circ$  и  $PR_i = 10, 20, 30$  и  $40$  дБ [7]

Можно получить также соответствующие выражения для  $\omega'_2(t)$ , аналогичные (5.52) и (5.54), заменяя  $\mu$  на  $\mu'$ .

Введение ограничителя приводит к сильному изменению  $\alpha'$  и  $\omega'_2(\infty)$ . Характер этих изменений лучше всего проиллюстрировать с помощью графиков зависимости мощности выходного шума в процессе адаптации, полученных при тех же условиях, что и для рис. 5.10. Соответствующие графики при использовании в контуре адаптации ограничителя показаны на рис. 5.15, где  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_i = 15^\circ$  и отношение помеха-собственный шум приемника  $PR_i = 10, 20, 30$  и  $40$  дБ. Из сравнения кривых на рис. 5.10 и рис. 5.15 видно, что при  $PR_i = 40$  дБ зависимости совпадают, так как этот случай является предельным для обоих вариантов схем и приводит к одинаковому значению параметра



$\alpha'_m = \alpha = 1,58 \cdot 10^6$  (1/с). Однако при  $PR_i < 40$  дБ переходный процесс в схеме с ограничителем затухает значительно быстрее. Может показаться, что введение в контур адаптации ограничителя неизбежно приведет к увеличению скорости переходного процесса. Однако при использовании в системе нескольких контуров адаптивной подстройки не всегда удается обеспечить увеличение скорости переходного процесса при адаптации.

Другое важное различие рассматриваемых вариантов схем заключается в том, что в установившемся режиме шум на выходе в схеме с ограничителем выше, чем в исходной (7 дБ по сравнению с 1 дБ на рис. 5.10). Это объясняется в основном тем, что коэффициент передачи  $\mu'$  пропорционален  $\sqrt{PR_i}$  (а не значению  $PR_i$ , как в исходной схеме), и поэтому значительно меньше соответствующего значения  $\mu$  для одних и тех же значений  $PR_i$ .

Для уменьшения мощности шума на выходе схемы с ограничителем до приемлемого уровня необходимо лишь иметь значение коэффициента  $\mu'_{\min}$  больше, чем в схеме без ограничителя. Хотя из выражения (5.76) видно, что при увеличении  $\mu'_{\min}$  также (почти

прямо пропорционально) возрастает  $\tau'_0$ , суммарное влияние этого параметра на  $\alpha'$  (и следовательно, на скорость переходного процесса при адаптации), как видно из (5.61), не велико. Поэтому, увеличивая  $\mu'_{\min}$ , можно усилить влияние адаптивной составляющей  $\omega'_2(\infty)$  без увеличения длительности переходного процесса. Графики изменения уровня мощности выходного шума в установившемся режиме в схеме с использованием ограничителя в зависимости от отношения помехо-собственный шум приемника приведены на рис. 5.16. Результаты расчетов на рис. 5.16 показывают, что для обеспечения на выходе системы приемлемого уровня шума необходимо обеспечить  $\mu'_{\min} \geq 10$ .

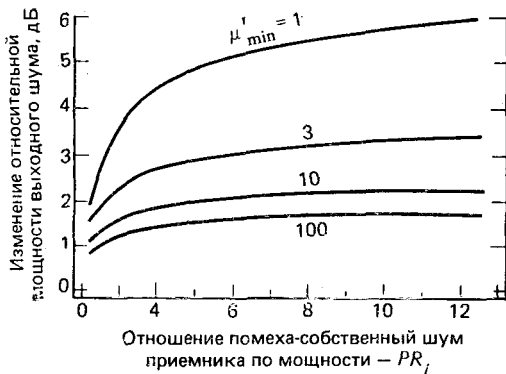


Рис. 5.16. Изменение относительной мощности выходного шума от  $PR_i$  в установившемся режиме в схеме с ограничителем при  $\theta_0 = \theta_i$  и  $\mu'_{\min} = 1, 3, 10$  и  $100$  [7]

### 5.3. N-ЭЛЕМЕНТНАЯ АНТЕННАЯ РЕШЕТКА С N КОНТУРАМИ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрев основные принципы работы и характеристики двухэлементной антенной решетки с одним контуром адаптации Хауэлса—Апельбаума, можно перейти к анализу  $N$ -элементной линейной решетки с несколькими контурами, каждый элемент которой имеет свой контур адаптивной подстройки. В начале будет рассмотрена схема антенной решетки с несколькими контурами адаптации, включенными

так же, как в схеме на рис. 5.5. Пример такого построения системы показан на рис. 5.17 для шестиэлементной линейной антенной решетки.

Обозначим вектор сигналов от элементов решетки через  $x$ , в котором  $k$ -я составляющая  $x_k$  имеет вид (5.21) и состоит из напряжения собственного шума канала приемника  $n_k$  в стационарном режиме (при отсутствии сигналов), с которым суммируются напряжения помехи от  $I$  внешних узкополосных источников, т. е.

$$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_N], \quad (5.78)$$

где

$$x_k = n_k + \sum_{i=1}^I J_i e^{ju_i(2k-N-1)}, \quad (5.79)$$

$$u_i = (\pi d/\lambda) \sin \theta_i. \quad (5.80)$$

Предполагается, что источники помех статистически независимы, при этом  $J_i$  характеризует амплитуды напряжений в каналах отдельных элементов решетки при воздействии  $i$ -го источника помех, а  $\theta_i$  — азимутальную координату этого источника, отсчитываемую от направления

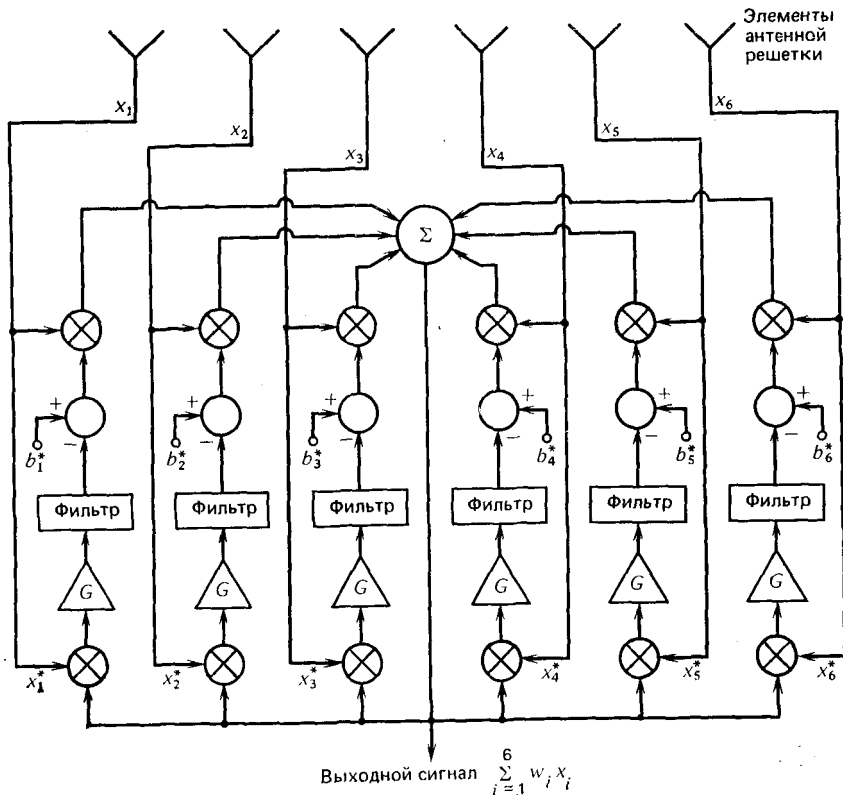


Рис. 5.17. Структурная схема линейной шестиэлементной адаптивной антенной решетки с управляемой диаграммой направленности [7]

нормали к раскрытию решетки. Кроме того, предполагается, что каждый источник помехи создает напряжения с одинаковой амплитудой во всех каналах решетки. Фазы сигналов, принятых отдельными элементами решетки, отсчитываются относительно ее геометрического центра.

Как и ранее, сигналы управления диаграммой выбираются так, чтобы максимум приемной диаграммы ориентировался в заданном азимутальном направлении  $\theta_0$ . В стационарном состоянии (когда присутствует только собственный шум приемника) адаптивные весовые коэффициенты стремятся к стационарным установившимся значениям

$$\mathbf{w}_q^T = [\omega_{q_1}, \omega_{q_2}, \dots, \omega_{q_N}], \quad (5.81)$$

где

$$\omega_{q_k} = a_k e^{-ju_0(2k-N-1)}; \quad (5.82)$$

$$u_0 = (2\pi d/\lambda) \sin \theta_0. \quad (5.83)$$

Значения коэффициентов  $a_k$  должны подбираться так, чтобы результирующая диаграмма направленности имела необходимую форму и заданный уровень боковых лепестков. В исходном состоянии результирующая диаграмма направленности определяется выражением

$$G_q(\theta) = (\mathbf{s}^T \mathbf{w}_q) = \sum_{k=1}^N a_k \exp [j(u-u_0)(2k-N-1)], \quad (5.84)$$

где  $\mathbf{s}$  — вектор сигналов единичной амплитуды от отдельных элементов решетки:

$$\mathbf{s}^T = [s_1, s_2, \dots, s_N]; \quad (5.85)$$

$$s_k = \exp [ju(2k-N-1)], \quad (5.86)$$

а фаза сигналов  $u$  связана с азимутальной координатой  $\theta$  в дальней зоне соотношением

$$u = (\pi d/\lambda) \sin \theta. \quad (5.87)$$

Составляющие вектора управления диаграммой  $\mathbf{b}^*$

$$\mathbf{b}^{*T} = [b_1^*, b_2^*, \dots, b_N^*] \quad (5.88)$$

связаны с составляющими вектора весовых коэффициентов  $\mathbf{w}_q$  соотношением

$$b_k^* = c_k \omega_{q_k}. \quad (5.89)$$

Выбор значений  $c_k$  обсуждается в следующем разделе.

### 5.3.1. Уравнения для весовых коэффициентов

Поскольку каждый из контуров адаптивной подстройки весовых коэффициентов в схеме на рис. 5.17 аналогичен рассмотренному ранее единственному контуру адаптации в схеме на рис. 5.5, то для составления уравнений в многоконтурном случае используется та же самая

методика. Тогда весовой коэффициент  $\omega_k$  для  $k$ -го элемента решетки будет определяться выражением

$$\omega_k = b_k^* - z_k. \quad (5.90)$$

Выходное напряжение корреляционного смесителя равно произведению сигнала  $k$ -го элемента  $x_k^*$  и суммарного выходного сигнала решетки:

$$v_k = k^2 \left( x_k^* \sum_{i=1}^N \omega_i x_i \right), \quad (5.91)$$

где, как и ранее, напряжение  $v_k$  удовлетворяет дифференциальному уравнению интегрирующего  $RC$ -фильтра. Поэтому

$$\tau_0 \frac{dz_k}{dt} + z_k = \gamma \left( x_k^* \sum_{i=1}^N \omega_i x_i \right), \quad (5.92)$$

где

$$\gamma = k^2 G. \quad (5.93)$$

Параметр  $\gamma$  характеризует коэффициент передачи смесителя и контура управления и полагается одинаковым для всех контуров. В отличие от уравнения (5.26) для схем с единственным контуром, содержащего только одну неизвестную  $z_2$ , уравнение (5.92) содержит  $N$  неизвестных  $z_1, z_2, \dots, z_N$ . С помощью (5.90) выразим  $\omega_k$  через  $z_k$ , тогда уравнение (5.92) примет вид

$$\tau_0 \frac{d\omega_k}{dt} + \omega_k = b_k^* - \gamma \left[ x_k^* \sum_{i=1}^N \omega_i x_i \right]. \quad (5.94)$$

Используя матричную форму записи, полную систему дифференциальных уравнений вида (5.94) для  $N$  контуров управления можно представить в виде

$$\tau_0 \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{w} = \mathbf{b}^* - \gamma [\mathbf{x}^* \mathbf{w}^T \mathbf{x}]. \quad (5.95)$$

Поскольку  $(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \omega_i x_i$ , то выражение в квадратных скобках из (5.95) можно представить в виде

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{w}^T \mathbf{x}] = [\mathbf{x}^* \mathbf{x}^T] \mathbf{w}. \quad (5.96)$$

Математическое ожидание произведения  $\mathbf{x}^* \mathbf{x}^T$ , по определению, равно корреляционной матрице входных сигналов

$$\mathbf{R}_{xx} \triangleq E \{ \mathbf{x}^* \mathbf{x}^T \}. \quad (5.97)$$

Значения элементов корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$  определяются выражениями:

$$\overline{x_k^* x_l} = \sum_{i=1}^l |\bar{J}_i|^2 \exp [j2u_i (l-k)] \text{ при } l \neq k; \quad (5.98)$$

$$\overline{x_k^* x_l} = |\bar{x}_k|^2 = |\bar{n}_k|^2 + \sum_{i=1}^l |\bar{J}_i|^2 \text{ при } l = k, \quad (5.99)$$

где (5.99) определяет диагональные элементы матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$ . При отсутствии полезного сигнала корреляционную матрицу можно представить в виде суммы матрицы собственного шума приемника  $\mathbf{R}_{nnq}$  и матриц внешних помех  $\mathbf{R}_{nni}$ :

$$\mathbf{R}_{nn} = \mathbf{R}_{nnq} + \sum_{i=1}^I \mathbf{R}_{nni}, \quad (5.100)$$

где

$$\mathbf{R}_{nnq} = \begin{bmatrix} |\bar{n}_1|^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & |\bar{n}_2|^2 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & |\bar{n}_N|^2 \end{bmatrix}; \quad (5.101)$$

$$\mathbf{R}_{nni} = |\bar{J}_i|^2 \begin{bmatrix} 1 & e^{j2u_i} & e^{j4u_i} & \dots \\ e^{-j2u_i} & 1 & e^{j2u_i} & \dots \\ e^{-j4u_i} & e^{-j2u_i} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.102)$$

Подставив  $\mathbf{R}_{nn}$  из (5.100) в (5.95) и перегруппировав слагаемые, получим матричное дифференциальное уравнение для адаптивных весовых коэффициентов в виде

$$\tau_0 \frac{d\mathbf{w}}{dt} + [\mathbf{I} + \gamma \mathbf{R}_{nn}] \mathbf{w} = \mathbf{b}^*, \quad (5.103)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

Решение для (5.103) легко находится в случае, когда матрица  $\mathbf{R}_{nn}$  диагональна. В общем случае матрица  $\mathbf{R}_{nn}$  оказывается недиагональной, но в силу того, что  $\mathbf{R}_{xx}$  является положительно определенной эрмитовой матрицей, всегда можно найти простое преобразование координат, приводящее  $\mathbf{R}_{nn}$  к диагональному виду. Матрица  $\mathbf{Q}$ , обеспечивающая необходимую диагонализацию, является ортогональной. Диагональные элементы преобразованной матрицы равны собственным значениям исходной матрицы  $\mathbf{R}_{nn}$  и находятся из уравнения

$$|\mathbf{R}_{nn} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.104)$$

где  $\lambda_i$  — соответствующие собственные значения;  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Каждому собственному значению соответствует собственный вектор, удовлетворяющий соотношению

$$\mathbf{R}_{nn} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i. \quad (5.105)$$

Нормированные собственные векторы взаимно ортогональны и их компоненты совпадают со строчными элементами матрицы  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \dots \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \dots \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ e_{N1} & e_{N2} & e_{N3} & \dots \end{bmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ \vdots \\ e_{iN} \end{bmatrix}. \quad (5.106)$$

Приводя матрицу  $R_{nn}$  к диагональному виду с помощью преобразования  $Q$ , получим

$$[Q^* R_{nn} Q^T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ \vdots & & & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & & \lambda_N \end{bmatrix}. \quad (5.107)$$

Поскольку  $R_{nn} = E \{x^* x^T\}$ , выражение (5.107) можно записать в виде

$$[Q^* R_{nn} Q^T] = [Q^* x^* x^T Q^T] = [x'^* x'^T] = \Lambda, \quad (5.108)$$

где

$$x' = Qx. \quad (5.109)$$

Выражение (5.109) можно рассматривать как преобразование действительного сигнального вектора  $x$  в новый вектор  $x'$ . Составляющие вектора  $x'$  определяются собственными векторами матрицы  $R_{nn}$

$$x'_k = (e_k^T x). \quad (5.110)$$

Заметим, что составляющие  $x'_k$  вектора  $x'$  обладают двумя особенностями:

1) они не коррелированы между собой, т. е.

$$E \{x'_k x'_l\} = 0 \text{ при } l \neq k; \quad (5.111)$$

2) их амплитуды равны корню квадратному из соответствующих собственных значений

$$E \{x'_k x'_k\} = \lambda_k. \quad (5.112)$$

Таким образом, преобразование  $Q$  эквивалентно действию некоторой диаграммообразующей схемы, формирующей ортогональные парциальные диаграммы направленности.

Аналогично определим новый вектор управления диаграммой направленности  $b'^*$  с помощью соотношения

$$b' = Qb, \quad (5.113)$$

где  $k$ -я составляющая вектора  $b'$  определяется  $k$ -м собственным вектором.

Применение преобразования координат  $Q$  к векторам  $x$  и  $b^*$  приводит к эквивалентной схеме «ортонормированной адаптивной решетки», показанной на рис. 5.18, б. Для сравнения на рис. 5.18, а приведена упрощенная схема реальной системы. Весовой вектор в эквивалентной схеме  $w'$  удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\tau_0 \frac{dw'}{dt} + [I + \gamma R'_{nn}] w' = b'^*, \quad (5.114)$$

где

$$R'_{nn} = E \{x'^* x'^T\} = \Lambda. \quad (5.115)$$

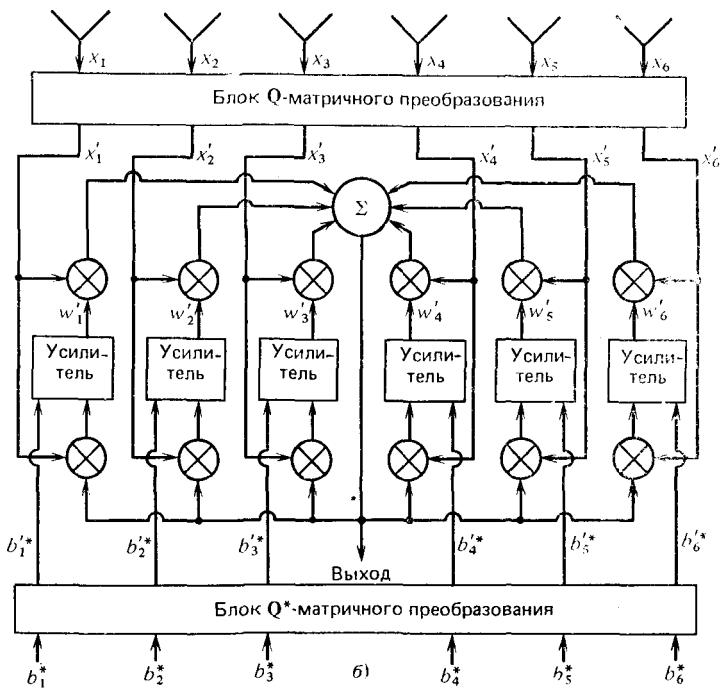
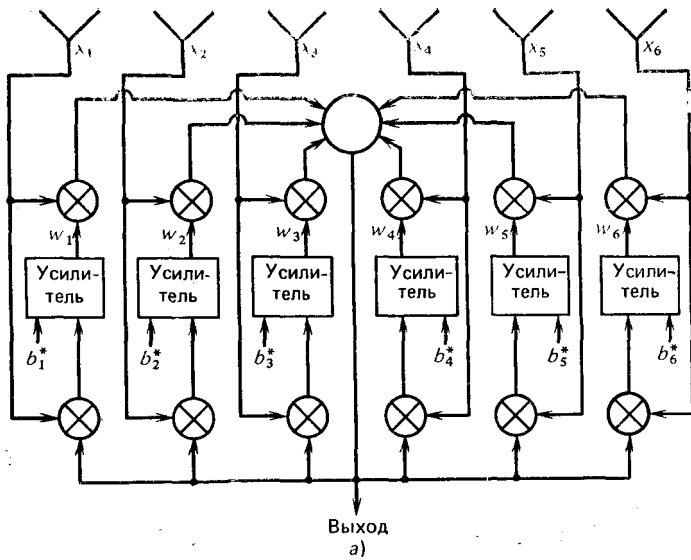


Рис. 5.18. Структурные схемы шестиэлементных адаптивных антенных решеток: а — реальной; б — эквивалентной ортонормированной [7]

Так как  $\mathbf{R}'_{nn}$  является диагональной матрицей, то уравнение (5.114) представляет собой систему независимых линейных дифференциальных уравнений. Зная собственные значения, нетрудно найти решения этих уравнений. Независимость уравнений, входящих в систему, означает, что каждый контур управления в ортогональной антенной решетке работает независимо от других, так как входные сигналы  $x_k$  не коррелированы. Дифференциальное уравнение, описывающее работу  $k$ -го контура управления в ортонормированной системе, имеет вид

$$\tau_0 \frac{d\omega'_k}{dt} + (1 + \gamma\lambda_k) \omega'_k = b'_k. \quad (5.116)$$

Коэффициент передачи  $k$ -го контура управления согласно (5.116) можно записать в виде

$$\mu_k = \gamma\lambda_k, \quad (5.117)$$

т. е. коэффициенты передачи различных контуров управления теперь определяются соответствующими собственными значениями ковариационной матрицы входных сигналов. Сравнение (5.117) с (5.38) показывает, что положительные действительные собственные значения  $\lambda_k$  соответствуют квадрату амплитуды напряжения сигнала, и на самом деле любое собственное значение пропорционально мощности.

Выходная мощность полезного сигнала будет определяться вектором управления диаграммой  $\mathbf{b}^*$  согласно формуле

$$P_s = |\mathbf{w}^T \mathbf{b}|^2. \quad (5.118)$$

Аналогично мощность шума на выходе решетки можно записать как

$$P_n = |\overline{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}|^2, \quad (5.119)$$

где предполагается, что сигнальный вектор  $\mathbf{x}$  образован только собственным шумом канала приемника и шумом, обусловленным внешним источником помехи. Тогда отношение сигнал-шум будет определяться отношением квадратичных форм:

$$\frac{s}{n} = \frac{|\mathbf{w}^T \mathbf{b}|^2}{|\overline{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}|^2} = \frac{\mathbf{w}^T [\mathbf{b}^* \mathbf{b}^T] \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}}, \quad (5.120)$$

где  $\mathbf{R}_{nn}$  — ковариационная матрица шума. Согласно результатам гл. 3 выражение для оптимального весового вектора, обеспечивающего максимум ОСШ в (5.120), будет иметь вид

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \frac{1}{K} \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{b}^*, \quad (5.121)$$

где  $K$  — постоянный коэффициент.

Из сравнения (5.121) с (4.45) видно, что при отсутствии полезного сигнала алгоритмы МСКО и МСШ с точностью до постоянного множителя дают одинаковое значение для оптимального весового вектора при условии  $\mathbf{r}_{xd} = \mathbf{b}^*$ . Таким образом, выбор вектора  $\mathbf{r}_{xd}$  при алгоритме МСКО эквивалентен выбору вектора  $\mathbf{b}^*$  при алгоритме МСШ.



С учетом изложенного можно считать, что оптимальные весовые коэффициенты в ортонормированной системе будут определяться (с точностью до скалярного множителя) выражением

$$\omega'_{k\text{опт}} = \frac{1}{\mu_k} b'_k{}^* \quad (5.122)$$

Подставив (5.117) и (5.122) в (5.116), получим

$$\tau_0 \frac{d\omega'_k}{dt} + (1 + \mu_k) \omega'_k = \mu_k \omega'_{k\text{опт}} \quad (5.123)$$

Полученное дифференциальное уравнение имеет такую же форму, как и уравнение (5.34). Поэтому при входном сигнале в виде ступенчатой функции решение (5.123) имеет вид

$$\omega'_k(t) = [\omega'_k(0) - \omega'_k(\infty)] e^{-\alpha_k t} + \omega'_k(\infty), \quad (5.124)$$

где

$$\omega'_k(\infty) = \frac{\mu_k}{1 + \mu_k} \omega'_{k\text{опт}}, \quad (5.125)$$

$$\alpha_k = \frac{1 + \mu_k}{\tau_0}. \quad (5.126)$$

Здесь  $\omega'_k(\infty)$  — значение весового коэффициента в установившемся режиме;  $\omega'_k(0)$  — начальное значение;  $\alpha_k$  — постоянная затухания переходного процесса установления  $\omega'_k$ . Переходные процессы адаптивной подстройки весовых коэффициентов теперь определяются собственными значениями. Рассматриваемый здесь  $k$ -й контур подстройки ортонормированной решетки можно представить моделью следящей системы 0-типа, схема которой приведена на рис. 5.19.

Определим теперь взаимосвязь между весовыми коэффициентами  $\omega'_k$  ортонормированной системы и коэффициентами  $\omega_k$  реальной системы. Так как системы, показанные на рис. 5.18, должны быть полностью эквивалентны, то

$$\sum_{k=1}^N \omega_k x_k = \sum_{k=1}^N \omega'_k x'_k \quad (5.127)$$

или

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} = \mathbf{w}'^T \mathbf{x}' = \mathbf{w}'^T \mathbf{Q} \mathbf{x}. \quad (5.128)$$

Поэтому

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}^T \mathbf{w}'. \quad (5.129)$$

Из (5.129) можно получить выражение для  $\omega_k$  в виде

$$\omega_k = (e_{1k} \omega'_1 + e_{2k} \omega'_2 + \dots + e_{Nk} \omega'_N), \quad (5.130)$$

где  $e_{1k}$  —  $k$ -я составляющая первого собственного вектора;  $e_{2k}$  —  $k$ -я составляющая второго собственного вектора; ...  $e_{Nk}$  —  $k$ -я составляющая  $N$ -го собственного вектора.

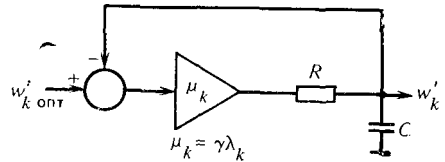


Рис. 5.19. Модель  $k$ -го контура адаптивной подстройки ортонормированной решетки в виде следящего устройства 0-типа [7]

Для вычисления коэффициентов  $c_k$ , определяющих взаимосвязь между векторами  $\mathbf{b}^*$  и  $\mathbf{w}_q$  в (5.89), будем снова считать, что в стационарном состоянии в каналах системы присутствует только некоррелированный собственный шум приемника. В этом случае в качестве  $\mathbf{Q}$  можно выбрать единичную матрицу и тогда векторы  $\mathbf{w}'$  и  $\mathbf{w}$  будут совпадать. При  $\mathbf{Q}_q = \mathbf{I}$  ковариационная матрица шума в стационарном состоянии  $\mathbf{R}_{nn_q}$  уже является диагональной, и если предположить, что мощности составляющих собственного шума приемника во всех каналах одинаковы и равны  $|\bar{n}_0|^2$ , то из (5.107) следует, что

$$\mathbf{Q}_q^* \mathbf{R}_{nn_q} \mathbf{Q}_q^T = [\lambda_0 \delta_{ij}], \quad (5.131)$$

где

$$\lambda_0 = |\bar{n}_0|^2, \quad (5.132)$$

т. е. наименьшее собственное значение равно мощности собственного шума канала приемника. Это наименьшее собственное значение определяет минимальный коэффициент передачи в контуре подстройки

$$\mu_{\min} = \gamma \lambda_0. \quad (5.133)$$

Поскольку, по определению, весовой вектор в установившемся режиме  $\mathbf{w}(\infty)$  при стационарных условиях должен совпадать с вектором  $\mathbf{w}_q$ , то из (5.125), (5.122) и (5.89) следует

$$\omega_{qk} = \frac{1}{1 + \mu_{\min}} b_k^* = \frac{c_k}{1 + \mu_{\min}} \omega_{qk}$$

или

$$c_k = 1 + \mu_{\min}. \quad (5.134)$$

Из (5.124)—(5.126) и (5.117) видно, что эффективная постоянная времени, с которой  $k$ -я составляющая вектора  $\mathbf{w}'$  сходится к своему оптимальному значению, равна  $\tau_0/(1 + \gamma \lambda_k)$ . Таким образом  $\lambda_{\min}$  определяет скорость, с которой адаптивная решетка может отслеживать изменения уровня шума. Выражение (5.130) показывает, что каждый действительный весовой коэффициент может быть представлен в виде взвешенной суммы экспоненциальных зависимостей, при этом наиболее медленно изменяющаяся экспоненциальная зависимость определяется величиной  $\lambda_{\min}$ .

При работе в условиях распределенного внешнего шумового поля адаптивная решетка, построенная по схеме типа показанной на рис. 5.17, может в отдельных случаях характеризоваться очень низкой скоростью сходимости [6]. При увеличении  $\gamma$  или уменьшении  $\tau_0$  с целью повышения скорости сходимости будет увеличиваться уровень шума в контуре управления. Медленная сходимость характерна при большом значении  $\text{tr}(\mathbf{R}_{nn})/\lambda_{\min}$ , и в этом случае не удастся, выбирая  $\gamma$  и  $\tau_0$ , увеличить скорость сходимости без существенного увеличения шума в контуре управления.

### 5.3.2. Шум контура управления

Адаптивные весовые коэффициенты, вырабатываемые в системе с контурами Хауэлса—Аппельбаума, в установившемся режиме не являются постоянными, а содержат также составляющие, меняющиеся случайным образом. Можно математически описать изменения весовых коэффициентов и вычислить их дисперсию в установившемся режиме. Такой «шум» весовых коэффициентов приводит к появлению дополнительной шумовой составляющей на выходе всей решетки. В этом разделе приводятся выражения для дисперсии весовых коэффициентов и дополнительного шума на выходе решетки. Более полно приводимые здесь результаты рассматриваются в работе [6].

Пусть  $\xi$  — случайная (шумовая) составляющая адаптивного весового вектора  $\mathbf{w}$  и пусть  $\mathfrak{R}$  — случайная составляющая матрицы  $\mathbf{R}_{nn}$ , т. е.

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \xi, \quad (5.135)$$

$$\mathbf{R}_{nn} = \bar{\mathbf{R}}_{nn} + \mathfrak{R}, \quad (5.136)$$

где  $\bar{\mathbf{w}}$  и  $\bar{\mathbf{R}}_{nn}$  — средние значения. Поскольку адаптивные весовые коэффициенты должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\tau_0 \frac{d\mathbf{w}}{dt} + (\mathbf{I} + \gamma \mathbf{R}_{nn}) \mathbf{w} = \mathbf{b}^*, \quad (5.137)$$

то можно, подставив значения  $\bar{\mathbf{w}}$  и  $\bar{\mathbf{R}}_{nn}$  в (5.137) и вычтя полученное уравнение из уравнения, найденного в результате подстановки (5.135), (5.136) в (5.137), записать

$$\tau_0 \frac{d\xi}{dt} + (\mathbf{I} + \gamma \bar{\mathbf{R}}_{nn}) \xi = -\gamma \mathfrak{R} \mathbf{w}. \quad (5.138)$$

Умножив (5.138) слева на матрицу преобразования  $\mathbf{Q}^*$  и учтя, что  $\mathbf{Q}^* \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , получим

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{\tau_0} (\mathbf{I} + \gamma \Lambda) \xi = -\beta \mathbf{Q}^* \mathfrak{R} \mathbf{w} = \mathbf{u}, \quad (5.139)$$

где

$$\xi = \mathbf{Q}^* \xi, \quad (5.140)$$

$$\beta = \gamma / \tau_0. \quad (5.141)$$

Выражение (5.139) представляет систему  $N$  линейных независимых дифференциальных уравнений,  $n$ -е уравнение которой можно записать в виде

$$d\xi_n + \sigma_n \xi_n dt = u_n dt, \quad (5.142)$$

где

$$\sigma_n = (1 + \gamma \lambda_n) / \tau_0; \quad (5.143)$$

$$u_n = u_n(\tau, \bar{\mathbf{w}}, \zeta) = (-\beta \mathbf{Q}^* \mathfrak{R} \mathbf{w})_n, \quad (5.144)$$

т. е.  $u_n$  —  $n$ -я составляющая вектор-столбца  $\mathbf{u}$ .

Умножив (5.142) на  $\exp(\sigma_n t)$  и проинтегрировав результат в пределах от  $t_0$  до  $t$ , получим

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(t_0) \exp[-\sigma_n(t-t_0)] + \int_{t_0}^t e^{-\sigma_n(t-\tau)} u_n(\tau, \bar{\mathbf{w}}, \xi) d\tau. \quad (5.145)$$

Если рассматривать только установившийся режим, то значения весовых коэффициентов будут близки к средним значениям в установившемся режиме. Флуктуации весовых коэффициентов в установившемся режиме можно вычислить по формуле (5.145), полагая  $t_0 = -\infty$  и пренебрегая влиянием начального значения  $\zeta_n(t_0)$ . Тогда

$$\zeta_n(t) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma_n \tau} u_n(t-\tau) d\tau. \quad (5.146)$$

Важным параметром, характеризующим шум в контурах адаптивного управления, является дисперсия весового вектора, определяемая соотношением

$$\text{var}(\mathbf{w}) = E \left\{ \sum_{n=1}^N |\mathbf{w}_n - \bar{\mathbf{w}}_n|^2 \right\} = E \{ \xi^\dagger \xi \}, \quad (5.147)$$

где  $N$  — размерность весового вектора  $\mathbf{w}$  (число степеней свободы адаптивной антенной решетки).

Поскольку  $\xi = \mathbf{Q}^* \xi$ , то (5.147) принимает вид

$$\text{var}(\mathbf{w}) = E \{ \xi^\dagger \xi \}. \quad (5.148)$$

Элементы ковариационной матрицы  $\xi(t)$  в (5.148) с учетом (5.146) и определения для  $u_n$  можно записать как

$$\begin{aligned} E \{ \xi_j^* \xi_k \} &= \beta^2 \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} E \{ [\mathbf{Q}^* \mathfrak{R}(t-\tau_1) \bar{\mathbf{w}}]_j^* \times \\ &\times \exp(-\sigma_j \tau_1 - \sigma_k \tau_2) [\mathbf{Q}^* \mathfrak{R}(t-\tau_2) \bar{\mathbf{w}}]_k \} d\tau_2 + \\ &+ \beta^2 \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} E \{ [\mathbf{Q}^* \mathfrak{R}(t-\tau_1) \xi(t-\tau_1)]_j^* \exp(-\sigma_j \tau_1 - \sigma_k \tau_2) \times \\ &\times [\mathbf{Q}^* \mathfrak{R}(t-\tau_2) \xi(t-\tau_2)]_k \} d\tau_2. \end{aligned} \quad (5.149)$$

При выводе этой формулы учитывалось, что  $E \{ \xi(t) \} = 0$  и  $\mathfrak{R}(t)$  и  $\xi(t)$  — независимые случайные процессы.

Вычисление двойных интегралов в (5.149) оказывается довольно трудоемким. Приведем результаты работы [6], где нижняя граница для  $\text{var}(\mathbf{w})$  найдена в виде

$$\text{var}(\mathbf{w}) \geq \frac{\beta^2 \Delta}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n} E \{ |(\mathbf{Q}^* \mathfrak{R} \bar{\mathbf{w}})_n|^2 \}. \quad (5.150)$$

Здесь параметр  $\Delta$  определяет временной интервал между последовательными независимыми выборочными значениями вектора входного сигнала. Для импульсного радиолокатора величина  $\Delta$  примерно равна длительности импульса. Для систем связи  $\Delta \approx 1/B$ , где  $B$  — ширина полосы частот сигнала.

Граничное значение для  $\text{var}(\mathbf{w})$  (5.150) оказывается полезным при выборе значений параметров контуров адаптивной подстройки Хауэлса—Аппельбаума. Очевидно, что при больших значениях нижней границы для  $\text{var}(\mathbf{w})$  флуктуации весовых коэффициентов будут велики. В практически интересных случаях, когда значение  $\text{var}(\mathbf{w})$  мало по сравнению с произведением  $\bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{w}}$ , правая часть (5.150) будет близка к  $\text{var}(\mathbf{w})$ . Выражение (5.150) можно упростить и привести к виду

$$\text{var}(\mathbf{w}) \geq \left[ \frac{\Re \beta \Delta}{2} - \frac{\beta \Delta}{2\lambda} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n + 1/\gamma} \right] \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{R}}_{nn} \bar{\mathbf{w}}, \quad (5.151)$$

где  $\lambda_n$  —  $n$ -е собственное значение  $\bar{\mathbf{R}}_{nn}$ ;

$$\Re = N/\beta - (1/\gamma) \text{tr}(\mathbf{u}); \quad (5.152)$$

$$\mathbf{u} = (\beta \mathbf{H})^{-1}; \quad (5.153)$$

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{R}}_{nn} \frac{1}{\gamma}. \quad (5.154)$$

Случайная составляющая адаптивных весовых коэффициентов приводит к появлению дополнительного шума на выходе системы. Этот шум обуславливает уменьшение эффективности из-за того, что процессор не может устанавливать весовые коэффициенты равными их оптимальным значениям. Поскольку полная мощность шума на выходе антенной решетки определяется мощностью шума при  $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}}$  (равной  $\bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{R}}_{nn} \bar{\mathbf{w}}$ ) плюс мощность дополнительного шума, обусловленная случайной составляющей весового вектора  $\mathbf{w}$ , то можно показать, что

$$\begin{aligned} E\{|\mathbf{w}^T \mathbf{x}|^2\} &= \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{R}}_{nn} \bar{\mathbf{w}} + E\{\boldsymbol{\xi}^T \bar{\mathbf{R}}_{nn} \boldsymbol{\xi}\} \simeq \\ &\simeq \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{R}}_{nn} \bar{\mathbf{w}} \left[ 1 + \frac{\beta \Delta}{2} \sum_{n=1}^N \lambda_n \right] \end{aligned} \quad (5.155)$$

при  $\gamma \lambda_n \gg 1$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Величина  $\beta \Delta$ , входящая в выражения (5.155) и (5.151), равна  $\gamma \Delta / \tau_0$ .

При наличии шума в контурах управления полная мощность выходного шума увеличивается в  $(1 + K_n)$  раз, где согласно (5.155)

$$K_n \geq \frac{\gamma \Delta}{2\tau_0} \sum_{n=1}^N \lambda_n = \frac{\gamma}{4B\tau_0} \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_{nn}), \quad (5.156)$$

$\Delta = 1/2B$  и  $B$  — ширина полосы частот входного сигнала. Таким образом, величина  $K_n$  характеризует влияние шума весового вектора.

При решении уравнения (5.123) было найдено, что эффективная постоянная времени самой медленно убывающей составляющей  $\omega'_k$  равна

$$\tau_{\text{эфф}} = \frac{\tau_0}{1 + \gamma \lambda_{\min}} \simeq \frac{\tau_0}{\gamma \lambda_{\min}}, \quad (5.157)$$

где  $\gamma \lambda_{\min} \gg 1$  во избежание смещения установившегося значения весового коэффициента. С учетом (5.156) и (5.157) получим

$$\frac{\tau_{\text{эфф}}}{\Lambda} \gg \frac{1}{2K_n \lambda_{\min}} \sum_{n=1}^N \lambda_n = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_{nn})}{2K_n \lambda_{\min}}. \quad (5.158)$$

Из выражения (5.158) следует, что если наименьшее собственное значение  $\lambda_{\min}$  мало по сравнению с  $\text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_{nn})$ , то для достижения установившегося режима при малом шуме в контурах управления требуется большое число независимых выборочных значений входного сигнала. В этом случае невозможно подбором параметров контуров управления обеспечить как малый уровень шума в контурах, так и высокую скорость сходимости. В работе [13] дается анализ шума в контурах адаптации Хауэлса—Аппельбаума для случая, когда входные сигналы и весовые коэффициенты статистически зависимы. Этот анализ показывает, что характер статистической зависимости влияет на шум весовых коэффициентов в установившемся режиме.

### 5.3.3. Представление адаптивной диаграммы направленности антенной решетки с помощью собственных диаграмм

Матрица преобразования  $\mathbf{Q}$ , определяемая (5.106), образована из составляющих нормированных и взаимно ортогональных собственных векторов корреляционной матрицы. Составляющие собственных векторов можно рассматривать как весовые коэффициенты элементов решетки, формирующей набор «собственных» диаграмм направленности соответствующих ортонормированным собственным векторам. Понятие «собственной» диаграммы оказывается довольно удобным при рассмотрении работы адаптивной решетки. Собственной диаграмму, соответствующую  $k$ -му собственному вектору, можно записать в виде

$$g_k(\theta) = (\mathbf{s}^T \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^N e_{ki} s_i, \quad (5.159)$$

где вектор  $\mathbf{s}$  и его составляющие в случае линейной  $N$ -элементной решетки определяются выражениями:

$$\mathbf{s}^T = [s_1, s_2, \dots, s_N], \quad (5.160)$$

$$s_i = \exp[ju(2i - N - 1)], \quad (5.161)$$

$$u = (\pi d/\lambda) \sin \theta. \quad (5.162)$$

Введя переменную  $z$ , связанную с углом  $\theta$  соотношением

$$z \triangleq \exp(j2u), \quad (5.163)$$

получаем выражение для собственной диаграммы

$$g_h(\theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^{N-1} [e_{h1} + e_{h2}z + e_{h3}z^2 + \dots + e_{hN}z^{N-1}]. \quad (5.164)$$

Выражение в квадратных скобках в (5.164) представляет собой многочлен, в котором составляющие собственного вектора являются его коэффициентами. Представив этот многочлен в виде многочленов первого порядка, получим

$$g_h(\theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^{N-1} [a_{N-1}(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{N-1})], \quad (5.165)$$

где корни многочлена  $z_1, z_2, \dots, z_{N-1}$  соответствуют нулям собственной диаграммы направленности. Зная положения нулей, можно найти соответствующие коэффициенты многочлена либо, зная такие коэффициенты, можно определить положения соответствующих нулей. Все корни  $z_1, z_2, \dots, z_{N-1}$  располагаются на окружности единичного радиуса в  $z$ -плоскости. Рассматриваемое представление диаграмм направленности адаптивной антенной решетки с помощью собственных диаграмм оказывается особенно полезным по следующим причинам:

1) адаптивные решетки формируют диаграммы с нулями в направлениях на источники помех;

2) антенная решетка с  $N$  элементами имеет  $N - 1$  степеней свободы и поэтому обладает способностью формировать диаграммы направленности с  $N - 1$  независимыми нулями. Работа адаптивной решетки сводится к формированию нулей диаграммы в направлениях на источники помех;

3) положение нулей диаграммы можно изменять с помощью соответствующего изменения весовых коэффициентов решетки; пример практического использования указанного подхода приведен в работе [14];

4) положения нулей определяются соответствующими собственными диаграммами.

Пусть условия приема характеризуются наличием только одного источника узкополосной помехи, расположенного под углом  $\theta_1$  относительно нормали к раскрыву решетки. Тогда максимальному собственному значению ковариационной матрицы  $\mathbf{R}_{nn}$  соответствует собственный вектор, определяющий собственную диаграмму с максимумом в направлении на источник помехи  $\theta_1$ , как показано на рис. 5.1. Матрица  $\mathbf{R}_{nn}$  в этом случае имеет также и другие собственные значения и соответствующие им собственные векторы. Собственные диаграммы, определяемые этими векторами, не оказывают существенного влияния на работу антенной решетки, и поэтому ее диаграмма направленности будет полностью определяться диаграммой, соответствующей максимальному собственному значению.

Результирующую диаграмму направленности антенной решетки можно наиболее просто определить на основе анализа эквивалентной ортонормированной системы, показанной на рис. 5.18, б, когда вектор входного сигнала  $s$  определяется выражением (5.161). Поскольку вы-

ходные сигналы реальной и эквивалентной ортонормированной системы должны быть одинаковыми, то

$$G(\theta, t) = \sum_{i=1}^N w_i s_i = \sum_{i=1}^N w'_i s'_i, \quad (5.166)$$

или

$$G(\theta, t) = \mathbf{w}'^T \mathbf{s}', \quad (5.167)$$

где

$$\mathbf{s}' = \mathbf{Q}\mathbf{s}. \quad (5.168)$$

В данном случае  $i$ -я составляющая вектора  $\mathbf{s}'$  определяется выражением

$$s'_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{s} = \sum_{k=1}^N e_{ik} s_k. \quad (5.169)$$

Это выражение [как следует из (5.159)] определяет  $i$ -ю собственную диаграмму, т. е.

$$s'_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{s} = g_i(\theta). \quad (5.170)$$

Поэтому результирующую диаграмму направленности можно представить в виде

$$G(\theta, t) = \sum_{i=1}^N w'_i g_i(\theta), \quad (5.171)$$

т. е. эта диаграмма является взвешенной суммой  $N$  собственных диаграмм, весовые множители которой равны адаптивным весовым коэффициентам ортонормированной системы.

Поскольку  $k$ -я составляющая весового вектора ортонормированной системы в стационарном состоянии определяется как

$$w'_{qk} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{w}_q, \quad (5.172)$$

то эта же составляющая в установившемся режиме может быть найдена из (5.124) с учетом (5.125), (5.89) и (5.134) в виде

$$w'_k(\infty) = \frac{1 + \mu_{\min}}{1 + \mu_k} w'_{qk}. \quad (5.173)$$

Предположим, как это делалось и ранее, что вплоть до момента времени  $t = 0$  система находится в стационарном (исходном) состоянии, характеризуемом наличием только собственного шума приемника, а внешние источники помех включаются в момент времени  $t = 0$ . Тогда

$$w'_k(0) = w'_{qk}, \quad (5.174)$$

и выражение (5.124) можно представить в более удобной форме

$$w'_k = w'_{qk} - (1 - e^{-\alpha_k t}) \left[ \frac{\mu_k - \mu_{\min}}{1 + \mu_k} \right] w'_{qk}. \quad (5.175)$$



При  $t = 0$  из (5.171) получим

$$G(\theta, 0) = \sum_{i=1}^N \omega'_{q_i} g_i(\theta) = (\mathbf{w}'_q{}^T \mathbf{s}') = (\mathbf{w}'_q{}^T \mathbf{Q} \mathbf{s}). \quad (5.176)$$

Из (5.129) видно, что  $\mathbf{w}'_q = \mathbf{w}_q{}^T \mathbf{Q}$ , и поэтому

$$G(\theta, 0) = (\mathbf{w}'_q{}^T \mathbf{s}) = G_q(\theta), \quad (5.177)$$

где стационарная диаграмма направленности  $G_q(\theta)$  определяется выражением (5.84).

Подставив (5.177) и (5.175) в (5.171), получим выражение для результирующей диаграммы направленности в виде

$$G(\theta, t) = G_q(0) \prod_{i=1}^N (1 - e^{-\alpha_i t}) \left[ \frac{\mu_i - \mu_{\min}}{1 + \mu_i} \right] \omega'_{q_i} g_i(\theta), \quad (5.178)$$

где, как уже ранее упоминалось,

$$\alpha_i = (1 + \mu_i)/\tau_0, \quad \mu_i = \gamma \lambda_i, \quad \mu_{\min} = \gamma \lambda_{\min}.$$

Из полученного выражения следует, что результирующая диаграмма адаптивной антенной решетки состоит из двух частей:

- 1) стационарной (исходной) диаграммы направленности  $G_q(\theta)$ ,
- 2) диаграммы в виде взвешенной суммы ортогональных собственных диаграмм.

Отметим также, что согласно (5.178) весовые коэффициенты при собственных диаграммах, соответствующих  $\lambda = \lambda_0$ , равны нулю, так как  $\mu_i - \mu_{\min} = 0$ . Следовательно, собственные диаграммы, соответствующие  $\lambda_0$ , можно не учитывать. Длительность переходного процесса формирования результирующей диаграммы (5.178) определяется величинами  $\alpha_i$ , зависящими от соответствующих собственных значений, так что большему собственному значению соответствует более быстро устанавливающаяся составляющая диаграммы.

Целесообразность использования рассмотренного способа описания характеристик адаптивной антенной решетки с помощью собственных диаграмм можно проиллюстрировать на примере восьмиэлементной линейной решетки с  $d = \lambda/4$  при воздействии двух источников узкополосных помех, расположенных под углами  $\theta_1 = 18^\circ$  и  $\theta_2 = 22^\circ$  и характеризующихся примерно одинаковыми отношениями помеха-собственный шум приемника  $PR_1 = 1250$  и  $PR_2 = 1200$  соответственно. Ковариационная матрица  $\mathbf{R}_{nn}$  в этом случае имеет два отличных от  $\lambda_0$  собственных значения:  $\lambda_1 = 18544,4$  и  $\lambda_2 = 1057,58$ . Несмотря на то, что мощности помех примерно одинаковы, собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  существенно различаются из-за того, что угловое расстояние между источниками мало по сравнению с шириной диаграммы в стационарном состоянии.

Собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответствуют собственные диаграммы направленности  $g'_1(\theta)$  и  $g'_2(\theta)$ , показанные на рис. 5.20. Как видно из рисунка, диаграмма  $g'_1(\theta)$  имеет один главный лепесток, в который попадают излучения обоих источников помех. Полная выходная мощ-

ность, определяемая этой диаграммой, равна первому собственному значению  $\lambda_1$ :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1 + P_1 g_1'^2(\theta_1) + P_2 g_1'^2(\theta_2) = 18\,544. \quad (5.179)$$

Диаграмма  $g_2'(\theta)$  имеет два главных лепестка, и излучения источников помех попадают в разные лепестки. Полная выходная мощность, определяемая этой диаграммой, равна второму собственному значению  $\lambda_2$  и, следовательно,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_0} = 1 + P_1 g_2'^2(\theta_1) + P_2 g_2'^2(\theta_2) = 1057. \quad (5.180)$$

Хотя выходные сигналы, соответствующие обеим собственным диаграммам, содержат составляющие от двух источников помех, они, тем не менее, не коррелированы. Корреляционный момент выходных сигналов, определяемых собственными диаграммами, равен

$$E\{x_1^* x_2\} = E\{|J_1|^2\} g_1'(\theta_1) g_2'(\theta_1) + E\{|J_2|^2\} g_1'(\theta_2) g_2'(\theta_2). \quad (5.181)$$

Из (5.181) следует, что корреляционный момент может быть равен нулю, если произведение диаграмм  $\{g_1'(\theta)g_2'(\theta)\}$  положительно при  $\theta = \theta_1$  и отрицательно при  $\theta = \theta_2$ . На рис. 5.21 представлены диаграммы направленности антенной решетки в стационарном (исходном) и в установившемся (после адаптации) состояниях для рассматриваемого примера с двумя источниками помех.

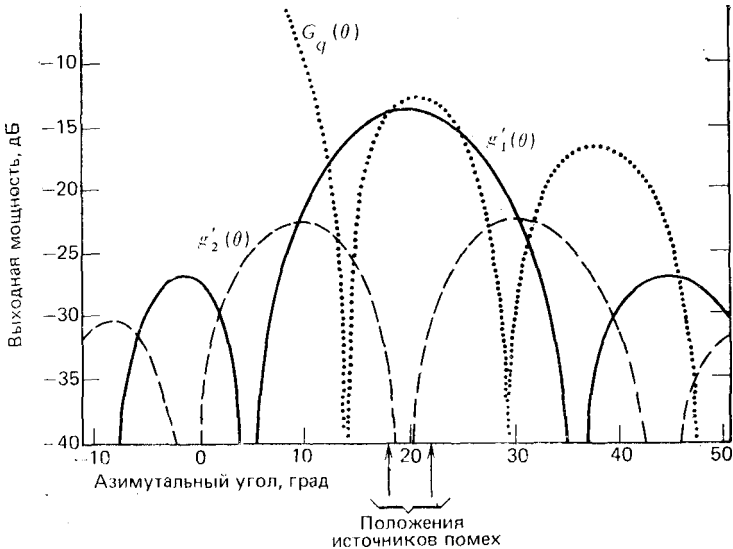


Рис. 5.20. Две собственные диаграммы  $g_1'(\theta)$  и  $g_2'(\theta)$  (к примеру с двумя источниками помех) [7]

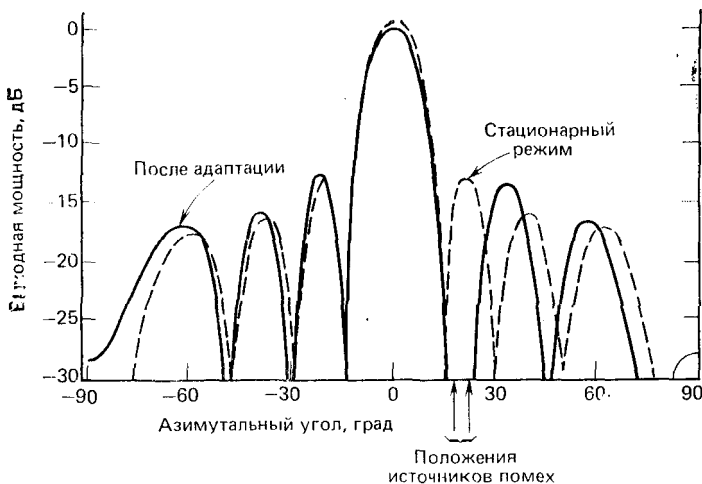
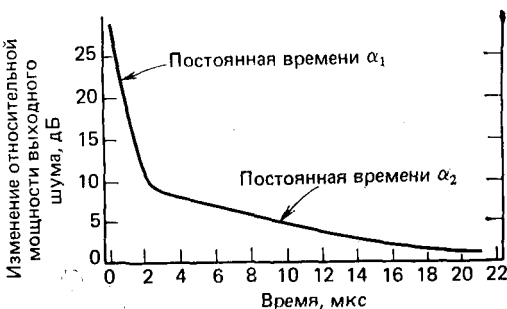


Рис. 5.21. Диаграммы направленности в стационарном режиме и после адаптации (к примеру с двумя источниками помех) [7]

Рис. 5.22. Изменение мощности выходного шума при адаптации (к примеру с двумя источниками помех) [7]



Зависимость изменения мощности выходного шума от времени в рассматриваемом примере с двумя источниками помех иллюстрируется рис. 5.22. На графике зависимости видны два участка с различной крутизной, что объясняется различием собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $R_{nn}$ .

### 5.3.4. Иллюстративный пример. Определение характеристик линейной $N$ -элементной адаптивной антенной решетки

Для иллюстрации основных результатов, полученных в предыдущих разделах, в данном разделе будут рассмотрены характеристики восьмизлементной линейной антенной решетки при различных условиях приема сигналов. Этот пример поможет определить зависимость наиболее важных характеристик системы от выбираемых параметров и условий приема сигналов.

**Начальные условия и допущения.** Предполагается, что в стационарном состоянии вплоть до момента времени  $t = 0$  в каналах системы присутствует только собственный шум приемника, а в момент времени  $t = 0$  включаются источники внешних помех. Среднее квадратичное значение напряжения собственного шума в каналах элементов антенны полагается одинаковым и равным  $n_0$ , поэтому собственное значение  $\lambda_0$  в стационарном состоянии равно  $|n_0|^2$ . Величина  $\lambda_0$  в соответствии с (5.133) будет определять минимальное значение коэффициента переда-

чи в контуре управления  $\mu_{\min}$ . Для схемы, показанной на рис. 5.17, удобно выбрать  $\mu_{\min} = 1$ . Будем предполагать, что коэффициенты усиления усилителей  $G$  устанавливаются соответствующим образом.

После выбора значения  $\mu_{\min}$  можно, используя формулу (5.117), представить  $\mu_i$  через отношение собственных значений

$$\mu_i / \mu_{\min} = \lambda_i / \lambda_0. \quad (5.182)$$

В исходном состоянии диаграмма направленности  $G_q(\theta)$  и соответствующий ей весовой вектор  $w_q$  определяются выражениями (5.81)—(5.84). Положив  $d = \lambda/2$ ,  $u = (\pi/2) \sin \theta$ ,  $a_k = 1$ , получим

$$w_{qk} = e^{-ju_0(2k-9)}, \quad (5.183)$$

$$G_q(\theta) = \frac{\sin 8(u-u_0)}{\sin(u-u_0)}. \quad (5.184)$$

Тогда составляющие вектора управления диаграммой  $b^*$  можно получить из выражений (5.134) и (5.82) в виде

$$c_k = (1 + \mu_{\min}) = 2, \quad (5.185)$$

$$b_k^* = c_k w_{qk} = 2e^{-ju_0(2k-9)}. \quad (5.186)$$

Условие получения максимума мощности для каждой из контуров ортонормированной системы, показанной на рис. 5.18, б, полностью аналогично соответствующему условию для системы с одним контуром управления. Поэтому по аналогии с (5.46) можно получить выражение для максимального коэффициента передачи контура управления в виде

$$\mu_{\max} = \mu_{\min} \left( \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} \right) = \left( \frac{\pi B_c \tau_0}{10} \right) - 1, \quad (5.187)$$

где  $\lambda_{\max}$  — максимальное собственное значение. Предполагается, что ширина полосы пропускания  $B_c$  и постоянная времени фильтра  $\tau_0$  одинаковы для всех контуров управления. Постоянную времени  $\tau_0$  можно найти из (5.187) в виде

$$\tau_0 = \left( \frac{10}{\pi B_c} \right) \left[ 1 + \mu_{\min} \left( \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} \right) \right] \quad (5.188)$$

или

$$\tau_0 = \left( \frac{10}{\pi B_c} \right) \left[ 1 + \mu_{\min} + \mu_{\min} \sum_{r=1}^R P_r g_m^2(\theta_r) \right]. \quad (5.189)$$

**Мощность шума на выходе антенной решетки и уменьшение ОСШ.** Показателем эффективности, представляющим наибольший интерес, является выигрыш в ОСШ, обеспечиваемый адаптивной решеткой по сравнению с обычной при одной и той же помеховой ситуации. Однако для получения представления об эффективности системы, как правило, вполне достаточно рассмотреть изменение мощности выходного шума в процессе адаптации. Поскольку собственный шум приемника и сигналы источников внешних помех статистически независимы, полная мощность шума на выходе равна сумме мощностей собственного шума и помех.

Выходная мощность, обусловленная только собственным шумом каналов приемника, определяется выражением

$$|y_{0n}(t)|^2 = \sum_{k=1}^N |w_k n_k|^2 = \sum_{i=1}^N |\omega'_i n_0|^2. \quad (5.190)$$

Подставив в это выражение  $\omega'_i$  из (5.175), получим

$$|y_{0n}(t)|^2 = |\bar{n}_0|^2 \sum_{i=1}^k [1 - A_i(t)]^2 |\omega'_q i|^2, \quad (5.191)$$

где

$$A_i(t) = (1 - e^{-\alpha_i t}) \left[ \frac{\mu_i - \mu_0}{1 + \mu_i} \right]. \quad (5.192)$$

Из (5.192) видно, что  $A_i(t)$  обращаются в нуль при  $t = 0$  и при  $\mu_i = \mu_0$ . Поэтому в исходном состоянии при  $t = 0$

$$|y_{0n}(0)|^2 = |\bar{n}_0|^2 \sum_{i=1}^N |\omega'_{q_i}|^2 = |\bar{n}_0|^2 \sum_{k=1}^N |\omega_{q_k}|^2, \quad (5.193)$$

так как выходная мощность шума в этом случае должна быть одинаковой как в реальной, так и в эквивалентной ортонормированной системе. Следовательно, (5.191) можно переписать в виде

$$|y_{0n}(t)|^2 = |\bar{n}_0|^2 \sum_{k=1}^N |\omega_{q_k}|^2 - \sum_{i=1}^N [2 - A_i(t)] A_i(t) |\omega'_{q_i}|^2. \quad (5.194)$$

Форма записи (5.194) особенно удобна тем, что здесь не требуется вычисления  $\omega'_{q_i}$ , соответствующих собственному значению  $\lambda_0$ , так как для них  $A(t) = 0$ .

Мощность помех, принимаемых от  $R$  внешних источников, равна сумме мощностей отдельных составляющих на выходе антенной решетки:

$$|y_{0j}(t)|^2 = |\bar{n}_0|^2 \sum_{r=1}^R P_r G^2(\theta_r, t), \quad (5.195)$$

где  $P_r$  — отношение помеха-собственный шум приемника по мощности для  $r$ -го источника;  $\theta_r$  — его угловая координата;  $G(\theta_r, t)$  определяется (5.178).

Полная мощность шума на выходе решетки будет равна сумме мощностей (5.194) и (5.195). Отношение этой мощности к мощности шума в стационарном состоянии (5.193) определяется как

$$\frac{|y_0(t)|^2}{|y_{0n}(0)|^2} = 1 + \left\{ \frac{\sum_{r=1}^R P_r G^2(\theta_r, t) - \sum_{i=1}^N [2 - A_i(t)] A_i(t) |\omega'_{q_i}|^2}{\sum_{k=1}^N |\omega_{q_k}|^2} \right\}. \quad (5.196)$$

Зависимость этого отношения от времени обычно используется для графической иллюстрации переходного процесса. Эта зависимость весьма удобна, так как она характеризует «общее» изменение весовых коэффициентов в процессе адаптации.

Степень уменьшения ОСШ по сравнению с его значением в стационарном режиме определяется соотношением

$$D_{sn} = \left( \frac{G_q^2(\theta_s)}{G^2(\theta_s, t)} \right) \left( \frac{|y_0(t)|^2}{|y_{0n}(0)|^2} \right), \quad (5.197)$$

где второй сомножитель дается формулой (5.196).

**Собственные значения и собственные векторы ковариационной матрицы шума.** Собственные значения эрмитовой ковариационной матрицы шума  $\mathbf{R}_{nn}$  находятся из уравнения

$$|\mathbf{R}_{nn} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0, \quad (5.198)$$

а соответствующие собственные векторы — из

$$\mathbf{R}_{nn} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad (5.199)$$

где матрица  $R_{nn}$  определяется соотношениями (5.100)—(5.102). Для удобства вычислений будем считать, что мощность собственного шума приемника равна единице. При этом мощности всех других сигналов будут равны их отношениям к мощности собственного шума приемника. Тогда в стационарном состоянии (при отсутствии внешних помех) матрица шума  $R_{nnq}$  является единичной. При наличии  $R$  источников внешних узкополосных помех матрица  $R_{nn}$  принимает вид

$$R_{nn} = I + \sum_{r=1}^R P_r M_r, \quad (5.200)$$

где  $M_r$  — ковариационная матрица  $r$ -й помехи.

Спектр широкополосной помехи можно представить в виде набора некоррелированных дискретных спектральных линий, как показано на рис. 5.12. Если через  $P_r$  обозначить полную мощность помехи, то мощность, соответствующая одной спектральной линии (полагая, что общее число таких линий составляет  $L_r$ ), будет

$$P_{rl} = P_r / L_r. \quad (5.201)$$

Пусть  $B_r$  — ширина полосы частот  $r$ -й помехи в процентах, тогда для  $l$ -й спектральной линии относительный сдвиг частоты будет

$$\left( \frac{\Delta f_l}{f_0} \right) = \left( \frac{B_r}{100} \right) \left[ -\frac{1}{2} + \left( \frac{l-1}{L_r-1} \right) \right]. \quad (5.202)$$

Ковариационную матрицу  $R_{nn}$  при наличии  $R$  внешних источников широкополосных помех можно записать теперь в виде

$$R_{nn} = I + \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^{L_r} P_{rl} M_{rl}. \quad (5.203)$$

Элемент  $m$ -й строки и  $n$ -го столбца матрицы  $M_{rl}$  определяется соотношением

$$(M_{rl})_{mn} = e^{j2\pi u_{rl}(n-m)}, \quad (5.204)$$

где

$$u_{rl} = \left( \frac{fl}{f_0} \right) \frac{\pi}{2} \sin \theta_r = \left( 1 + \frac{\Delta fl}{f_0} \right) \frac{\pi}{2} \sin \theta_r. \quad (5.205)$$

Поскольку адаптивная антенная решетка не может реагировать на сигналы вне полосы пропускания каналов  $B_c$ , то считается, что  $B_r$  не превышает  $B_c$ .

**Характеристики антенной решетки при различных условиях приема сигналов.** Используя полученные соотношения для ковариационной матрицы сигналов, можно рассчитать характеристики адаптивной решетки для любого заданного распределения источников как узкополосных, так и широкополосных помех. Как было уже показано, при наличии одиночного источника узкополосной помехи в области бокового лепестка исходной диаграммы направленности имеется лишь одно, отличное от  $\lambda_0 = 1$ , собственное значение, а результирующая диаграмма направленности после адаптации характеризуется незначительными искажениями в главном лепестке. При наличии в области бокового лепестка диаграммы двух близко расположенных источников узкополосных помех, обладающих примерно одинаковыми мощностями, имеются два существенно различных собственных значения, не равных  $\lambda_0$ . Из характеристик системы для рассмотренного примера с двумя источниками помех (рис. 5.21 и 5.22) видно, что искажения главного лепестка малы.

При наличии в области боковых лепестков четырех источников узкополосных помех имеются четыре, отличных от  $\lambda_0$ , собственных значения и для формирования нулей адаптивной диаграммы в направлениях на эти источники помех потребуются четыре степени свободы. В этом случае возможны значительные искажения главного лепестка результирующей диаграммы направленности.

Схема адаптивной антенной решетки, в которой на каждый элемент приходится один контур Хауэлса — Аппельбаума, наиболее пригодна для обработки узкополосных сигналов. Однако она может использоваться и при широкополосных помехах с относительной полосой до 20%.

В случае очень широкополосных помех потребуется трансверсальный фильтр на базе многоотводной ЛЗ в каждом канале, при этом к каждому отводу ЛЗ подключается контур Хауэлса — Аппельбаума.

При наличии одиночного источника узкополосной помехи в области главного лепестка исходной диаграммы направленности для удовлетворительного подавления помехи на выходе системы потребуется одна степень свободы (один нуль в диаграмме), однако результирующая диаграмма после адаптации будет сильно искажена по сравнению с исходной. В тех случаях, когда направление излучения источников помех совпадает с областью главного лепестка диаграммы направленности, мощность шума на выходе системы не может служить мерой, характеризующей ее эффективность, так как на результирующее ОСШ будут сильно влиять искажения формы главного лепестка диаграммы. В этих случаях могут быть введены ограничения на форму главного лепестка диаграммы направленности (см. разд. 5.4).

### 5.3.5. $N$ -элементная антенная решетка с ограничителями в контурах адаптивного управления

В разд. 5.3.2 было показано, что характеристики адаптивной решетки зависят как от внешнего шумового поля, так и от параметров контуров адаптивного управления. Уровни мощности внешних источников помех и их угловые положения определяют ковариационную матрицу шума и ее собственные значения. В свою очередь, собственные значения непосредственно влияют на характеристики решетки, так как и длительность переходного процесса при адаптации и шум контура адаптивного управления целиком зависят от этих собственных значений. При нестационарных условиях приема сигналов могут наблюдаться значительные изменения характеристик решетки, проявляющиеся в чрезмерном возрастании уровня шума контура адаптивного управления в случае сильной помехи или в очень низкой скорости сходимости в случае слабой помехи. Введя в контур адаптивного управления ограничитель, можно значительно снизить влияние изменяющегося уровня шума и уменьшить динамический диапазон сигналов в контуре адаптации без ухудшения рабочих характеристик системы [12].

В многоэлементной антенной решетке ограничители вводятся в цепи сопряженных сигналов аналогично тому, как это делалось в схеме с одним контуром адаптивного управления в разд. 5.2.3. Схема шестиэлементной адаптивной решетки с использованием ограничителей показана на рис. 5.23.

При использовании ограничителей входные сигналы корреляционных смесителей (обозначаемые ранее  $x_k^*$ ) теперь будут определяться как  $u_k^* = x_k^*/|x_k|$ , при этом амплитудные флуктуации сопряженных сигналов будут устранены и останутся только фазовые. Выходное напряжение корреляционного смесителя  $v_k$ , определяемое ранее (5.91), теперь запишется как

$$v_k' = k^2 \left( u_k^* \sum_{i=1}^N \omega_i x_i \right). \quad (5.206)$$

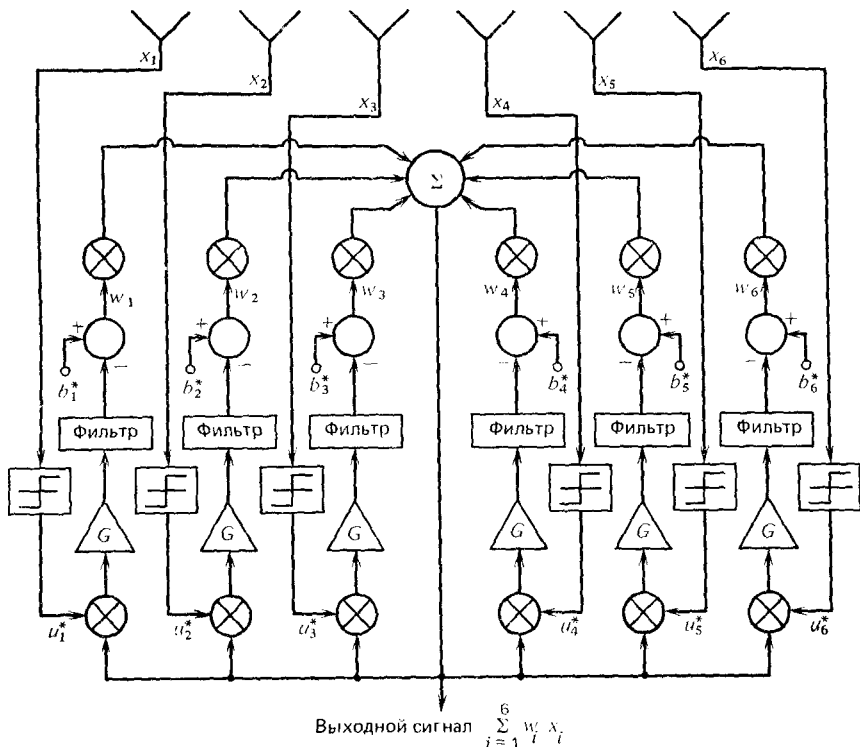


Рис. 5.23. Структурная схема шестиэлементной адаптивной антенной решетки с использованием ограничителей [7]

Из сравнения (5.206) и (5.91) видно, что  $u_k^*$  заменяет  $x_k^*$ . При этом результирующее матричное дифференциальное уравнение для модифицированной схемы принимает вид

$$\tau_0 \frac{dw}{dt} + [I + \gamma' M] w = b^*. \quad (5.207)$$

Это уравнение аналогично уравнению (5.103), если учесть, что  $M$  заменяет  $R_{nn}$  и  $\gamma' = k^2 G'$ . Матрица  $M$  является модифицированной (с учетом ограничения) ковариационной матрицей шума, элементы которой определяются формулой

$$M_{ml} = E \left\{ \frac{x_m^* x_l}{|x_m|} \right\}. \quad (5.208)$$

Полагая, что квадратурные составляющие каждого сигнала  $x_k$  являются гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , элементы ковариационной матрицы  $M$  можно вычислить непосредственно из элементов матрицы  $R_{nn}$ , используя соотношение [12]

$$M_{ml} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\sigma} (R_{nm})_{ml}. \quad (5.209)$$



Следовательно, элементы матриц  $M$  и  $R_{nl}$  отличаются лишь множителем  $(1/\sigma)\sqrt{\pi/8}$ . Поэтому эффективные постоянные времени, определяющие скорость сходимости и уровень шума контура управления, должны умножаться на этот же коэффициент, в результате чего уменьшается зависимость характеристик антенной решетки от мощности внешнего шумового поля.

Заметим, что при идентичных каналах введение ограничителей не приводит к изменению относительных величин элементов ковариационной матрицы входного сигнала и соответствующих собственных значений. Поэтому в случаях, характеризуемых большим разбросом собственных значений, введение ограничителей не приводит к уменьшению этого разброса, которое необходимо для обеспечения как малой длительности переходного процесса, так и малого уровня шума контура адаптивного управления. Тем не менее использование ограничителей всегда уменьшает динамический диапазон сигналов в контурах адаптивной подстройки, тем самым упрощая их техническую реализацию.

#### 5.4. ВВЕДЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ФОРМУ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Несмотря на то, что с помощью антенной решетки, максимизирующей ОСШ, формированием нуля диаграммы в направлении источника помехи последняя может подавляться при некоторых положениях источника помехи (особенно соответствующих области главного лепестка диаграммы направленности), форма главного лепестка диаграммы может быть настолько искажена, что ОСШ фактически будет ухудшаться. Кроме того, полезные сигналы иногда могут иметь такой уровень мощности, который может вызвать появление нежелательных реакций адаптивного процессора, приводящих к искажению формы полезного сигнала или его подавлению. Для предотвращения возможности такого ухудшения характеристик можно ввести ограничения так, чтобы адаптивный процессор сохранял неизменными параметры полезных сигналов, принимаемых главным лепестком диаграммы направленности, и обеспечивал одновременно хорошее подавление помехи, поступающей на боковые лепестки. Рассматриваемые здесь методы ограничений были предложены в работе [15].

Основные методы введения ограничений для главного лепестка диаграммы направленности антенной решетки можно классифицировать следующим образом.

1. Во временной области. При отсутствии полезного сигнала в главном лепестке диаграммы процессор осуществляет адаптацию для подавления помехи. Полученные при этом адаптивные весовые коэффициенты поддерживаются неизменными до следующего периода адаптации. Несмотря на то, что при таком подходе с помощью адаптивного процессора параметры полезных сигналов в главном лепестке диаграммы сохраняются неизменными, в системе могут возникать искажения из-за воздействия помехи в направлении главного лепестка. Кро-

ме того, такая система будет неудовлетворительно работать при действии мерцающих помех.

2. В частотной области. Если все помехи более широкополосны, чем полезный сигнал, то при введении соответствующего ограничения адаптивный процессор не будет реагировать на полезный сигнал и будет производить адаптацию лишь по тем частотным составляющим, которые находятся вне полосы полезного сигнала. При таком подходе эффективность подавления может до некоторой степени уменьшаться, а форма главного лепестка диаграммы — существенно искажаться.

3. В пространственной области (по углу). Можно выделить три метода введения ограничений для главного лепестка диаграммы направленности в установившемся режиме на основе использования: а) пилот-сигналов; б) пространственных фильтров до адаптивного процессора; в) управляемых пространственных фильтров. Эти методы также полезны при воздействии сигналов малой длительности, так как они уменьшают скорость адаптации для сигналов, принимаемых по главному лепестку диаграммы направленности антенной решетки.

Характеристики систем при использовании методов ограничений как во временной, так и в частотной областях в значительной степени зависят от типа радиолокационной системы и помеховой ситуации. Применение этих методов не позволяет избежать искажений диаграммы, если помеха действует в направлении главного лепестка. Поэтому наибольший интерес представляют методы ограничений в пространственной области. Далее рассматривается каждый из трех указанных методов ограничения по углу.

#### 5.4.1. Использование пилот-сигналов

Для иллюстрации методов введения ограничений с использованием пилот-сигнала рассмотрим многоканальное устройство компенсации помех, принимаемых по боковым лепесткам диаграммы направленности (КБЛ), схема которого приведена на рис. 5.24. Отметим, что представленные здесь интеграторы с цепями обратной связи в каждом канале аналогичны интегрирующим фильтрам, используемым в контурах адаптивного управления в схеме Хауэлса—Аппельбаума.

Пилот-сигналы служат для формирования диаграммы направленности и сохранения неизменного значения КНД (тем самым позволяя избежать уменьшения ОСШ). Так же пилот-сигналы вводятся в каждый канал устройства и представляют собой сигналы непрерывного излучения, которые могут быть легко выделены из полосы частот полезного сигнала. В данном случае для управления диаграммой направленности нет необходимости использовать фазовращатели, показанные на рис. 5.24, так как вводимые пилот-сигналы могут иметь определенные фазовые соотношения, соответствующие требуемому направлению максимума диаграммы. Амплитуды и фазы вводимых пилот-сигналов  $s_1$ — $s_4$  могут быть представлены вектором  $\mu s$ , где  $s$  — вектор единичной длины и  $\mu$  — скалярный множитель. Опорный сигнал представляется пилот-сигналом  $s_0$ .

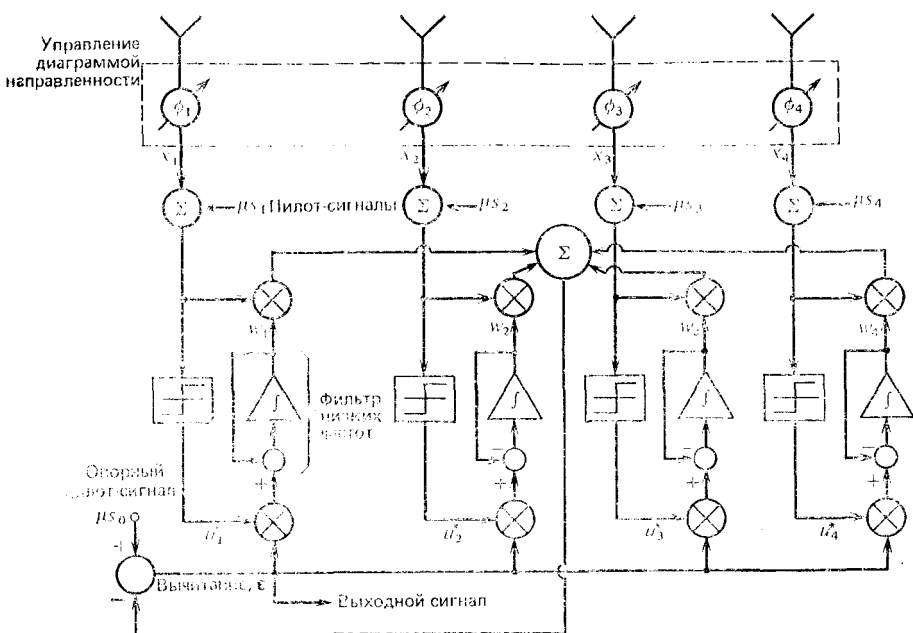


Рис. 5.24. Структурная схема многоканального КБЛ с использованием пилот-сигнала для управления диаграммой направленности

Дифференциальное уравнение для весового вектора показанного на рис. 5.24 устройства с контурами адаптивного управления можно записать в виде

$$\frac{dw}{dt} = \mathbf{u}^*(t) \varepsilon(t) - \mathbf{w}(t). \quad (5.210)$$

Поскольку  $\varepsilon = \mu s_0 - \mathbf{x}^T \mathbf{w}$ , то, учтя результаты разд. 5.3.5 и вычислив математическое ожидание обеих частей (5.210), получим

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = g\mu \mathbf{r}_{x s_0} - [\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx}] \mathbf{w}, \quad (5.211)$$

где  $g$  — коэффициент усиления, учитывающий прохождение сигнала через корреляционный смеситель и ограничитель. Решение уравнения (5.211) в установившемся режиме имеет вид

$$\mathbf{w}_{ss} = [\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx}]^{-1} g\mu \mathbf{r}_{x s_0}. \quad (5.212)$$

При отсутствии полезного сигнала

$$\mathbf{x} = \mathbf{n} + \mu \mathbf{s}, \quad (5.213)$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\mu \mathbf{s}$  — векторы шума и пилот-сигнала соответственно. Поэтому

$$\mathbf{R}_{xx} \triangleq E \{\mathbf{x}^* \mathbf{x}^T\} = \mathbf{R}_{nn} + \mu \mathbf{s}^* \mathbf{s}^T, \quad (5.214)$$

$$\mathbf{r}_{x s_0} \triangleq E \{\mathbf{x}^* s_0\} = \mu \mathbf{s}^* s_0. \quad (5.215)$$

Подставив формулы (5.214) и (5.215) в (5.212), можно показать, что

$$\mathbf{w}_{ss} = \frac{\mathbf{K}^{-1} \mathbf{s}^* g \mu^2 s_0}{1 + g \mu^2 \mathbf{s}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s}^*}, \quad (5.216)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{I} + g \mathbf{R}_{nn}$ . Подстановка выражения для  $\mathbf{K}^{-1}$  в (5.216) дает

$$\mathbf{w}_{ss} = \frac{(\mathbf{I} + g \mathbf{R}_{nn})^{-1} \mathbf{s}^* g \mu^2 s_0}{1 + g \mu^2 \mathbf{s}^T (\mathbf{I} + g \mathbf{R}_{nn})^{-1} \mathbf{s}^*}. \quad (5.217)$$

Для сильных пилот-сигналов  $\mu^2 \rightarrow \infty$  и выражение (5.217) принимает вид

$$\mathbf{w}_{ss} \simeq \left[ \frac{(\mathbf{I} + g \mathbf{R}_{nn})^{-1} \mathbf{s}^*}{\mathbf{s}^T (\mathbf{I} + g \mathbf{R}_{nn})^{-1} \mathbf{s}^*} \right] s_0. \quad (5.218)$$

Из выражения (5.218) следует, что если вектор  $\mathbf{s}$  имеет составляющие с одинаковыми амплитудами (соответствующими выходным напряжениям элементов), то значение главного луча диаграммы направленности будет определяться как

$$\mathbf{s}^T \mathbf{w}_{ss} \simeq s_0, \quad (5.219)$$

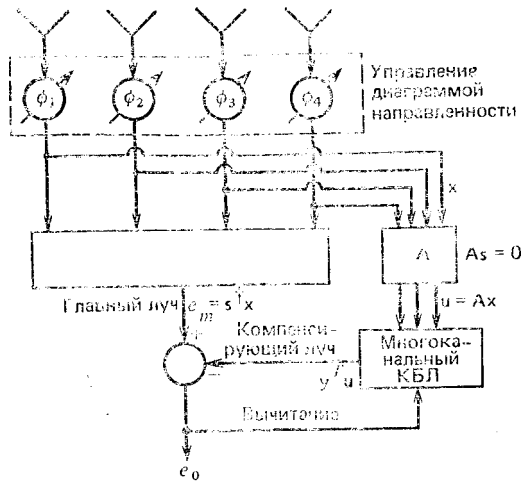
т. е. будет равно постоянной величине, не зависящей от ковариационной матрицы шума  $\mathbf{R}_{nn}$  (и, следовательно, не зависящей от любого принимаемого сигнала).

В схеме на рис. 5.24 используется только одна совокупность пилот-сигналов для реализации единственного ограничения. Можно реализовать также и многие ограничения, вводя соответствующие совокупности пилот-сигналов на разных частотах. Пилот-сигналы могут вводиться непосредственно на входе каждого канала, при этом будет осуществляться компенсация любых амплитудных и фазовых погрешностей, что является достоинством данного метода. В случае сильных пилот-сигналов элементы в каналах должны обладать большим динамическим диапазоном, а сами такие сигналы должны отфильтровываться на выходе антенной решетки.

#### 5.4.2. Использование предварительной пространственной фильтрации

Совершенно иной метод введения ограничений в адаптивной антенной решетке основан на использовании «предварительной (до адаптивного процессора) пространственной фильтрации», при которой с помощью фазовращателей формируются два управляемых луча. Общая структура такой системы показана на рис. 5.25. В этой системе главный луч формируется с помощью фиксированных весовых коэффициентов, представляемых вектором  $\mathbf{s}^*$  (единичной длины). Вторым лучом (называемый «компенсирующим») является адаптивным и формируется многоканальным КБЛ, входные сигналы каждого канала которого образуются с помощью пространственного фильтра, характеризуемого матрицей преобразования  $\mathbf{A}$ . Число выходных каналов пространственного фильтра на единицу меньше числа входных каналов. Преобразование  $\mathbf{A}$  выбирается таким, чтобы в направлении глав-

Рис. 5.25. Общая структурная схема пространственной фильтрации с предварительной адаптацией



ного луча сохранялся постоянный коэффициент передачи, а для этого необходимо, чтобы  $As = 0$ .

Для схемы на рис. 5.25 имеем:

$$e_m = s^T x = x^T s^*, \quad (5.220)$$

$$e_0 = e_m - y^T u, \quad (5.221)$$

$$u = Ax. \quad (5.222)$$

Поэтому

$$e_0 = s^T x - y^T Ax = (s^* - A^T y)^T x = w^T x. \quad (5.223)$$

Общий весовой вектор для системы в целом может быть записан в виде

$$w = s^* - A^T y. \quad (5.224)$$

Следовательно,

$$s^T w = s^T (s^* - A^T y) = \|s\|^2 - s^T A^T y. \quad (5.225)$$

Поскольку матрица  $A$  была выбрана так, чтобы  $As = 0$ , то

$$s^T w = \|s\|^2 = 1. \quad (5.226)$$

Обозначим ковариационную матрицу вектора  $u$  через

$$R_{uu} \triangleq E \{u^* u^T\} = E \{A^* x^* x^T A^T\} = A^* R_{xx} A^T. \quad (5.227)$$

Блок многоканального КБЛ вырабатывает весовой вектор  $y$ , удовлетворяющий матричному дифференциальному уравнению [соответствующему (5.210)]

$$\frac{dy}{dt} = g u^* e_0 - y. \quad (5.228)$$

В установившемся режиме (когда  $dy/dt = 0$ ) получим

$$[I + g R_{uu}] y = g E \{u^* e_m\}, \quad (5.229)$$

где  $g$  — коэффициент усиления. Правая часть выражения (5.229) характеризует взаимную корреляцию вектора  $e_m$  с каждой составляющей вектора  $\mathbf{u}$ . Используя формулы (5.220), (5.222) и (5.227), определяющие величины, входящие в (5.229), можно получить

$$(\mathbf{I} + g\mathbf{A}^* \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}^T) \mathbf{y} = g\mathbf{A}^* \mathbf{R}_{xx} \mathbf{s}^*. \quad (5.230)$$

Умножив (5.230) слева на  $\mathbf{A}^T$  и учтя (5.224), можно показать, что весовой вектор  $\mathbf{w}$  в установившемся режиме удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{I} + g\mathbf{A}^T \mathbf{A}^* \mathbf{R}_{xx}) \mathbf{w}_{ss} = \mathbf{s}^*. \quad (5.231)$$

Если вектор  $\mathbf{x}$  не содержит полезного сигнала, то матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  может быть заменена матрицей  $\mathbf{R}_{nn}$ .

В том случае, когда  $g$  очень велико, из (5.230) получим

$$\mathbf{A}^* \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{A}^* \mathbf{R}_{xx} \mathbf{s}^* \quad (5.232)$$

или

$$\mathbf{A}^* \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{s}^* - \mathbf{A}^T \mathbf{y}) = \mathbf{A}^* \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{ss} = 0. \quad (5.233)$$

Поскольку  $\mathbf{A} \mathbf{s} = 0$  и матрица преобразования  $\mathbf{A}$  имеет ранг  $N - 1$ , то из выражения (5.233) следует, что  $\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}$  пропорционально  $\mathbf{s}^*$ , т. е.

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{ss} = \mu \mathbf{s}^* \quad (5.234)$$

или

$$\mathbf{w}_{ss} = \mu \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{s}^*, \quad (5.235)$$

где  $\mu$  — коэффициент пропорциональности, который можно найти из формулы (5.226). Подставив  $\mu = (\mathbf{s}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{s}^*)^{-1}$  в выражение (5.235), получим

$$\mathbf{w}_{ss} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{s}^*}{\mathbf{s}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{s}^*} \quad (5.236)$$

в качестве решения, к которому приближается общий весовой вектор, когда величина  $g$  становится очень большой.

Несмотря на то, что предварительная пространственная фильтрация, в отличие от рассмотренного случая, не связана с проблемами обеспечения динамического диапазона, тем не менее она требует создания нескольких лучей, что может оказаться дорогостоящим. Кроме того, точность фазовращателей, используемых для управления диаграммой, будет влиять на эффективность вводимых ограничений, однако это влияние характерно для всех трех рассматриваемых здесь методов.

В работе [15] рассмотрены два конкретных способа реализации предварительной пространственной фильтрации по схеме, приведенной на рис. 5.25, с использованием: 1) матрицы преобразования Батлера (Butler) для получения ортогональных лучей, один из которых полагался «главным» и 2) матрицы преобразования  $\mathbf{A}$ , соответствующей поэлементному вычитанию сигналов. Несмотря на отдельные различия, суть способа, с помощью которого в таких системах вводятся ограничения, оказывается той же самой, что и в общей структуре, соответствующей схеме на рис. 5.25.

### 5.4.3. Использование управляемых пространственных фильтров

На рис. 5.26 показан контур адаптивного управления Хауэлса—Аппельбаума с ограничениями, вводимыми непосредственно в контур с помощью пространственного матричного фильтра. Назначением такого пространственного фильтра является устранение любых составляющих сигнального вектора  $\mathbf{v}$ , коллинеарных управляющему вектору

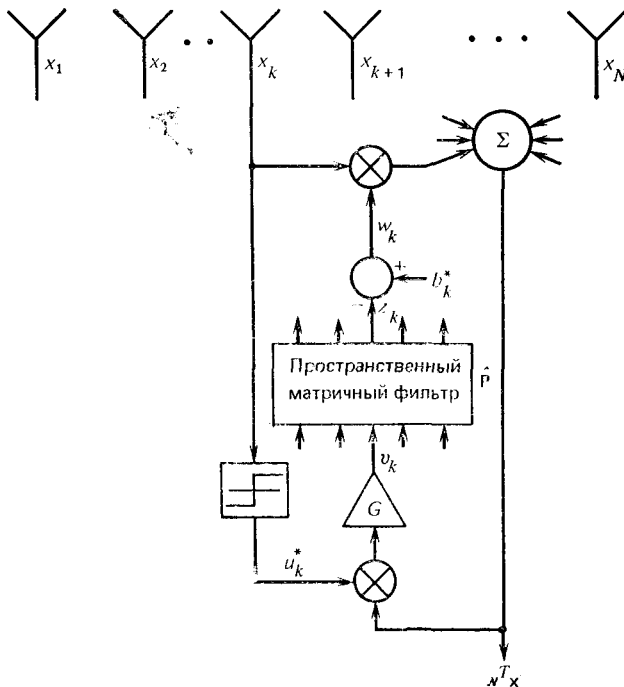


Рис. 5.26. Структурная схема адаптивного процессора с пространственным фильтром в контуре управления

ру  $\mathbf{b}^*$  (единичной длины), с помощью операции проектирования. Устранение таких составляющих приведет к тому, что коэффициент передачи антенной решетки в направлении, задаваемом вектором  $\mathbf{b}$ , будет постоянным.

Для схемы на рис. 5.26

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}^*(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{w}(t). \quad (5.237)$$

Вычислив математические ожидания всех величин из (5.237), можно заметить, что в установившемся режиме

$$\mathbf{v} = g \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{ss}, \quad (5.238)$$

где  $g$  — коэффициент усиления. Теперь

$$\mathbf{z} = \widehat{\mathbf{P}} \mathbf{v} = g \widehat{\mathbf{P}} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{ss}. \quad (5.239)$$

С учетом равенства  $\mathbf{w} = \mathbf{b}^* - \mathbf{z}$  выражение (5.239) можно переписать в виде

$$(\mathbf{I} + g\widehat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{xx})\mathbf{w}_{ss} = \mathbf{b}^*. \quad (5.240)$$

Проекционная матрица, соответствующая пространственному фильтру, устраняющему составляющие сигнала в направлении  $\mathbf{b}$ , определяется выражением

$$\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \mathbf{b}^*\mathbf{b}^T. \quad (5.241)$$

Подставив (5.241) в (5.240), получим

$$(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx} - g\mathbf{b}^*\mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xx})\mathbf{w}_{ss} = \mathbf{b}^* \quad (5.242)$$

или

$$[(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})\mathbf{R}_{xx}^{-1} - g\mathbf{b}^*\mathbf{b}^T]\mathbf{R}_{xx}\mathbf{w}_{ss} = \mathbf{b}^*. \quad (5.243)$$

Перепишем (5.243) в виде

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{w}_{ss} = [\mathbf{Q} - g\mathbf{b}^*\mathbf{b}^T]^{-1}\mathbf{b}^*, \quad (5.244)$$

где  $\mathbf{Q} \triangleq (\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})\mathbf{R}_{xx}^{-1}$ . Применяв формулы для обращения матриц из приложения Г, получим

$$[\mathbf{Q} - g\mathbf{b}^*\mathbf{b}^T]^{-1}\mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{R}_{xx}(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^*}{1 - g\mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xx}(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^*}. \quad (5.245)$$

Знаменатель выражения (5.245) можно упростить следующим образом:

$$\begin{aligned} g\mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xx}(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^* &= \mathbf{b}^T(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{I})(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^* = \\ &= \mathbf{b}^T\mathbf{b}^* - \mathbf{b}^T(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^* = 1 - \mathbf{b}^T(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^*. \end{aligned} \quad (5.246)$$

Подставив выражения (5.245) и (5.246) в (5.244), получим соотношение, которому должен удовлетворять весовой вектор в установленном режиме:

$$\mathbf{w}_{ss} = \frac{(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^*}{\mathbf{b}^T(\mathbf{I} + g\mathbf{R}_{xx})^{-1}\mathbf{b}^*}. \quad (5.247)$$

Введение проекционной матрицы вида  $\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \mathbf{b}^*\mathbf{b}^T$  накладывает ограничение на значение диаграммы антенной решетки только для направления, задаваемого вектором  $\mathbf{b}$ . Если ограничения должны распространяться на определенную область главного лепестка диаграммы, а не только на одно направление, то потребуются введение дополнительных ограничений. Кроме этого, желательно, чтобы эти ограничения представлялись ортогональными векторами, что позволит снизить требования к точности пространственного матричного фильтра. Матрица проектирующего фильтра для семейства ограничений в ортогональном виде может быть записана как

$$\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \sum_{m=0}^M \mathbf{c}_m \mathbf{c}_m^\dagger, \quad (5.248)$$

где  $\mathbf{c}_m \mathbf{c}_n^\dagger = \delta_{mn}$  — символ Кронекера. Здесь  $\mathbf{c}_m$  — векторы ограничений.



Ограничение, обеспечивающее сохранение неизменным значение КНД в максимуме луча, обычно называют ограничением «нулевого порядка». Решение, получаемое для весового вектора при ограничении нулевого порядка, будет отличаться от решения, найденного без ограничений ( $\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$ ), только постоянным скалярным множителем.

Ограничение только в одном направлении обычно не оказывает достаточного влияния на диаграмму и поэтому не находит широкого применения. Рассмотрим использование множественных ограничений для увеличения области главного луча (на которую распространяются указанные ограничения) с помощью фиксации нескольких первых производных по углу диаграммы в интересующих направлениях. Ограничение, основанное на управлении  $m$ -й производной, обычно называется ограничением « $m$ -го порядка».

Для того чтобы получить вектор ограничения  $\mathbf{c}_m$ , соответствующий  $m$ -й производной функции, описывающей диаграмму, заметим, что такая функция в случае линейной антенной решетки может быть записана как

$$G(\theta) = \sum_{k=1}^N \omega_k e^{jk\theta}. \quad (5.249)$$

Отсюда следует, что  $m$ -я производная функции  $G(\theta)$  определяется выражением

$$G^m(\theta) = \sum_{k=1}^N (jk)^m \omega_k e^{jk\theta}. \quad (5.250)$$

Поэтому составляющие вектора  $\mathbf{c}_m$  (для  $m = 0, 1$  и  $2$ ) записываются как

$$\mathbf{c}_{0i} = d_0, \quad (5.251)$$

$$\mathbf{c}_{1i} = e_0 + e_{1i}, \quad (5.252)$$

$$\mathbf{c}_{2i} = f_0 + f_1 i + f_2 i^2. \quad (5.253)$$

Постоянные, определяющие составляющие вектора  $\mathbf{c}_m$ , выбираются так, чтобы все  $\mathbf{c}_m$  были единичной длины и взаимно ортогональными.

Представим вектор  $\mathbf{w}_q$  (вектор весовых коэффициентов требуемой диаграммы) в виде

$$\mathbf{w}_q = a_0 \mathbf{c}_0 + a_1 \mathbf{c}_1 + a_2 \mathbf{c}_2 + a_r \mathbf{c}_r, \quad (5.254)$$

где  $\mathbf{c}_r$  — некоторый «остаточный» вектор, ортогональный  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ ;

$$a_i = \mathbf{w}_q^T \mathbf{c}_i \text{ при } i = 0, 1, 2, \quad (5.255)$$

а

$$a_r \mathbf{c}_r = \mathbf{w}_q - \sum_{i=0}^2 a_i \mathbf{c}_i. \quad (5.256)$$

Соответствующая введенным ограничениям матрица  $\widehat{\mathbf{P}}$  имеет вид

$$\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \mathbf{c}_0 \mathbf{c}_0^T - \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1^T - \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2^T - \dots - \mathbf{c}_r \mathbf{c}_r^T. \quad (5.257)$$

Пространственный матричный фильтр, построенный в соответствии с (5.257), формирует сигнальный вектор  $z$ , не содержащий составляющих в направлении векторов  $c_0, c_1, c_2$ . Затем снова прибавляется вектор  $w_q$  (на схеме рис. 5.26 в точке, где вводится  $b^*$ ) для формирования результирующего весового вектора  $w$ .

### 5.5. ОГРАНИЧЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ИЗВЕСТНОГО УРОВНЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА

На практике встречаются случаи, когда может отсутствовать априорная информация либо о структуре полезного сигнала, либо о направлении его прихода. Тем не менее за счет использования способности адаптивной антенной решетки распознавать уровни сигналов возможно решение задачи приема слабого полезного сигнала при наличии сильных помех. Такая задача может быть решена введением ограничения в алгоритм адаптации с целью исключения возможности подавления всех сигналов (включая помехи), уровень которых не превосходит определенной величины. За счет выбора порогового уровня, превышающего уровень мощности входного полезного сигнала, слабый полезный сигнал подавляться не будет, тогда как все помехи, превысившие этот пороговый уровень, будут подавлены.

Наиболее распространенный метод распознавания сигналов по уровню их мощности сформулирован в [16] и основан на введении в контур адаптивного управления Хауэлса—Аппельбаума обратной связи. Для получения такого же результата в [17] предложен другой метод, основанный на использовании вектора управления диаграммой направленности наряду с дополнительным сигналом смещения. В качестве иллюстрации первого метода рассмотрим антенную решетку с адаптивным управлением нулями диаграммы направленности, показанную на рис. 5.27. Работа контуров управления подстройкой весовых коэффициентов осуществляется в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\frac{dw}{dt} = \alpha \{x(t) [x_0(t) - x^\dagger(t) w] - aw\}, \quad (5.258)$$

где  $a$  — скалярный множитель. С помощью дополнительной ветви обратной связи, минующей интегратор, обеспечивается установка порогового уровня (по мощности).

При достаточно малом значении  $\alpha$  можно считать, что вектор  $w$  в (5.258) аппроксимируется своим математическим ожиданием так, что

$$\frac{dw}{dt} = \alpha (r_{xx_0} - [R_{xx} + aI] w). \quad (5.259)$$

Тогда весовой вектор в установившемся режиме будет

$$w = [R_{xx} + aI]^{-1} r_{xx_0}. \quad (5.260)$$

При наличии полезного сигнала выходное отношение сигнал-помеха + шум можно записать как

$$\text{ОСШ} = 1 / [(P_e / s_0 - w^\dagger s)^2] - 1], \quad (5.261)$$

где  $P_e$  — общая выходная мощность;  $\mathbf{s}$  — вектор направления для полезного сигнала;  $s_0$  — составляющая полезного сигнала в основном канале. Если ввести обозначение

$$SN' = \frac{|s_0 - \mathbf{w}^\dagger \mathbf{s}|^2}{P_e}, \quad (5.262)$$

то

$$\text{ОСШ} = \frac{1}{(1/SN') - 1}. \quad (5.263)$$

Можно показать, что

$$SN' = \frac{\left| s_0 - \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{Qr}_{xx_0})_i^* (\mathbf{Qs})_i}{\lambda_i + a} \right|^2}{a^2 \sum_{i=1}^N \frac{|(\mathbf{Qr}_{xx_0})_i|^2}{\lambda_i (\lambda_i + a)^2} + P_{e_0}}, \quad (5.264)$$

где  $\mathbf{Q}$  — унитарное преобразование, приводящее матрицу  $\mathbf{R}_{xx}$  к диагональному виду;  $\lambda_i$  — собственные значения  $\mathbf{R}_{xx}$ ;  $P_e$  — минимальная мощность выходного сигнала антенной решетки  $e(t)$ , когда  $a = 0$ .

На основе полученных результатов и уравнения (5.258) нетрудно показать, что за счет выбора параметра  $a$  можно исключить подавление полезного сигнала и обеспечить одновременно компенсацию помех с высоким уровнем мощности. Поэтому выходное отношение сигнал-

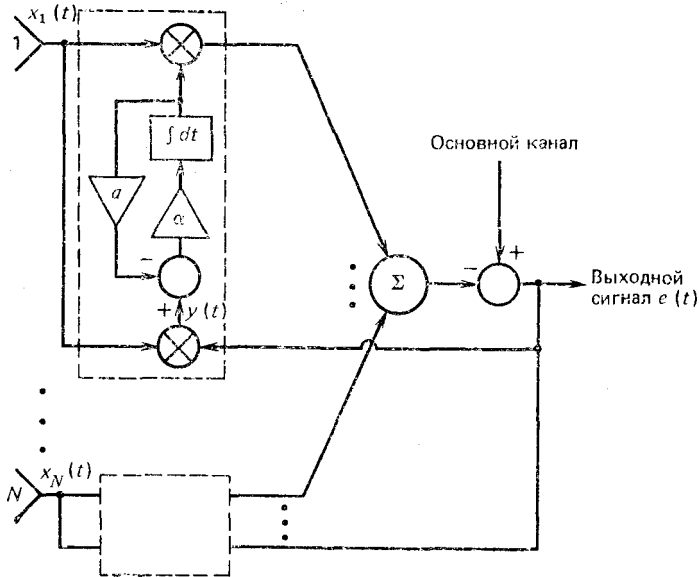


Рис. 5.27. Структурная схема антенной решетки с адаптивным управлением нулями диаграммы направленности, содержащая  $N$  вспомогательных каналов

помеха + шум будет выше, чем в случае использования в контуре обратной связи только интегратора.

Для максимизации выходного ОСШ параметр  $a$  выбирается таким, чтобы максимизировалась величина  $SN'$ . Для иллюстрации выбора параметра  $a$  рассмотрим случай воздействия помехи, излучаемой одним источником, при котором

$$\mathbf{R}_{xx} = J\mathbf{v}_J\mathbf{v}_J + P_s\mathbf{v}_s\mathbf{v}_s, \quad (5.265)$$

$$\mathbf{r}_{xx_0} = \sqrt{J_0 J} \mathbf{v}_J e^{j\varphi_J} + \sqrt{P_{s_0} P_s} \mathbf{v}_s e^{j\varphi_s}, \quad (5.266)$$

где  $J_0$  — мощность помехи в основном канале;  $J$  — мощность помехи во вспомогательном канале (полагается одинаковой во всех вспомогательных каналах);  $\mathbf{v}_J$  — вектор, определяющий направление на источник помехи. Для полезного сигнала аналогично определяются величины  $P_{s_0}$ ,  $P_s$  и  $\mathbf{v}_s$ . Обозначения  $\varphi_J$  и  $\varphi_s$  характеризуют относительные фазовые соотношения между сигналами основного и вспомогательного каналов для помехи и полезного сигнала соответственно.

Если углы прихода полезного сигнала и помехи таковы, что векторы  $\mathbf{v}_s$  и  $\mathbf{v}_J$  ортогональны (это упрощает анализ), то выражение (5.264) принимает вид

$$SN' = \frac{P_{s_0} \left[ \frac{\sigma^2 + a}{\sigma^2 + a + NP_s} \right]^2}{a^2 N \left[ \frac{P_{s_0} P_s}{(NP_s + \sigma^2 + a)^2 (NP_s + \sigma^2)} + \frac{J_0 J}{(NJ + \sigma^2 + a)^2 (NJ + \sigma^2)} \right] + P_{e_0}}, \quad (5.267)$$

где  $\sigma^2$  — мощность собственного шума приемника вспомогательного канала.

При  $a = 0$  (что выполняется при обычном алгоритме МСКО с управляемым нулем диаграммы)

$$SN' = \frac{P_{s_0} \left[ \frac{\sigma^2}{NP_s + \sigma^2} \right]^2}{P_{e_0}} \Bigg|_{a=0}. \quad (5.268)$$

Полученный результат показывает, что величина  $SN'$  будет уменьшаться, как только входная мощность полезного сигнала в дополнительных каналах  $NP_s$  превысит уровень собственного шума приемника  $\sigma^2$ . Когда в (5.268)  $NP_s \gg \sigma^2$ , величина  $SN'$  становится обратно пропорциональной входной мощности полезного сигнала. В том случае, когда  $a \gg (NP_s + \sigma^2)$  и  $a \gg (NJ + \sigma^2)$ , выражение (5.267) принимает вид

$$SN' = \frac{P_{s_0}}{\frac{NP_s}{NP_s + \sigma^2} P_{s_0} + \frac{NJ}{NJ + \sigma^2} J_0 + P_{e_0}}. \quad (5.269)$$

Согласно этому результату подавление сигнала основного канала можно предотвратить, выбрав достаточно большое значение  $a$ . Однако параметр  $a$  в данном примере слишком велик, вследствие чего будет пред-

отвращено также и подавление помехи, о чем свидетельствует присутствии слагаемого  $NJJ_0/(NJ + \sigma^2)$  в знаменателе выражения (5.269).

Предположим далее, что мощность помехи в основном канале  $J_0$  номинально равна мощности помехи во вспомогательном канале, и выберем  $a = NP_s$ . Тогда величина  $SN'$  будет определяться выражением

$$SN' = \frac{0,25P_{s_0}}{\frac{P_{s_0}(NP_s - \sigma^2)^2}{4NP_s(NP_s + \sigma^2)} + \frac{(NP_s - \sigma^2)^2}{N[1 + (P_s/J)]^2(NJ + \sigma^2)} + P_{e_0}}. \quad (5.270)$$

При  $J \gg P_s$ ,  $P_s \gg \sigma^2$

$$SN' \simeq \frac{0,25P_{s_0}}{0,25P_{s_0} + P_{e_0}},$$

так что выражение для выходного отношения сигнал-помеха+шум в формуле (5.263) будет

$$\text{ОСШ} \simeq \frac{1}{4} \frac{P_{s_0}}{P_{e_0}}. \quad (5.271)$$

Таким образом, выходное отношение сигнал-помеха+шум теперь пропорционально мощности сигнала в основном канале, деленной на мощность выходного сигнала антенной решетки  $P_{e_0}$  (напомним, что  $P_{e_0}$  — минимальная мощность нескомпенсированных остатков, получающаяся при  $a = 0$ ). Из выражения (5.271) видно, что, когда  $J \gg P_s$  и  $P_s \gg \sigma^2$ , выходное отношение сигнал-помеха+шум можно значительно улучшить, выбрав коэффициент передачи усилителя в цепи обратной связи

$$a \simeq NP_s. \quad (5.272)$$

При таком значении  $a$  (когда  $J \gg P_s$  и  $P_s \gg \sigma^2$ ) предотвращается подавление относительно слабого полезного сигнала и подавляются помехи с высоким уровнем мощности.

## 5.6. ВЫВОДЫ

В данной главе рассмотрен адаптивный процессор Хауэлса—Апельбаума, максимизирующий выходное ОСШ, и показано, что он довольно близок к устройству обработки, реализующему алгоритм МСКО, из гл. 4. Адаптивный процессор Хауэлса—Апельбаума, как правило, применяется в тех ситуациях, когда полезный сигнал отсутствует, в противоположность процессору МСКО, для которого требуется наличие полезного сигнала. При этом вместо опорного сигнала используется вектор управления диаграммой направленности. Было показано, что процессор Хауэлса—Апельбаума характеризуется двумя режимами: статическим (когда полезный сигнал отсутствует) и режимом адаптации (когда присутствует полезный сигнал). Свойства алгоритма в переходном режиме наиболее легко описываются с помощью собственных диаграмм направленности, формируемых в результате преобразования к нормальным координатам, приводящим кова-

риационную матрицу входного сигнала к диагональному виду. Зависимость характеристик процессора от распределения собственных значений ковариационной матрицы такова, что сильные помеховые сигналы подавляются быстрее, а слабые — медленнее. Необходимость в расширении динамического диапазона устройств, используемых в процессоре Хауэлса—Аппельбаума, может быть уменьшена с помощью введения в контуры управления ограничителей. Это приводит к изменению ковариационной матрицы входного сигнала, однако не влияет на распределение ее собственных значений.

Были рассмотрены различные методы введения ограничений для алгоритма максимума ОСШ, которые основывались на использовании:

- 1) пилот-сигналов;
- 2) предварительных пространственных фильтров;
- 3) управляемых пространственных фильтров;
- 4) информации об уровне мощности полезного сигнала.

Близкая взаимосвязь, существующая между алгоритмами МСКО и Хауэлса—Аппельбаума, обуславливает сходство характеристик этих алгоритмов в переходном режиме. Зависимость эффективности алгоритма от распределения собственных значений ковариационной матрицы входного сигнала является недостатком и заставляет искать пути уменьшения указанной зависимости. Один из таких способов, обеспечивающих уменьшение чувствительности к распределению собственных значений и ускорение переходного процесса, основан на использовании алгоритма с непосредственным обращением ковариационной матрицы, который рассматривается в следующей главе.

### ЗАДАЧИ

1 [15]. Выведите выражение (5.216) из (5.212) следующим образом:

А. Подставьте (5.214) и (5.215) в (5.212).

Б. Положите  $\mathbf{K} = \mathbf{I} + g \mathbf{R}_{nn}$ .

В. Примените лемму обращения матрицы [формула (Г.10) из приложения Г] к полученному выражению.

2 [15]. Выведите выражение (5.231) из (5.229).

3 [15]. Используя соотношение

$$[\mathbf{Q} + c\mathbf{f}^T]^{-1} \mathbf{e} = \frac{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}}{1 + \mathbf{f}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}},$$

где  $\mathbf{Q}$  — невырожденная матрица размером  $(N \times N)$ ;  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  —  $N$ -мерные векторы из (5.244), покажите, что в результате указанной операции получается (5.245).

4 [15]. С помощью подстановки выражений (5.245) и (5.246) в (5.244) покажите, что весовой вектор в установившемся режиме будет определяться формулой (5.247).

5. Для того чтобы показать, что выражение (5.264) может быть получено из (5.262), определим отношение

$$SN' \triangleq \frac{\mathbf{w}'^{\dagger} \mathbf{s}' \mathbf{s}'^{\dagger} \mathbf{w}'}{\mathbf{w}'^{\dagger} \mathbf{R}'_{xx} \mathbf{w}'},$$

где

$$\mathbf{w}' = \left[ \frac{-\mathbf{w}}{1} \right], \quad \mathbf{s}' = \left[ \frac{\mathbf{s}}{s_0} \right], \quad \mathbf{R}'_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xx} & \mathbf{r}_{xx_0} \\ \mathbf{r}_{xx_0}^{\dagger} & P_0 \end{bmatrix}.$$

А. Покажите, что  $|s_0 - \mathbf{w}'^\dagger \mathbf{s}|^2 = \mathbf{w}'^\dagger \mathbf{s}' \mathbf{s}'^\dagger \mathbf{w}'$ .

Б. Покажите, что  $P_e \triangleq \mathbf{w}'^\dagger \mathbf{R}'_{xx} \mathbf{w}' = \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} - \mathbf{w}^\dagger \mathbf{r}_{xx_0} - \mathbf{r}_{xx_0}^\dagger \mathbf{w} + P_0$ .

В. Поскольку согласно (5.260)  $\mathbf{w} = [\mathbf{R}_{xx} + a\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{r}_{xx_0}$ , покажите, что

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{опт}} + \Delta \mathbf{w},$$

где  $\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xx_0}$  (винеровское решение), а  $\Delta \mathbf{w} = -a \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{w}$ .

Г. Подставьте  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{опт}} + \Delta \mathbf{w}$  в выражение для  $P_e$  из п. Б и покажите, что

$$P_e = P_{e_0} + \Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \Delta \mathbf{w},$$

где

$$P_{e_0} = P_0 - \mathbf{w}_{\text{опт}}^\dagger \mathbf{r}_{xx_0} - \mathbf{r}_{xx_0}^\dagger \mathbf{w}_{\text{опт}} + \mathbf{w}_{\text{опт}}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{\text{опт}} = P_0 - \mathbf{r}_{xx_0}^\dagger \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xx_0} = P_0 - \mathbf{w}_{\text{опт}}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{\text{опт}}.$$

*Указание.* Обратите внимание на то, что  $\Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{\text{опт}} + \mathbf{w}_{\text{опт}}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \Delta \mathbf{w} -$

$$- \Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{r}_{xx_0} - \mathbf{r}_{xx_0}^\dagger \Delta \mathbf{w} = 0,$$

поскольку  $\Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{\text{опт}} = \Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xx_0} = \Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{r}_{xx_0}$ .

Д. Покажите, что

$$\Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \Delta \mathbf{w} = a^2 \sum_{i=1}^N \frac{|(\mathbf{Q} \mathbf{r}_{xx_0})_i|^2}{\lambda_i (\lambda_i + a)^2}$$

с учетом равенства  $\Delta \mathbf{w} = -a \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{w}$ .

*Указание.* Обратите внимание на то, что выражение

$$\mathbf{r}_{xx_0}^\dagger \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} [\mathbf{R}_{xx} + a\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} [\mathbf{R}_{xx} + a\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{r}_{xx_0}$$

составлено из диагональных матриц, так как

$$\mathbf{Q} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}.$$

**6. Снижение эффективности из-за неточного знания направления прихода сигнала [18].** Вектор принимаемого сигнала можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \sum_{i=2}^m \mathbf{g}_i(t) + \mathbf{n}(t),$$

где  $\mathbf{s}(t) = s(t) \mathbf{v}_1$  — вектор полезного сигнала;  $\mathbf{g}_i(t) = g_i(t) \mathbf{v}_i$  — векторы помех, излучаемых точечными источниками;  $\mathbf{n}(t)$  — вектор собственного шума приемника, образованный независимыми узкополосными составляющими гауссовского шума отдельных элементов антенной решетки.

Векторы  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) могут рассматриваться как управляющие, где

$$\mathbf{v}_i^T = [\exp(-j\omega_c \tau_{i1}), \exp(-j\omega_c \tau_{i2}), \dots, \exp(-j\omega_c \tau_{iN})],$$

а  $\tau_{ik}$  — время задержки сигнала  $i$ -й помехи на  $k$ -м элементе решетки относительно ее геометрического центра;  $\omega_c$  — частота несущей сигнала.

Оптимальный весовой вектор должен удовлетворять соотношению  $\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xx_0}$ , где  $\mathbf{R}_{xx}$  — корреляционная матрица входного сигнала и  $\mathbf{r}_{xx_0}$  — вектор взаимной корреляции полезного сигнала  $\mathbf{s}$  и вектора принимаемого сигнала  $\mathbf{x}$ . Информация о направлении прихода сигнала заключена в  $\mathbf{r}_{xx_0}$ , и если это направление известно, то величина  $\mathbf{r}_{xx_0}$  может быть точно определена и для нахождения  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$  потребуется только вычисление  $\mathbf{R}_{xx}^{-1}$ . Однако если направление прихода сигнала определяется неточно, то  $\mathbf{w} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{xx_0}$ , где  $\tilde{\mathbf{r}}_{xx_0}$  — вектор взаимной корреляции, вычисляемый с учетом погрешности в управляющем векторе сигнала  $\tilde{\mathbf{v}}_1$ .

А. Для описанной модели сигнала оптимальный весовой вектор имеет вид  $\mathbf{w}_{\text{опт}} = [S\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\dagger + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} (S\mathbf{v}_1)$ , где  $\mathbf{R}_{nn}$  — ковариационная матрица шума;  $S$  — мощность полезного сигнала на выходе элемента решетки. Если вектор  $\mathbf{v}_1$  содержит погрешность, то  $\tilde{\mathbf{r}}_{xd} = (S\tilde{\mathbf{v}}_1)$ . Покажите, что результирующий весовой вектор, вычисленный с использованием величины  $\tilde{\mathbf{r}}_{xd}$ , определяется соотношением

$$\mathbf{w} = \frac{S}{1 + S\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}_1} [(1 + S\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}_1) \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1 - S\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1 \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}_1].$$

Б. Используя полученный в п. А результат, покажите, что выходное ОСШ (когда присутствуют только полезный сигнал и собственный шум приемника) определяется выражением

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} &= \frac{\mathbf{w}^\dagger E\{\mathbf{ss}^\dagger\} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}} = \frac{S\mathbf{w}^\dagger (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\dagger) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}} = \\ &= \frac{S |\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1|^2}{\tilde{\mathbf{v}}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1 - 2S |\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1|^2 + \mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}_1 [S^2 \{(\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}_1)^* \times \\ &\rightarrow \times (\tilde{\mathbf{v}}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1) - |\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1|^2\} + 2S \tilde{\mathbf{v}}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_1]}. \end{aligned}$$

В. Используя тот факт, что  $\mathbf{R}_{nn} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , и результат п. Б, покажите, что

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \frac{S \left(\frac{N}{\sigma^2}\right) \frac{|\mathbf{v}_1^\dagger \tilde{\mathbf{v}}_1|^2}{N^2}}{\left(1 + \frac{NS}{\sigma^2}\right)^2 \left[1 - \frac{|\mathbf{v}_1^\dagger \tilde{\mathbf{v}}_1|^2}{N^2}\right] + 2 \left(\frac{NS}{\sigma^2}\right) \left[1 - \frac{|\mathbf{v}_1^\dagger \tilde{\mathbf{v}}_1|^2}{N^2}\right]}.$$

Г. Покажите, что для эквидистантной линейной антенной решетки

$$|\mathbf{v}_1^\dagger \tilde{\mathbf{v}}_1| = \frac{|\sin[(N\pi d/\lambda_c) \sin \tilde{\theta}]|^2}{|\sin[(\pi d/\lambda_c) \sin \tilde{\theta}]|^2},$$

где  $d$  — межэлементное расстояние в решетке;  $\tilde{\theta}$  характеризует неопределенность углового положения источника.

## Глава 6. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ВЫБОРОЧНОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Практическая полезность многих применений адаптивной антенной решетки главным образом зависит от достижимой скорости сходимости. Например, быстрая сходимость в установившемся режиме важна в тех случаях, когда в адаптивном радиолокаторе требуется подавление активных и пассивных помех наряду с автоматической компенсацией скорости собственного движения. Широко известные алгоритмы МСКО и МСШ могут (в зависимости от собственных значений ковариационной матрицы шума) давать медленную сходимость весового вектора к установившемуся значению. В этом случае, когда собственные значения ковариационной матрицы могут отличаться на порядок и более, время сходимости алгоритма становится крайне большим и, кро-



ме того, сильно зависит от конкретной реализации шума. Одним из путей ускорения сходимости и преодоления зависимости ее от распределения собственных значений является использование прямого метода вычисления адаптивных весовых коэффициентов, основанного на непосредственном обращении выборочной ковариационной матрицы (НОМ) входных сигналов.

#### 6.1. МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА НЕПОСРЕДСТВЕННОМ ОБРАЩЕНИИ МАТРИЦЫ

Представим сигналы, принимаемые  $N$ -элементной адаптивной антенной решеткой,  $N$ -мерным сигнальным вектором  $\mathbf{x}$ , ковариационная матрица которого определяется соотношением

$$\mathbf{R}_{xx} = E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^{\dagger} \}. \quad (6.1)$$

При отсутствии полезного сигнала, когда на входе имеется только шум и помехи,

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{nn}. \quad (6.2)$$

Как показано в гл. 3, при наличии полезного сигнала оптимальный весовой вектор должен быть

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}, \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{r}_{xd}$  — вектор взаимной корреляции случайного вектора  $\mathbf{x}(t)$  и опорного сигнала  $d(t)$ . При отсутствии полезного сигнала оптимальный весовой вектор дается формулой

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{r}_{xd} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{b}^*, \quad (6.4)$$

где  $\mathbf{b}^*$  — вектор управляющих сигналов, согласованный с доплеровской частотой и угловыми координатами цели. Отметим, что задание вектора  $\mathbf{r}_{xd}$  полностью эквивалентно заданию вектора  $\mathbf{b}^*$ .

Если бы характеристики сигнала и помех были известны заранее (априори), то можно было бы определить ковариационную матрицу и вычислить оптимальный весовой вектор по формулам (6.3), (6.4) с помощью операции обращения матрицы. Однако на практике параметры сигнально-помеховой ситуации априори известны и, кроме того, сама ситуация меняется из-за движения отражателей и антенны, а также из-за изменения характеристик активных помех. Поэтому адаптивный процессор должен постоянно обновлять значения весового вектора, чтобы подстраиваться под изменяющиеся условия. Требование подстройки весового вектора при отсутствии подробной априорной информации заставляет находить оценки матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$  (или  $\mathbf{R}_{nn}$ ) и вектора  $\mathbf{r}_{xd}$  на конечном интервале времени наблюдения и подставлять их в выражение (6.3) или (6.4) для получения оценки весового вектора. Этот метод реализации адаптивного процессора известен под названием метода непосредственного обращения матрицы (НОМ). Используемые при этом оценки  $\mathbf{R}_{xx}$ ,  $\mathbf{R}_{nn}$  и  $\mathbf{r}_{xd}$  получаются согласно методу максимального правдоподобия [4].

Хотя алгоритм, основанный на методе НОМ, как можно показать, теоретически дает более высокую скорость сходимости, чем алгоритмы МСШ и НСКО, всегда необходимо иметь в виду практические трудности, связанные с его осуществлением. Для получения оценки элементов  $R_{xx}$  (или  $R_{nn}$ ) аппаратурным способом необходима более сложная (чем при алгоритмах МСШ и МСКО) схема устройства. Формирование выборочной ковариационной матрицы требует выполнения  $KN(N+1)/2$  комплексных умножений, где  $K$  — число независимых выборок, а  $N$  — число весовых коэффициентов. Обращение результирующей эрмитовой матрицы требует  $N^3/2 + N^2$  комплексных умножений, а вычисление весовых коэффициентов требует еще  $N^2$  умножений [2]. Таким образом, размерность сигнального вектора (которая определяется числом степеней свободы процессора антенной решетки) является определяющим фактором при решении вопроса о практическом применении этого метода в конкретной ситуации. Обращение матрицы, если она плохо обусловлена, может привести к дополнительным вычислительным проблемам, так что распределение собственных значений ковариационной матрицы имеет значение и для этого метода. Кроме того, конечное быстродействие устройства может не позволить достичь теоретической скорости сходимости, за исключением случая, когда входные сигналы достаточно узкополосны, а размеры решетки достаточно малы [3]. Следует отметить, что если обращаемая ковариационная матрица является теплицевой (в случае, когда выборки получаются на выходе многоотводной линии задержки), то для ускорения вычислений следует применить алгоритм обращения теплицевых матриц, предложенный в работе [5]. Данные по скорости сходимости, приведенные в этой главе, получены без учета эффектов, связанных с плохой обусловленностью матриц, в предположении, что все вычисления выполнены точно, и поэтому они представляют лишь верхнюю оценку эффективности метода НОМ.

### 6.1.1. Использование выборочной ковариационной матрицы

Предположим, что вектор взаимной корреляции  $r_{xd}$  (или, что то же самое, вектор управляющих сигналов  $b^*$ ) известен. Оценка оптимального весового вектора  $w$  в этом случае может быть определена как

$$\hat{w}_1 = \hat{R}_{xx}^{-1} r_{xd}, \quad (6.5)$$

если  $x(t)$  содержит полезный сигнал, и как

$$\hat{w}_2 = \hat{R}_{nn}^{-1} r_{xd} = \hat{R}_{nn}^{-1} b^*, \quad (6.6)$$

если полезный сигнал отсутствует. Матрицы  $\hat{R}_{xx}$  и  $\hat{R}_{nn}$  являются выборочными оценками ковариационных матриц  $R_{xx}$  и  $R_{nn}$  соответственно.

Выходное ОСШ, соответствующее  $\widehat{\mathbf{w}}_1$  и  $\widehat{\mathbf{w}}_2$ , может быть записано в виде

$$\left(\frac{s}{n}\right)_1 = \frac{\widehat{\mathbf{w}}_1^\dagger \mathbf{s} \mathbf{s}^\dagger \widehat{\mathbf{w}}_1}{\widehat{\mathbf{w}}_1^\dagger \mathbf{R}_{nn} \widehat{\mathbf{w}}_1} = \frac{\mathbf{r}_{xd}^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}}{\mathbf{r}_{xd}^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{nn} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}}, \quad (6.7)$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_2 = \frac{\mathbf{r}_{xd}^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{r}_{xd}}{\mathbf{r}_{xd}^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{R}_{nn} \widehat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{r}_{xd}}, \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{s}$  — вектор полезного сигнала (напомним, что  $\mathbf{s}(t) = s(t)\mathbf{v}$  [см. гл. 3]). Отношение сигнал-шум  $(s/n)_2$ , очевидно, имеет смысл только в те моменты времени, когда полезный сигнал действительно присутствует, причем предполагается, что оценка  $\widehat{\mathbf{w}}_2$ , входящая в формулу для  $(s/n)_2$ , получена при отсутствии полезного сигнала.

Полагая, что все входные сигналы являются выборками гауссовского случайного процесса с нулевым средним, получаем оценку максимального правдоподобия для  $\mathbf{R}_{xx}$  (или  $\mathbf{R}_{nn}$  при отсутствии полезного сигнала) в виде

$$\widehat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \mathbf{x}(j) \mathbf{x}^\dagger(j), \quad (6.9)$$

где  $\mathbf{x}(j)$  —  $j$ -е выборочное значение вектора  $\mathbf{x}(t)$ . Отметим, что для независимых  $\mathbf{x}(j)$  с нулевым средним  $E[\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^\dagger(j)] = 0$  при  $i \neq j$ .

Так как элементы матрицы  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}$  являются случайными величинами, то и выходное ОСШ является случайной величиной. Полезно сравнивать действительное ОСШ, полученное при использовании оценок  $\widehat{\mathbf{w}}_1$  и  $\widehat{\mathbf{w}}_2$ , с оптимальным ОСШ  $SN_0 = \mathbf{s}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{s}$ , формируя нормированные ОСШ следующим образом:

$$\rho_1 = (s/n)_1 / SN_0, \quad (6.10)$$

$$\rho_2 = (s/n)_2 / SN_0. \quad (6.11)$$

Можно показать [2], что величина  $\rho_2$  имеет бета-распределение

$$\text{Pr}(\rho_2 \leq u) = \frac{K!}{(N-2)!(K+1-N)!} \int_0^u (1-u)^{N-2} u^{K+1-N} du, \quad (6.12)$$

где  $K$  — общее число независимых выборок, используемых для получения  $\widehat{\mathbf{R}}_{nn}$ , а  $N$  — число степеней свободы адаптивной антенной решетки. Распределение вероятностей (6.12) дает важную информацию о сходимости алгоритма НОМ, которая достаточно полно характеризуется средним и дисперсией величины  $\rho_2$ . Из (6.12) следует, что

$$E\{\rho_2\} = \bar{\rho}_2 = \frac{K+2-N}{K+1}, \quad (6.13)$$

$$\text{var}(\rho_2) = \frac{(K+2-N)(N-1)}{(K+1)^2(K+2)}. \quad (6.14)$$

Выражение (6.14) может показаться удивительным, так как из него следует, что  $\text{var}(\rho_2)$  не зависит от энергии входного шума и распределения собственных значений его ковариационной матрицы. Однако если вспомнить, что  $\rho$  является нормированным ОСШ, то это свойство просто отражает тот факт, что истинное ОСШ ( $s/n$ ) и оптимальное ОСШ  $SN_0$  изменяются пропорционально при изменении энергии шума. Отсутствие зависимости  $\text{var}(\rho_2)$  от распределения собственных значений

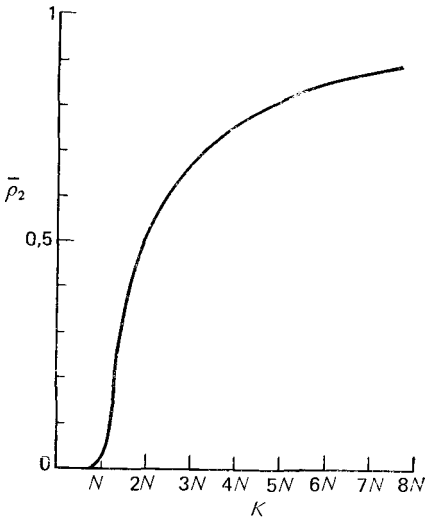


Рис. 6.1. Зависимость  $\bar{\rho}_2$  от  $K$  [формула (6.13)] при  $N \gg 2$

ковариационной матрицы объясняется предположением о том, что при вычислении  $\hat{w}_2$  операция обращения матрицы выполнялась точно. Вследствие этого в (6.14) отражены только погрешности оценки ковариационной матрицы. Влияние распределения собственных значений на вычисление обратной матрицы будет рассмотрено в последующих разделах.

Из зависимости  $\bar{\rho}_2$  от  $K$  для значений  $K \gg 2$ , изображенной на рис. 6.1, видно, что при  $K \gg 2N$  потери в  $\bar{\rho}_2$  из-за неоптимального взвешивания не превышают 3 дБ. Отсюда вытекает удобное приближенное правило: для получения приемлемой оценки ковариационной

матрицы (при отсутствии полезного сигнала) число выборок должно в 2 раза превышать число степеней свободы адаптивной антенной решетки.

Рассмотрим теперь характер сходимости при наличии сигнала, когда  $\hat{w}$  определяется по формуле (6.5). Вместо того чтобы пытаться определить функцию распределения  $\rho_1$  прямым путем, удобнее воспользоваться результатами, полученными для  $\rho_2$ . Для этого введем вспомогательную случайную величину

$$\rho'_1 = \frac{\mathbf{r}_{xd}^\dagger \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{s}^\dagger \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}}{\mathbf{r}_{xd}^\dagger \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd} \mathbf{s}^\dagger \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{s}}, \quad (6.15)$$

которая имеет ту же функцию распределения, что и  $\rho_2$ . Зная статистические свойства  $\rho'_1$  и соотношение между  $\rho'_1$  и  $\rho_1$ , можно легко получить необходимую информацию о  $\rho_1$ . Можно показать, что соотношение между  $\rho'_1$  и  $\rho_1$  имеет вид [3]

$$\rho_1 = \frac{\rho'_1}{SN_0(1-\rho'_1)+1}. \quad (6.16)$$

Так как  $\rho_1'$  имеет ту же функцию распределения, что и  $\rho_2$ , то из (6.16) следует, что

$$E \{ \rho_1 \} < E \{ \rho_2 \}, \quad (6.17)$$

$$\lim_{SN_0 \rightarrow 0} E \{ \rho_1 \} = E \{ \rho_2 \}. \quad (6.18)$$

Из неравенства (6.17) вытекает, что в среднем выходное ОСШ, достигаемое при использовании  $\hat{w}_1 = \hat{R}_{xx}^{-1} r_{xd}$ , меньше ОСШ, достигаемого при  $\hat{w}_2 = \hat{R}_{nn}^{-1} r_{xd}$  (за исключением предельного случая при  $K \rightarrow \infty$ , когда обе оценки одинаково точны). Это объясняется тем, что в присут-

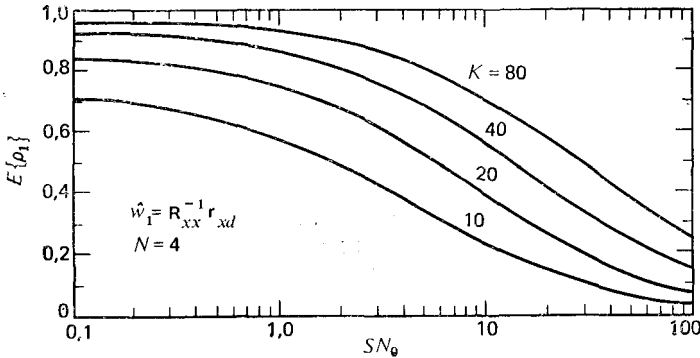


Рис. 6.2. Зависимость среднего нормированного ОСШ от оптимального ОСШ при различных объемах выборки

ствии полезного сигнала время (или объем выборки), необходимое для получения оценки  $R_{xx}$ , больше времени получения оценки  $R_{nn}$  при отсутствии сигнала при предъявлении одинаковых требований к точности. Предел в (6.18) показывает, что при  $SN_0 < 1$  разница в ОСШ при использовании  $\hat{w}_1$  и  $\hat{w}_2$  пренебрежимо мала.

С помощью (6.16) можно показать [3], что

$$E \{ \rho_1 \} = \frac{a}{a+b} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-SN_0)^i \left( \frac{b}{a+b+1} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{b+1}{a+b+2} \right) \dots \left( \frac{i+b-1}{a+b+i} \right) \right\}, \quad (6.19)$$

где  $a = K - N + 2$ ;  $b = N - 1$ . Характер зависимости  $E \{ \rho_1 \}$  от  $SN_0$  при  $N = 4$  показан на рис. 6.2.

Так как использование оценки  $\hat{w}_2$  более предпочтительно, чем  $\hat{w}_1$  при  $SN_0 \gg 1$ , то нужно постараться удалить составляющие сигнала из  $x(t)$  перед вычислением  $\hat{R}_{xx}$ . Если вектор сигнала  $s(t)$  полностью известен, то, вычитая его из  $x(t)$ , можно получить вектор шума и затем сформировать оценку  $\hat{R}_{nn}$ . Иногда предлагается некорректная про-

цедура для удаления составляющей сигнала, состоящая в замене выборочной ковариационной матрицы матрицей  $\widehat{\mathbf{D}}$ , определяемой соотношением

$$\widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{R}}_{xx} - ss^\dagger, \quad (6.20)$$

так что

$$E \{\widehat{\mathbf{D}}\} = \mathbf{R}_{nn}. \quad (6.21)$$

Эта процедура не удовлетворяет условию получения быстрой сходимости, так как, хотя  $E \{\widehat{\mathbf{D}}\} = \mathbf{R}_{nn}$ , оценка весового вектора  $\widehat{\mathbf{w}}_3 = \widehat{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{r}_{xd}$  отличается от оценки  $\widehat{\mathbf{w}}_1 = \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}$  только скалярным множителем и поэтому дает такую же скорость сходимости, что и  $\widehat{\mathbf{w}}_1$ . Это легко показывается следующими выкладками<sup>1</sup>:

$$\widehat{\mathbf{w}}_3 = \widehat{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{r}_{xd} = [\widehat{\mathbf{R}}_{xx} - ss^\dagger]^{-1} \mathbf{r}_{xd} = \frac{1}{1 - s^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} s} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}. \quad (6.22)$$

Так как  $\widehat{\mathbf{w}}_3$  и  $\widehat{\mathbf{w}}_1$  отличаются лишь скалярным коэффициентом, то ОСШ, получаемое при использовании этих оценок, одно и то же, и поэтому указанный способ не может улучшить эффективность алгоритма НОМ.

### 6.1.2. Использование выборочной ковариационной матрицы и выборочного вектора взаимной корреляции

Для многих связанных и радиолокационных систем нереально предполагать, что вектор взаимной корреляции  $\mathbf{r}_{xd}$  (или вектор управляющих сигналов  $\mathbf{b}^*$ ) априорно известен. В этом случае можно предложить вычислять оценку оптимального весового вектора по формуле

$$\widehat{\mathbf{w}}_4 = \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{xd}, \quad (6.23)$$

где  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}$  — выборочный вектор взаимной корреляции, определяемый выражением

$$\widehat{\mathbf{r}}_{xd} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \mathbf{x}(j) d^*(j). \quad (6.24)$$

Характеристика алгоритма НОМ в переходном режиме при использовании оценки  $\widehat{\mathbf{w}}_4$  будет отличаться от характеристики модификаций НОМ, использующих  $\widehat{\mathbf{w}}_1$  и  $\widehat{\mathbf{w}}_2$ .

Характеристики алгоритма, основанного на использовании  $\widehat{\mathbf{w}}_4$ , можно определить, рассмотрев оптимальную по критерию минимума средней квадратической ошибки оценку вектора  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$  по  $K$  независимым отсчетам входного вектора  $\mathbf{x}$ . При рассмотрении этой задачи пред-

<sup>1</sup> При выводе (6.22) нужно предположить, что  $\mathbf{r}_{xd} = ks$ , где  $k$  — произвольный коэффициент. (Прим. ред.)

положим, что адаптивная антенная решетка построена по схеме, приведенной на рис. 6.3. Эта схема может представлять две важные структуры. Если  $x_0(t) = d(t)$  — опорный сигнал, совпадающий по форме с полезным, то минимальная средняя квадратическая ошибка (МСКО) и максимальное ОСШ получаются при выборе весового вектора равным оптимальному винеровскому решению  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$ . Если  $x_0(t)$  — выходной сигнал опорной антенны (обычно антенна с остронаправленной диаграммой направленности с максимумом в направлении на источник полезного сигнала), то схема рис. 6.3 представляет когерентный ком-

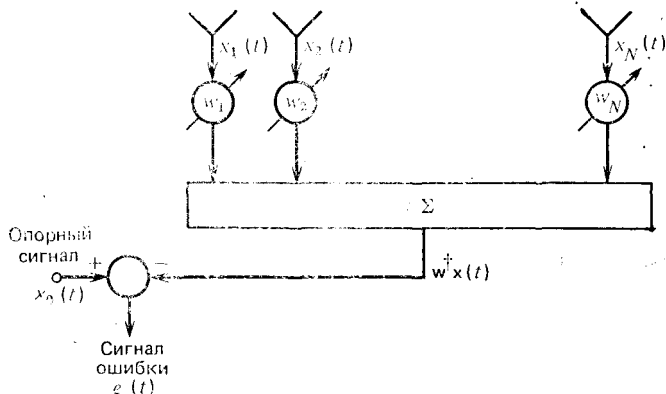


Рис. 6.3. Структурная схема адаптивной антенной решетки, для которой рассматривается переходный процесс при использовании оценки  $\hat{\mathbf{w}}_4$

пенсатор помех, принимаемых по боковым лепесткам (КБЛ), в котором оптимальный вектор минимизирует СКО на выходе и тем самым минимизирует помеху на выходе антенной решетки.

Изменение  $\hat{\mathbf{w}}_4$  в переходном режиме можно охарактеризовать зависимостью выходного ОСШ от объема выборки  $K$ , используемой для оценок  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  и  $\hat{\mathbf{r}}_{xd}$ . Однако можно поступить и по-другому, характеризуя переходный процесс зависимостью дисперсии помех на выходе от  $K$ . Именно этим способом и будет характеризоваться эффективность рассматриваемого алгоритма. Мощность остаточного шума на выходе (или СКО) определяется формулой

$$\xi(\hat{\mathbf{w}}) = E |e(t)|^2 = \sigma_0^2 - \hat{\mathbf{w}}^\dagger \mathbf{r}_{xd} - \mathbf{r}_{xd}^\dagger \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{w}}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{w}}, \quad (6.25)$$

а оценка СКО (или выборочная СКО) дается выражением

$$\hat{\xi}(\hat{\mathbf{w}}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K |e(i)|^2 = \hat{\sigma}_0^2 - \hat{\mathbf{w}}^\dagger \hat{\mathbf{r}}_{xd} - \hat{\mathbf{r}}_{xd}^\dagger \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{w}}^\dagger \hat{\mathbf{R}}_{xx} \hat{\mathbf{w}}, \quad (6.26)$$

где  $\hat{\sigma}_0^2$  — мощность сигнала в опорной антенне:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_0(i) x_0^*(i). \quad (6.27)$$

Поведение системы можно охарактеризовать зависимостью статистических свойств  $\hat{\xi}(\hat{\mathbf{w}})$  от объема выборки  $K$ . Предположим, что  $\mathbf{x}(i)$  и  $x_0(i)$  являются выборочными отсчетами  $(N+1)$ -мерного гауссовского случайного вектора  $\mathbf{x}'$  с нулевым средним, плотность вероятности которого имеет вид

$$p(\mathbf{x}') = \pi^{-(N+1)} |\mathbf{R}'_{xx}|^{-1} \exp\{-\mathbf{x}'^\dagger \mathbf{R}'_{xx}{}^{-1} \mathbf{x}'\}, \quad (6.28)$$

где  $\mathbf{R}'_{xx}$  — ковариационная матрица размером  $(N+1) \times (N+1)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_{xx} &= E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix} [\mathbf{x}^\dagger(t) \quad x_0^*(t)] \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xx} & \mathbf{r}_{xx_0} \\ \mathbf{r}_{xx_0}^\dagger & \sigma_0^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

в которой  $\mathbf{r}_{xx_0}$  играет роль  $\mathbf{r}_{xd}$ , так что оценка  $\widehat{\mathbf{R}}'_{xx}$  определяется оценками  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}$ ,  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}$  и  $\widehat{\sigma}_0^2$ . Выборочная ковариационная матрица  $\widehat{\mathbf{R}}'_{xx}$  обладает важными свойствами:

1. Элементы  $\widehat{\mathbf{R}}'_{xx}$  имеют совместную плотность вероятности, равную комплексной плотности распределения Уишарта [6]:

$$p(\mathbf{A}) = \frac{|\mathbf{A}|^{K-N-1} \exp[-\text{tr}(\mathbf{R}'_{xx}{}^{-1} \mathbf{A})]}{\pi^{(1/2)(N+1)N} \Gamma(K) \Gamma(K-1) \dots \Gamma(K-N) |\mathbf{R}'_{xx}|^K}, \quad (6.30)$$

где  $\mathbf{A} = K \widehat{\mathbf{R}}'_{xx}$ ,  $\Gamma(k) = (k-1)!$ .

2. Матрица  $\widehat{\mathbf{R}}'_{xx}$  является оценкой МП матрицы  $\mathbf{R}'_{xx}$  [6]. Поэтому  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}$ ,  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}$  и  $\widehat{\sigma}_0^2$  являются оценками максимального правдоподобия  $\mathbf{R}_{xx}$ ,  $\mathbf{r}_{xd}$  и  $\sigma_0^2$  соответственно.

Выполняя ряд преобразований, можно получить следующие результаты [7].

1. Среднее и дисперсия выборочной СКО  $\widehat{\xi}$ , полученной при использовании  $\widehat{\mathbf{w}}_4$ , определяются формулами:

$$E\{\widehat{\xi}\} = \left(1 - \frac{N}{K}\right) \xi_{\text{min}}, \quad (6.31)$$

$$\text{var}\{\widehat{\xi}\} = \frac{1}{K} \left(1 - \frac{N}{K}\right) \xi_{\text{min}}^2, \quad (6.32)$$

где

$$\xi_{\text{min}} = \sigma_0^2 - \mathbf{r}_{xd}^\dagger \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}.$$

2. Разность между выходной мощностью ошибки  $\widehat{\xi}(\widehat{\mathbf{w}}_4)$  и минимальной выходной мощностью ошибки можно рассматривать как меру эффективности антенной решетки (по сравнению с оптимальным). Удоб-



нее пользоваться нормированным параметром  $M = r^2$ , называемым «расстройкой»:

$$r^2 \triangleq \frac{\xi(\widehat{\mathbf{w}}_4) - \xi_{\min}}{\xi_{\min}}. \quad (6.33)$$

Параметр  $r$  является случайной величиной с плотностью

$$p(r) = 2 \frac{K!}{(K-N)!(N-1)!} \frac{r^{2N-1}}{(1+r^2)^{K+1}}, \quad 0 < r < \infty. \quad (6.34)$$

Моменты величины  $r^2$  легко найти, заметив, что величина  $y$ , определяемая выражением

$$y = 1/(1+r^2), \quad (6.35)$$

имеет бета-распределение с параметрами  $a = K - N + 1$  и  $b = N$ . Следовательно, среднее и дисперсия  $r^2$  даются формулами:

$$E\{r^2\} = \frac{N}{K-N}, \quad (6.36)$$

$$\text{var}\{r^2\} = \frac{NK}{(K-N)^2(K-N-1)}. \quad (6.37)$$

3. Для случая, когда  $x_0(t) = d(t)$ , нормированное ОСШ для  $\widehat{\mathbf{w}}_4$  определяем выражением, аналогичным (6.10) и (6.11):

$$\rho_3 = \frac{(s/n)_3}{SN_0} = \frac{\widehat{\mathbf{w}}_4^\dagger \mathbf{s} \mathbf{s}^\dagger \widehat{\mathbf{w}}_4}{\widehat{\mathbf{w}}_4^\dagger \mathbf{R}_{nn} \widehat{\mathbf{w}}_4 \mathbf{s}^\dagger \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{s}}. \quad (6.38)$$

Плотность распределения  $\rho_3$  трудно определить в замкнутой форме, но среднее и дисперсию  $\rho_3$  можно найти, используя приводимые далее соотношения:

$$\rho_3 = \frac{1}{(1+SN_0) \left[ \frac{C + \sin^2 \varphi_1}{C + \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2} \right] - SN_0}, \quad (6.39)$$

где  $C = (1/r) \sqrt{(s/n)_3}$  и совместная плотность распределения вероятностей  $r$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяется формулой

$$p(r, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{2}{\pi} \frac{K!}{(K-N)!(N-2)!} \frac{r^{2N-1}}{(1+r^2)^{K+1}} \times \\ \times (\sin \varphi_1)^{2N-2} (\sin \varphi_2)^{2N-3} \quad (6.40)$$

при  $0 < r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi_1 < \pi$ ,  $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$ . Заметим, что  $r$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  статистически независимы и плотность распределения вероятности  $r$  определяется формулой (6.34). Используя предыдущие выражения, с помощью численного интегрирования  $E(\rho_3)$  можно найти по формуле

$$E(\rho_3) = \int_{\mathcal{R}} P(r) \int_{\Phi_1} P(\varphi_1) \int_{\Phi_2} \rho_3 P(\varphi_2) d\varphi_2 d\varphi_1 dr. \quad (6.41)$$

Точно так же можно получить  $E\{\rho_3^2\}$ , подставляя вместо  $\rho_3$  величину  $\rho_3^2$ . Тогда дисперсию  $\rho_3$  можно вычислить следующим образом:

$$\text{var}\{\rho_3\} = E\{\rho_3^2\} - E^2\{\rho_3\}.$$

#### 4. Нормированная величина

$$\widehat{\xi}_N \stackrel{\Delta}{=} 2K\widehat{\xi}/\xi_{\min} \quad (6.42)$$

статистически не зависит как от  $\widehat{w}$ , так и от  $\widehat{R}_{xx}$ .

Полученные результаты позволяют оценить эффективность алгоритма НОМ в переходном режиме. Сначала рассмотрим результаты, выражаемые соотношениями (6.36) и (6.37). Из (6.36) видно, что мощ-

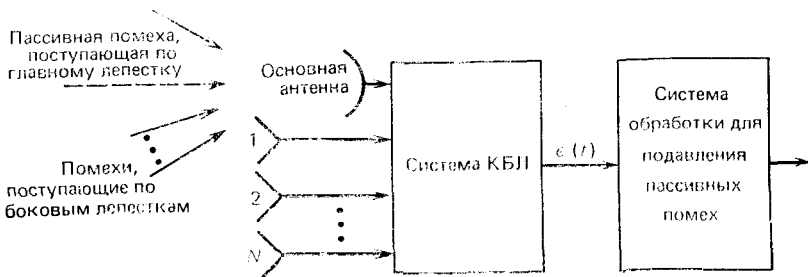


Рис. 6.4. Структурная схема системы КБЛ для подавления помех в радиолокаторе

ность на выходе не превышает минимальную более чем на 3 дБ после  $2N$  выборок или более чем на 1 дБ после  $5N$  выборок. Таким образом, скорость сходимости алгоритма довольно велика и не зависит от условий приема сигнала и геометрии антенной решетки, однако это справедливо только в предположении, что полезный сигнал отсутствует в выборках, на основе которых формируется оценка  $\widehat{R}_{xx}$ .

В системах связи адаптация антенной решетки происходит при наличии полезного сигнала и ОСШ является более приемлемой мерой эффективности, чем СКО. Кроме того, в радиолокационных системах часто за компенсатором помех, принимаемых по боковым лепесткам, следует процессор, подавляющий пассивные помехи так, что от КБЛ требуется подавление только активных помех, создаваемых точечными источниками радиоизлучения. Покажем теперь, что присутствие как полезного сигнала, так и пассивных помех в опорном канале системы КБЛ замедляет скорость сходимости НОМ алгоритма.

Рассмотрим схему радиолокатора с КБЛ, представленную на рис. 6.4. Система КБЛ в этом радиолокаторе предназначена только для подавления активных помех, а пассивные помехи подавляются в следующем за этой системой процессоре. Чтобы упростить изложение, предположим, что мощность пассивных помех, поступающих по опорному каналу, значительно превышает мощность пассивных помех, поступающих по вспомогательным каналам так, что пассивными помехами во вспомогательных каналах можно пренебречь. Тогда  $\xi_{\min} =$

$= \sigma_c^2 + \xi_{N_0}$ , где  $\sigma_c^2$  — мощность пассивных помех;  $\xi_{N_0}$  — минимальная мощность активных помех и теплового шума на выходе КБЛ. Предположим также, что пассивные помехи можно представить как реализации стационарного гауссовского процесса с нулевым средним. Из выражений (6.25), (6.33) и (6.36) следует, что

$$\frac{E \{ \widehat{\xi}(\mathbf{w}) - \xi_{\min} \}}{\xi_{N_0}} = \frac{N}{K-N} \left[ 1 + \frac{\sigma_c^2}{\xi_{N_0}} \right]. \quad (6.43)$$

Согласно (6.43) наличие в опорном канале пассивной помехи замедляет сходимость алгоритма НОМ приблизительно пропорционально отношению мощности пассивных помех к минимальной остаточной мощности активных помех  $\xi_{N_0}$ . Это замедление объясняется присутствием в  $\widehat{\Gamma}_{xd}$  дополнительных слагаемых, обусловленных пассивной помехой, увеличивающих погрешность оценки весового вектора. Для быстрой сходимости необходимо либо производить адаптацию на тех временных интервалах, которые сравнительно свободны от пассивной помехи, либо найти средство уменьшения составляющих пассивной помехи в  $\widehat{\Gamma}_{xd}$ .

Полученный результат применим также к системам связи, в которых основная антенна направлена на источник полезного сигнала. Пусть  $\sigma_s^2$  — мощность полезного сигнала, принятого по опорному каналу. Предполагая, что составляющей полезного сигнала во вспомогательных каналах можно пренебречь, нетрудно показать, что на выходе КБЛ

$$\text{ОСШ} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 r^2 + \xi_{N_0} (1+r^2)}. \quad (6.44)$$

Максимальное значение  $\widehat{\text{ОСШ}}$ , определяемое как  $SN_0 = \sigma_s^2 / \xi_{N_0}$ , получается при  $r^2 = 0$  или  $\widehat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_{\text{опт}}$ . Разделив обе части (6.44) на  $SN_0$ , получим нормированное выходное отношение сигнал-шум в виде

$$\rho_4 = \frac{\text{ОСШ}}{SN_0} = \frac{1}{1 + [1 + (SN_0)] r^2}. \quad (6.45)$$

Отметим, что  $0 \leq \rho_4 \leq 1$ , так что оптимальным значением  $\rho_4$  является единица. При  $SN_0 \ll 1$  плотность распределения вероятности  $\rho_4$  аппроксимируется бета-распределением:

$$P(\rho_4) = \frac{K!}{(N-1)!(K-N)!} (1-\rho_4)^{N-1} \rho_4^{K-N}. \quad (6.46)$$

Сравнивая (6.46) с плотностью распределения, соответствующей (6.12), убеждаемся, что эти плотности совпадают<sup>1</sup>, если в (6.12)  $N$  заменить на  $N+1$ . Тогда из выражения (6.13) следует, что для схемы на рис. 6.3

$$E(\rho_4) = \frac{K-N+1}{K+1} \text{ при } SN_0 \ll 1. \quad (6.47)$$

<sup>1</sup> Для того чтобы убедиться в этом, необходимо предварительно продифференцировать обе части (6.12) по  $y$ . (Прим. ред.)

Поэтому при малых  $SN_0$  требуется только  $K = 2N - 1$  независимых выборок, чтобы получить ОСШ, отличающееся от максимального  $SN_0$  не более чем на 3 дБ. Для больших ОСШ ( $\gg K/N$ ) среднее ненормированное отношение сигнал-шум приближенно дается выражением

$$\overline{(\text{ОСШ})} \simeq \frac{K}{N} - 1 \quad \text{при } SN_0 \gg \frac{K}{N} \text{ и } K > N. \quad (6.48)$$

Таким образом, наличие сильного полезного сигнала в опорном канале замедляет сходимость к оптимальному ОСШ, но не влияет на среднее ОСШ при условиях, определяемых соотношением (6.48).

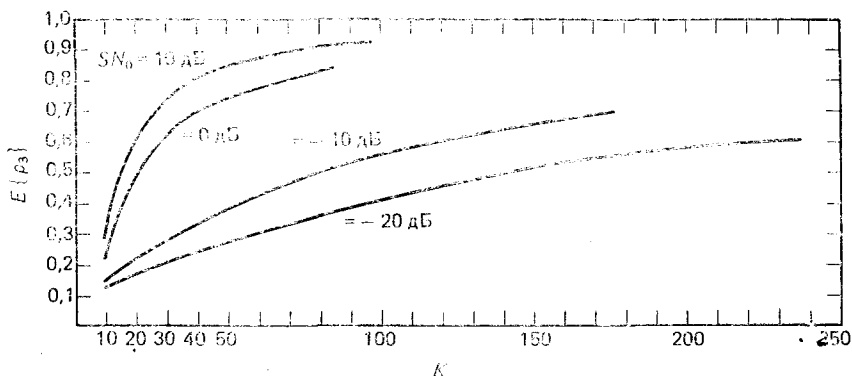


Рис. 6.5. Зависимость  $E\{\rho_3\}$  [формула (6.38)] от объема выборки для различных значений  $SN_0$  при  $N=8$

Наконец, рассмотрим результаты, содержащиеся в выражениях (6.39), (6.40) для случая, когда  $x_0(t) = d(t)$  (схема с опорным сигналом). При больших  $SN_0$  распределение  $\rho_3$  в (6.39) аппроксимируется выражением (6.46) и поэтому

$$E\{\rho_3\} \simeq \frac{K-N+1}{K+1} \quad \text{при } SN_0 \gg 1. \quad (6.49)$$

Однако скорость сходимости уменьшается при уменьшении  $SN_0$  ниже 0 дБ, как это видно из графиков зависимости  $E\{\rho_3\}$  от  $K$ , приведенных на рис. 6.5.

В системе с опорным сигналом ситуация обратна ситуации в системе с КБЛ. Там присутствие полезного сигнала в опорном канале компенсатора снижало точность определения весового вектора и тем самым замедляло сходимость. В системе с опорным сигналом, напротив, при сильном полезном сигнале оценка весового вектора улучшается и скорость сходимости увеличивается благодаря тому, что оценки  $\widehat{\Gamma}_{xd}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}$  становятся сильнокоррелированными и погрешности этих оценок компенсируют друг друга.

## 6.2. СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМОВ НОМ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Переходные характеристики алгоритмов НОМ, соответствующие оценкам весовых векторов  $\hat{w}_1$  (6.5) и  $\hat{w}_4$  (6.23), можно оценить по зависимости величины

$$\bar{\rho} = \frac{E \{ \text{выходное ОСП} \}}{SN_0}$$

от  $K$  (числа независимых выборок, используемых для получения  $\hat{R}_{xx}$  и  $\hat{r}_{xd}$ ) при заданных условиях приема сигнала. Эта зависимость получается усреднением 50 реализаций переходного процесса антенной решетки. Результирующие зависимости  $\bar{\rho}$  от  $K$  для четырехэлементной линейной решетки с  $d/\lambda = 0,5$  при воздействии одного источника по-

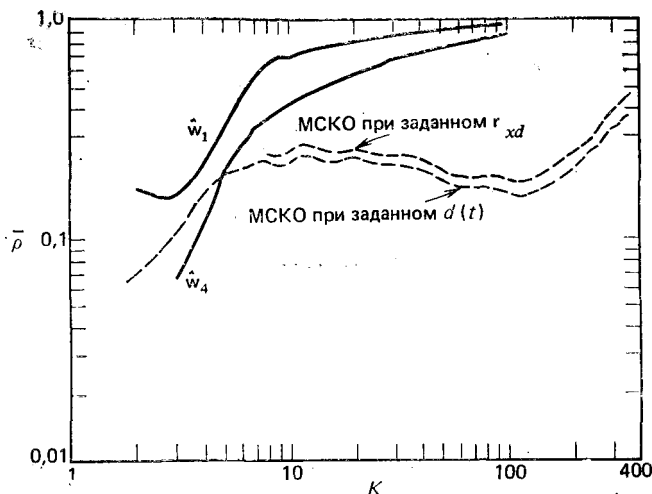


Рис. 6.6. Переходный процесс при использовании оценок  $\hat{w}_1$  и  $\hat{w}_4$ , когда имеется один источник помехи, разнесенный с источником сигнала на  $75^\circ$  и при  $SN_0=3,8$

мехи, разнесенного с источником сигнала на  $75^\circ$ , и отношениях помеха-сигнал 14 дБ, а сигнал-внутриприемный шум 0 дБ показаны на рис. 6.6.

Целесообразно сравнить переходные процессы, соответствующие  $\hat{w}_1$  и  $\hat{w}_4$ , с переходным процессом при алгоритме МСКО с периодом итераций, равным интервалу времени между отдельными отсчетами при алгоритме НОМ. Это сравнение можно выполнить на основе зависимостей  $\bar{\rho}(K)$ , причем для алгоритма НОМ  $K$  означает число независимых отсчетов, используемых для вычислений выборочной ковариационной матрицы, а для алгоритма МСКО  $K$ —число выполненных итераций. Такое сравнение алгоритмов НОМ и МСКО не совсем удовлетворительно по следующим причинам:

1. Переходный процесс при алгоритме МСКО зависит от выбранного размера шага, который может быть очень малым, что приводит к большой постоянной времени переходного процесса.

2. Переходный процесс при алгоритме МСКО зависит от начального значения весового вектора. При удачном выборе начального значения переходный процесс будет очень хорошим.

3. В то время, как дисперсия величины  $\rho$  ( $K$ ) при алгоритме НОМ уменьшается с ростом  $K$ , при алгоритме МСКО эта дисперсия стремится к не равному нулю значению в установившемся режиме, зависящему от размера шага.

Тем не менее сравнение алгоритмов по зависимости  $\bar{\rho}$  от  $K$  позволяет судить о скорости изменения выходного ОСШ, и в этом заключается смысл такого сравнения.

При алгоритме МСКО условие сходимости (4.49) нарушается, если размер шага  $\Delta_s$  превышает  $1/P_{\text{вх}}$ , где  $P_{\text{вх}}$  — полная входная мощность всех источников. Следовательно, если выбрать  $\Delta_s = 0,4/P_{\text{вх}}$ , то размер шага будет всего на 4 дБ ниже предельно допустимого и результирующая скорость переходного процесса будет близка к теоретическому максимальному значению (при этом в цепи управления весовыми коэффициентами будет действовать значительный шум). Так как максимальная постоянная времени переходного процесса при алгоритме МСКО определяется минимальным собственным значением ковариационной матрицы

$$\tau_{\text{max}} \simeq 1/(k_s \Delta t \lambda_{\text{min}}), \quad (6.50)$$

где  $\lambda_{\text{min}} \geq \sigma^2$ ,  $\sigma^2$  — дисперсия собственного шума приемника<sup>1</sup>, то

$$\tau_{\text{max}} \simeq \frac{P_{\text{вх}}}{0,4\sigma^2}. \quad (6.51)$$

В четырехэлементной антенной решетке  $P_{\text{вх}} = 4(P_D + \sigma^2 + P_I)$ , где  $P_D$  — мощность полезного сигнала;  $\sigma^2$  — мощность собственного шума приемника;  $P_I$  — мощность помехи. Поэтому при  $P_I/P_D = 14$  дБ,  $P_D/\sigma^2 = 0$  дБ. Отношение  $P_{\text{вх}}/\sigma^2$  равно 108, и тогда  $\tau_{\text{max}} = 270$ .

Постоянная времени, соответствующая полезному сигналу, пропорциональна собственному значению  $\lambda_1$ , связанному с мощностью полезного сигнала. Так как в рассматриваемом примере  $\lambda_1 \simeq 4P_D$ , то эта постоянная времени приблизительно равна<sup>2</sup>

$$\tau_1 \simeq \frac{1}{\Delta_s \lambda_1} = \frac{P_{\text{вх}}}{(0,4) 4P_D} = 67. \quad (6.52)$$

<sup>1</sup> Предполагается, что в каждом канале антенной решетки имеется собственный шум (с дисперсией  $\sigma^2$ ), причем составляющие шума разных каналов взаимно не коррелированы.

<sup>2</sup> К рассуждениям в этом абзаце и аналогичным рассуждениям в дальнейшем следует относиться с осторожностью. В общем случае с полезным сигналом нельзя связать какой-либо собственный вектор и собственное значение ковариационной матрицы. В данном примере, поскольку источники сигнала и помехи разнесены по углу на значительное расстояние, имеется собственный вектор и собственное значение, сильно (по сравнению с остальными) зависящие от параметров полезного сигнала. (Прим. ред.)

Одним из удачных начальных значений весового вектора в алгоритме МСКО является  $\mathbf{w}_0^T = [1, 0, 0, 0]$ , так как оно соответствует диаграмме направленности, постоянной для всех углов. Для указанных условий при использовании оценок  $\widehat{\mathbf{w}}_3$  и  $\widehat{\mathbf{w}}_4$  и двух вариантов алгоритма МСКО:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + k_s \Delta t [\mathbf{r}_{xd} - \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^\dagger(k)\mathbf{w}(k)], \quad \mathbf{r}_{xd} \text{ задано,} \quad (6.53)$$

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + k_s \Delta t [\mathbf{x}(k)d^*(k) - \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^\dagger(k)\mathbf{w}(k)], \quad d(k) \text{ задано,} \quad (6.54)$$

с помощью моделирования была найдена зависимость  $\bar{\rho}(K)$ . Результаты моделирования приведены на рис. 6.6, соответствующие им максимальное ОСШ составляет  $SN_0 = 3,8$ .

Результаты, приведенные на рис. 6.6, показывают, что алгоритм НОМ при  $\widehat{\mathbf{w}}_1$  и  $\widehat{\mathbf{w}}_4$  лучше алгоритма МСКО. Сначала изменение весовых коэффициентов согласно алгоритму МСКО приводит к увеличению выходного ОСШ. С ростом  $K$ , однако, этот характер зависимости меняется на противоположный, когда алгоритм начинает изменять весовой вектор в направлении собственного вектора, определяемого полезным сигналом, так как любое уменьшение коэффициента передачи в этом направлении без соответствующего уменьшения внутреннего шума ведет к уменьшению выходного ОСШ. Только после того, как весовой вектор начнет изменяться в направлении собственных векторов шума, значения  $\bar{\rho}$  будут увеличиваться.

Нежелательного поведения двух алгоритмов МСКО в ситуации, представленной на рис. 6.6, можно избежать выбором другого начального вектора. Например, при выборе  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{r}_{xd}$  значительно улучшаются характеристики алгоритма МСКО, так как в этом случае диаграмма направленности антенной решетки имеет максимум в направлении на источник сигнала, что обеспечивает сравнительно большое начальное ОСШ.

С помощью соответствующего выбора начального значения можно также улучшить переходный процесс и при алгоритме НОМ. Например, при

$$\widehat{\mathbf{w}}_1 = \left[ \frac{1}{K} \left( \sum_{j=1}^K \mathbf{x}(j)\mathbf{x}^\dagger(j) + \alpha \mathbf{I} \right) \right]^{-1} \mathbf{r}_{xd} \quad (6.55)$$

значительно улучшаются переходные процессы в ситуациях, соответствующих рис. 6.6. Как бы то ни было, при любом выборе начального весового вектора скорость сходимости алгоритма НОМ выше, чем алгоритма МСКО.

Представляет интерес рассмотрение переходного процесса для  $\widehat{\rho}(K)$  при двух источниках помех. Предположим, что отношение помеха-сигнал для одного источника равно 30 дБ, а для другого 10 дБ, причем источник сильной помехи разнесен с источником сигнала на  $30^\circ$ , а источник менее сильной помехи — на  $60^\circ$ , остальные условия

Таблица 6.1

Скорость сходимости алгоритмов НОМ для двух схем адаптивных антенных решеток при различных условиях приема

Схема адаптивной антенной решетки	$\hat{w}_{\text{опт}}$	Условия приема	Критерий эффективности	Приближительное число независимых выборочных значений, необходимое для достижения уровня, на 3 дБ ниже оптимального
С компенсатором помех, поступающих по боковым лепесткам	$\hat{R}_{xx}^{-1} \hat{r}_{xx_0}$	При отсутствии полезного сигнала	Минимум СКО	$2N$ , $N$ — число элементов антенной решетки
		При наличии полезного сигнала только в главном луче	Максимум ОСШ, $SN_0$	$2N \left[ 1 + \frac{SN_0}{2} \right]$ , $SN_0 \gg 1$ $2N$ , $SN_0 \ll 1$
		При наличии отражений от местных предметов только в главном луче	Минимум мощности шума (помеха + тепловой шум) на выходе, $\xi_{M_0}$	$2N \left[ 1 + \frac{\sigma_c^2}{2SN_0} \right]$ , $\sigma_c^2$ — мощность отражений в основном канале
Полностью адаптивная	$\hat{R}_{xx}^{-1} \hat{r}_{xd}$	При наличии известного полезного сигнала $s(t) = d(t)$	Максимум ОСШ, $SN_0$	$2N$ , $SN_0 \gg 1$ $2N \left[ 1 + \frac{1}{2SN_0} \right]$ , $SN_0 \ll 1$
		При отсутствии полезного сигнала и известном направлении на источник сигнала	Максимум ОСШ, $SN_0$	$2N-3$
		При наличии полезного сигнала и известном направлении на источник сигнала	Максимум ОСШ, $SN_0$	$2N$ , $SN_0 \ll 1$ $2N \left[ 1 + \frac{SN_0}{2} \right]$ , $SN_0 \gg 1$



такие же, как и в случае, соответствующем рис. 6.6. Переходные процессы для двух вариантов алгоритма НОМ и двух вариантов алгоритма МСКО ((соответствующих заданию  $d(t)$  и  $r_{xd}$ ) при начальном весовом векторе  $[1, 0, 0, 0]$  показаны на рис. 6.7. Наличие двух источников помех с различными уровнями мощности приводит к появлению значительно отличающихся по величине собственных значений матрицы  $R_{xx}$  и, как следствие, к замедлению сходимости алгоритма МСКО. Так как  $P_{вх}/\lambda_1$  теперь в 40 раз выше, чем в условиях, соответствующих рис. 6,6 то постоянная времени  $\tau_1$  в 40 раз больше, чем в предыдущем случае. В отличие от этого характер переходного процесса для алгоритма НОМ остается прежним.

Основные результаты по сходимости алгоритмов НОМ при различных условиях приведены в табл. 6.1. Вывод этих результатов можно найти в [2, 3].

### 6.3. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Несмотря на то, что скорость сходимости алгоритма НОМ не зависит от распределения собственных значений матрицы  $R_{xx}$ , точность в установившемся состоянии зависит от обусловленности ковариационной матрицы (определяемой отношением  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  — максимального собственного значения к минимальному), если она превышает некоторый критический уровень. Это можно объяснить следующим образом.

Предположим, что имеется достаточно большое число выборочных отсчетов для того, чтобы обеспечить близость выборочной ковариационной матрицы к  $R_{xx}$  (или  $R_{nn}$ ) с заданной точностью. Тогда единственной причиной отличия адаптивного весового вектора от точного решения является плохая обусловленность выборочной ковариационной матрицы, не позволяющая обратить ее с заданной точностью. При увеличении разрядной сетки ЦВМ, вычисляющей обратную ковариационную матрицу, можно добиться приемлемой точности обращения, однако всегда имеется такое предельное значение отношения  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ , превышение которого приводит к недопустимым погрешностям и снижению выходного ОСШ.

Из изложенного следует, что разрядная сетка ЦВМ, производящей обращение матрицы при алгоритме НОМ, должна выбираться с учетом допустимой обусловленности входной ковариационной матрицы.

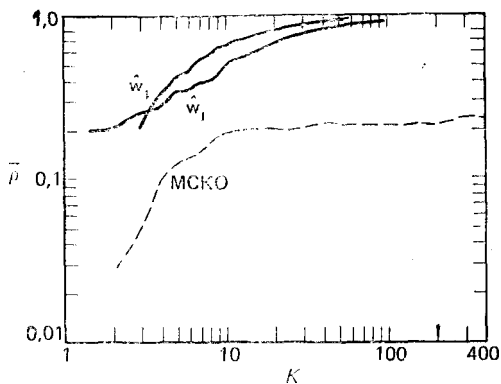


Рис. 6.7. Переходный процесс при использовании оценок  $\hat{w}_1$  и  $\hat{w}_2$ , когда имеются два источника помехи, разнесенные с источником сигнала на  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , и при  $SN_0 = 0,4158$

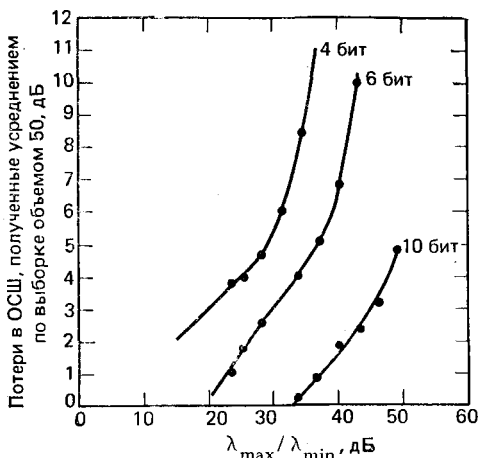


Рис. 6.8. Зависимость потерь в ОСШ от  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  при различном числе разрядов

Результаты моделирования работы четырехэлементной линейной антенной решетки при воздействии двух источников помех, показывающие зависимость потерь в выходном ОСШ от отношения  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  при различном числе разрядов ЦВМ, представлены на рис. 6.8. Из приведенных графиков ясно видно, что имеется критическое значение отношения  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  (зависит от числа разрядов),

превышение которого приводит к резкому росту потерь в выходном ОСШ. При соотношениях  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ , меньших критического, алгоритм НОМ нечувствителен к обусловленности корреляционной матрицы.

#### 6.4. ВЫВОДЫ

Скорость сходимости алгоритма НОМ во всех случаях превышает скорость сходимости алгоритма МСКО. Оптимальный весовой вектор зависит от ковариационной матрицы входного сигнала, и при алгоритме НОМ информация об этой матрице получается непосредственно путем формирования выборочной ковариационной матрицы. При отсутствии полезного сигнала наилучшие характеристики переходного процесса получаются при выборе априорно значения  $\mathbf{r}_{xd}$  в качестве вектора управляющих сигналов. При наличии полезного сигнала лучшие характеристики получаются при использовании вместо  $\mathbf{r}_{xd}$  оценки  $\hat{\mathbf{r}}_{xd}$ .

Алгоритмы НОМ до некоторого критического уровня нечувствительны к распределению собственных значений входной ковариационной матрицы. Эта нечувствительность зависит от числа разрядов ЦВМ, осуществляющей обращение ковариационной матрицы. Практическая возможность реализации алгоритма НОМ ограничивается числом степеней свободы адаптивного процессора. В том случае, когда реализация алгоритма НОМ возможна, ее сложность вполне окупается быстрой сходимостью и нечувствительностью к плохой обусловленности ковариационной матрицы.

#### ЗАДАЧИ

1. При алгоритме НОМ при каждом вычислении нового весового вектора требуется обращать матрицу. Используя соотношение

$$[\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{R}\mathbf{u}^\dagger]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}[\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{u}^\dagger\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}]^{-1}\mathbf{u}^\dagger\mathbf{A}^{-1},$$

покажите, что весовой вектор можно вычислять по рекуррентной формуле

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k-1) + \frac{\mathbf{P}(k-1) \mathbf{x}(k) \varepsilon^*(k)}{1 + \mathbf{x}^\dagger(k) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{x}(k)},$$

где

$$\varepsilon^*(k) = -\mathbf{x}^\dagger(k) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{b}^*,$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \frac{\mathbf{P}(k-1) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^\dagger(k) \mathbf{P}(k-1)}{1 + \mathbf{x}^\dagger(k) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{x}(k)}.$$

*Указание.* Примените приведенное соотношение к обращению матрицы  $[\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k-1) + \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^\dagger(k)]$ .

2. Рассмотрите адаптивный фильтр, построенный на линии задержки с отводами, выходные сигналы которых суммируются с комплексными весовыми коэффициентами.

А. Покажите, что алгоритм НОМ, минимизирующий среднее квадратическое отклонение выходного сигнала фильтра от опорного сигнала, совпадает с алгоритмом НОМ для эквивалентной этому фильтру антенной решетки, выходные сигналы элементов которой совпадают с сигналами на отводах линии задержки.

Б. Какие ограничения на процесс дискретизации оказывает требование независимости отсчетов?

В. Используйте аналитические выражения, выведенные для адаптивных антенных решеток, для определения характера переходного процесса в адаптивном фильтре при использовании алгоритма НОМ. Предположите, что выборочные отсчеты независимы.

3. Определите плотность распределения вероятностей вектора  $\Delta \mathbf{w} = \hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_{\text{опт}}$ , зная плотность  $r^2 = [\xi(\hat{\mathbf{w}}) - \xi_{\text{min}}] / \xi_{\text{min}}$ . Покажите, что корреляционная матрица вектора  $\Delta \mathbf{w}$  зависит от корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$ .

4. Исходя из формулы для

$$\rho = \frac{\hat{\mathbf{w}}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \hat{\mathbf{w}}}{\hat{\mathbf{w}}^\dagger (\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger) \hat{\mathbf{w}}} \frac{1}{SN_0},$$

покажите, что

$$\rho = \frac{1}{1 + (1 + SN_0) \sum_{i=2}^N \frac{|\Delta q_i|^2}{|\sqrt{SN_0} + \Delta q_1|^2}},$$

где

$$\Delta \mathbf{q} = \sqrt{SN_0} \hat{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} \sqrt{SN_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \sqrt{\frac{SN_0}{1 + SN_0}} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}_{xx}^{1/2} \hat{\mathbf{w}},$$

а  $\mathbf{P}$  — унитарное преобразование, определяемое соотношением

$$\sqrt{\frac{SN_0}{1 + SN_0}} \mathbf{R}_{xx}^{1/2} \mathbf{w}_0 = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Плотность распределения вероятностей величины  $\Delta q$  имеет вид

$$\rho(\Delta q) = \frac{K!}{\pi^N (K-N)!} \frac{1}{(1 + \Delta q^\dagger \Delta q)^{K+1}}.$$

5. Используя формулу для плотности распределения вероятностей  $\Delta q$  в задаче 4, с помощью преобразования

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{\Delta q_1\} &= r \cos \varphi_1 \\ \operatorname{Im} \{\Delta q_1\} &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \operatorname{Re} \{\Delta q_2\} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \operatorname{Im} \{\Delta q_2\} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \\ &\vdots \\ \operatorname{Re} \{\Delta q_N\} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{2N-2} \cos \varphi_{2N-1} \\ \operatorname{Im} \{\Delta q_N\} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{2N-2} \sin \varphi_{2N-1}. \end{aligned}$$

где  $0 \leq r < \infty$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_i < \pi, \quad i = 1, 2, \dots, 2N-2, \\ 0 &\leq \varphi_{2N-1} < 2\pi, \end{aligned}$$

получите плотность распределения вероятностей  $p(r, \varphi_1, \varphi_2)$  (6.40) и выражение для  $\rho(r, \varphi_1, \varphi_2)$ .

*Указание.* Якобиан преобразования равен

$$J = r^{2N-1} (\sin \varphi_1)^{2N-2} (\sin \varphi_2)^{2N-3} \dots \sin \varphi_{2N-2}$$

и

$$\int_0^\pi (\sin \varphi)^n d\varphi = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma[(n+2)/2]} \sqrt{\pi}.$$

6. Выведите формулу (6.44), используя выражение (6.33) и учитывая, что для КБЛ  $\xi(\widehat{\mathbf{w}}) = \sigma_s^2 + \sigma_N^2$ ,  $\xi_{\min} = \xi_{N_0} + \sigma_s^2$ , где  $\sigma_N^2$  — мощность выходного шума и помехи.

7. Определим преобразование  $\mathbf{R}'_{xx}$  в (6.29) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= K \left[ \widehat{\sigma}_0^2 - \widehat{\mathbf{r}}_{xx_0}^\dagger \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{xx_0} \right], \\ \mathbf{Y} &= K \widehat{\mathbf{R}}_{xx}, \\ \widehat{\mathbf{w}} &= \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{xxd}. \end{aligned}$$

Тогда совместная плотность распределения вероятностей  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{Y}$  и  $\widehat{\mathbf{w}}$  будет

$$p(x, \mathbf{Y}, \widehat{\mathbf{w}}) = P(x) P(\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{Y}),$$

где

$$\begin{aligned} p(\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{Y}) &= \\ &= \frac{|\mathbf{Y}|^{K-N+1} \exp \{ -\operatorname{tr} [I + (1/\xi_0) \Delta \mathbf{w} \Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx}] \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{Y} \}}{\pi^N \pi^{(1/2)N(N-1)} \Gamma(K) \dots \Gamma(K-N+1) |\mathbf{R}_{xx}|^K |\xi_0|^N}, \\ \Delta \mathbf{w} &= \widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_{\text{опт}}. \end{aligned}$$

Используя указанные соотношения, выведите выражение (6.34) для плотности распределения вероятностей величины

$$r^2 = (1/\xi_0) \Delta \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \Delta \mathbf{w}.$$

8. Случайная величина  $x$  в задаче 7 имеет плотность распределения вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{(\xi_0)^{K-N}} \frac{1}{\Gamma(K-N)} |x|^{K-N-1} \exp \left[ -\frac{x}{\xi_0} \right].$$

А. Покажите, что  $2x/\xi_0$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $2(K-N)$  степенями свободы.

Б. Покажите, что  $\xi(\widehat{\mathbf{w}}) = (1/K)x$  имеет математическое ожидание и дисперсию [см. (6.31), (6.32)], равные

$$E\{\xi(\widehat{\mathbf{w}})\} = \left(1 - \frac{N}{K}\right) \xi_0,$$

$$\text{var}\{\xi(\widehat{\mathbf{w}})\} = \frac{K-N}{K^2} \xi_0^2.$$

9. Обращение комплексных матриц с помощью операций над действительными числами [8, 9]. Способы обращения комплексных матриц с помощью действительных матричных операций представляют значительный интерес, поскольку математическое обеспечение малых ЭВМ обычно включает только действительные матричные операции. (Следует отметить, что подпрограммы обращения матриц, в которых используются операции над комплексными числами, по точности и времени вычисления, как правило, превосходят подпрограммы, основанные на обращении действительных матриц.)

А. Обращение комплексной матрицы  $M = A + jB$  размером  $n \times n$  эквивалентно решению системы двух уравнений:

$$AE - BF = I,$$

$$AF + BE = 0,$$

где  $E$  и  $F$  — неизвестные матрицы, связанные с  $M^{-1}$  соотношением  $M^{-1} = E + jF$ . Умножая слева первое уравнение на  $B$ , а второе на  $A$  и производя вычитание, получите соотношение

$$[AB - BA]E + [A^2 + B^2]F = -B.$$

Аналогично, умножая слева первое уравнение на  $A$ , а второе на  $B$  и производя вычитание, получите

$$[BA - AB]F + [A^2 + B^2]E = A.$$

При условии, что  $A$  и  $B$  коммутируют (т. е.  $AB = BA$ ), покажите, что  $M^{-1} = [A^2 + B^2]^{-1} [A - jB]$ . Отсюда видно, что для обращения комплексной матрицы размером  $n \times n$  достаточно обратить действительную матрицу того же размера, однако этот результат ограничивается случаем, когда  $A$  и  $B$  коммутируют.

Б. Пусть  $C = A + B$  и  $D = A - B$ . Покажите, что исходная пара уравнений в п. А сводится к

$$CE + DF = I,$$

$$-DE + CF = -I.$$

Решая эту систему, покажите, что

$$M^{-1} = [C + DC^{-1}D]^{-1} [(DC^{-1} + I) + j(DC^{-1} - I)]$$

или

$$M^{-1} = [D + CD^{-1}C]^{-1} [(CD^{-1} + I) + j(-CD^{-1} + I)]$$

при условии, что соответствующие обратные матрицы существуют. Полученные соотношения дают другой способ вычисления  $M^{-1}$  с помощью обращения действительной матрицы размером  $n \times n$  теперь уже без предположения о перестановочности матриц  $A$  и  $B$ .

В. Существует изоморфизм между полем комплексных чисел и матрицами размером  $2 \times 2$  специального вида:

$$a + jb \simeq \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Рассмотрите действительные матрицы размером  $2n \times 2n$  вида

$$G \triangleq \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \text{ и } H = \begin{bmatrix} E & F \\ -F & E \end{bmatrix}.$$

Покажите, что  $H$  является обратной по отношению к  $G$  тогда и только тогда, когда выполняются соотношения, приведенные в п. А. Таким образом, один из путей вычисления  $M^{-1}$  состоит в обращении матрицы  $G$  и выделении соответствующих блоков  $E$  и  $F$ , представляющих матрицу  $M^{-1} = E + jF$ . Этот подход не связан с ограничениями, присутствующими в п. А и Б, но требует обращения матрицы размером  $2n \times 2n$ . Это обстоятельство обуславливает повышенные требования к памяти ЦВМ, в связи с чем рассматриваемый подход следует применять только в крайнем случае.

## Глава 7. РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

Для того чтобы избежать трудностей, связанных с прямым вычислением совокупности весовых коэффициентов для процессора антенной решетки, можно воспользоваться алгоритмами МСКО и максимума ОСШ (МСШ). В гл. 9 будет показано, что при использовании алгоритмов случайного поиска расчетные процедуры также существенно упрощаются. По сравнению с прямым вычислением весовых коэффициентов указанные алгоритмы обычно характеризуются более простыми вычислениями, оказываются менее чувствительными к погрешностям аппаратуры и обеспечивают непрерывную подстройку в соответствии с изменяющимися условиями приема сигнала.

Для успешного решения вычислительных проблем может быть использован также другой класс процессоров, базирующихся на рекуррентных методах обработки [1—4]. Основу этих методов составляет рекуррентное обращение матриц при прямом методе вычисления весовых коэффициентов, так что исключаются временные затраты, связанные с непосредственным обращением корреляционной матрицы. Поэтому в установившемся режиме рекуррентные алгоритмы (РА) должны обладать такой же чувствительностью к распределению собственных значений корреляционной матрицы входных сигналов, что и ранее рассмотренные алгоритмы НОМ. Кроме того, так как основное различие между рекуррентными методами и алгоритмами НОМ заключается лишь в способе вычисления обратной матрицы, то скорости сходимости при использовании обоих подходов оказываются сравнимыми. Рекуррентные алгоритмы, основанные на методах МСКО, близки к методам калмановской фильтрации [5]. Предполагается, что

при использовании этих методов сигналы элементов антенной решетки имеют вид выборочных отсчетов, а адаптивная подстройка весовых коэффициентов осуществляется цифровым процессором. При стационарных условиях приема такие рекуррентные процедуры на каждой итерации обеспечивают вычисление наилучших значений весовых коэффициентов (оптимальных в смысле минимума СКО), тогда как алгоритмы МСКО, МСШ и случайного поиска формируют лишь асимптотически оптимальные значения весовых коэффициентов.

### 7.1. УСТРОЙСТВО ОБРАБОТКИ ПО МИНИМУМУ ВЗВЕШЕННОЙ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Рассмотрим типовую  $N$ -элементную антенную решетку, показанную на рис. 7.1, в которой принятые сигналы умножаются на (действительные или комплексные) весовые коэффициенты, в результате чего обеспечивается адаптивная обработка. Предположим, что принятые сигналы  $x_i(t)$  содержат составляющую полезного сигнала  $s_i(t)$  от точечного источника и случайную составляющую шума  $n_i(t)$  (обусловленную как внешним, так и собственным шумом приемника), т. е.  $x_i(t) = s_i(t) + n_i(t)$ . Рассматривая принятые сигналы  $x_i(t)$  и весовые коэффициенты  $w_i(t)$  в качестве составляющих  $N$ -мерных векторов  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{w}(t)$ , можно записать выходной сигнал адаптивного процессора в виде

$$y(t) = \mathbf{w}^T(t)\mathbf{x}(t). \quad (7.1)$$

Для упрощения анализа выбрана модель узкополосного процессора, представленная на рис. 7.1, а не более общая модель процессора широкополосных сигналов с использованием многоотводных линий задержки (ЛЗ) в каждом канале. Результаты рассмотрения такого упрощенного варианта процессора с обработкой по минимуму взвешенной СКО можно легко распространить на более общую структуру процессора на базе многоотводных ЛЗ.

В качестве меры эффективности обработки по минимуму взвешенной СКО при использовании  $k$  выборочных значений согласно [6] выберем величину

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \alpha_i |\mathbf{w}^T \mathbf{x}(i) - d(i)|^2 = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{X}(k)\mathbf{w} - \mathbf{d}(k)]^T \mathbf{A}_k^{-1} [\mathbf{X}(k)\mathbf{w} - \mathbf{d}(k)], \end{aligned} \quad (7.2)$$

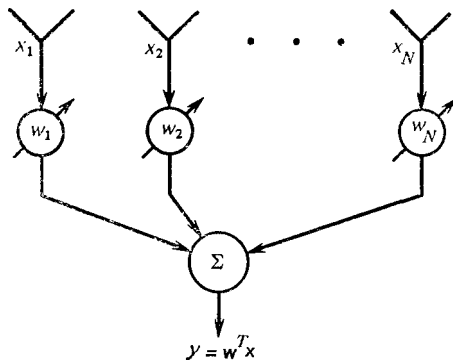


Рис. 7.1. Структурная схема процессора типовой  $N$ -элементной адаптивной антенной решетки

где составляющими  $\mathbf{X}(k)$  являются значения вектора принятого сигнала, а составляющими  $\mathbf{d}(k)$  — значения полезного (или опорного) сигнала, определяемые соответственно как

$$\mathbf{X}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(1) \\ \mathbf{x}^T(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(k) \end{bmatrix}, \quad (7.3) \quad \mathbf{d}(k) \triangleq \begin{bmatrix} d(1) \\ d(2) \\ \vdots \\ d(k) \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Необходимо отметить, что в (7.4), а следовательно, и в (7.2) предполагается, что полезный сигнал  $d(t)$  на выходе антенной решетки имеется (или известен), так что можно получить выборочные значения полезного сигнала  $d(1), d(2), \dots, d(k)$ . Матрица весовых коэффициентов  $\mathbf{A}_k$  в уравнении (7.2) выбирается диагональной и предназначена для преобразования старых данных в новые и имеет вид

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \alpha^{k-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{k-2} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ , так что старым данным придается все меньшая значимость. Если условия приема являются стационарными и все выборочные отсчеты одинаково важны, то в качестве  $\mathbf{A}_k$  можно выбрать единичную матрицу, т. е.  $\mathbf{A}_k = \mathbf{I}$ . Мера эффективности (7.2) будет минимизироваться выбором весового вектора, обеспечивающего «наилучшую» (по минимуму взвешенной СКО) оценку вектора полезного сигнала  $\mathbf{d}(k)$ .

Для минимизации (7.2) необходимо вычислить градиент  $\mathcal{P}(\mathbf{w})$  по  $\mathbf{w}$  и приравнять его нулю. В результате получим следующее соотношение для оптимального весового вектора:

$$\mathbf{w}_{ls}(k) = [\mathbf{X}^T(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{X}(k)]^{-1}\mathbf{X}^T(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{d}(k). \quad (7.6)$$

При использовании дополнительных выборочных отсчетов значение весового вектора в (7.6) должно быть скорректировано наиболее эффективным способом. С учетом коррекции новые значения векторов сигналов  $\mathbf{X}(k+1)$  и  $\mathbf{d}(k+1)$ , а также матрицы  $\mathbf{A}_{k+1}$  могут быть представлены как

$$\mathbf{X}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{X}^T(k+1) \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{d}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{A}_k & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 \dots 0 & | & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$



С учетом блочной формы выражений (7.7)—(7.9) новое значение весового вектора будет равно

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{is}(k+1) &= [\mathbf{X}^T(k+1)\mathbf{A}_{k+1}^{-1}\mathbf{X}(k+1)]^{-1}\mathbf{X}^T(k+1)\mathbf{A}_{k+1}^{-1}\mathbf{d}(k+1) = \\ &= [\mathbf{X}^T(k+1)\mathbf{A}_{k+1}^{-1}\mathbf{X}(k+1)]^{-1}[\alpha\mathbf{X}^T(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{d}(k) + \mathbf{x}(k+1) \times \\ &\quad \times \mathbf{d}(k+1)]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Из выражения (7.10) видно, что для получения нового значения весового вектора  $\mathbf{w}_{is}(k+1)$  требуется обращение матрицы  $[\mathbf{X}^T(k+1) \times \mathbf{A}_{k+1}^{-1}\mathbf{X}(k+1)]$ . Эта операция может быть выполнена следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}^T(k+1)\mathbf{A}_{k+1}^{-1}\mathbf{X}(k+1)]^{-1} &= \left\{ [\mathbf{X}^T(k) \mid \mathbf{x}(k+1)] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \dots 0 \mid 1 \end{bmatrix} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{\mathbf{X}(k)}{\mathbf{x}^T(k+1)} \right] \right\}^{-1} = \{\alpha[\mathbf{X}^T(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{X}^T(k)] + \mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{P}^{-1}(k) \triangleq \mathbf{X}^T(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{X}(k), \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}(k+1) &\triangleq \mathbf{X}^T(k+1)\mathbf{A}_{k+1}^{-1}\mathbf{X}(k+1) = \\ &= \alpha[\mathbf{X}^T(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{X}(k)] + \mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1) = \\ &= \alpha \left[ \mathbf{P}^{-1}(k) + \frac{1}{\alpha} \mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1) \right]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Выполнив операции обращения для обеих частей выражения (7.13) с учетом леммы обращения матриц (Г.10) из приложения Г, получим

$$\mathbf{P}(k+1) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \mathbf{P}(k) - \frac{\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}(k)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k+1)} \right\}. \quad (7.14)$$

Подставив (7.14) в (7.10) и учитывая, что  $\mathbf{w}_{is} = \mathbf{P}(k)\mathbf{X}(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{d}(k)$ , запишем выражение для нового значения весового вектора в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{is}(k+1) &= \mathbf{w}_{is}(k) + \frac{\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k+1)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k+1)} \times \\ &\quad \times [\mathbf{d}(k+1) - \mathbf{w}_{is}^T(k)\mathbf{x}(k+1)]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Соотношения (7.14) и (7.15) определяют рассматриваемый рекуррентный алгоритм. Процедуры (7.14) и (7.15) начинаются с выбора весового вектора  $\mathbf{w}(0)$  и эрмитовой матрицы  $\mathbf{P}(0)$ . На практике в качестве начального весового вектора обычно выбирают вектор  $\mathbf{w}(0) = [1, 0, 0, \dots, 0]$ , тем самым формируя ненаправленную диаграмму антенной решетки (при ненаправленных элементах). В качестве начальной матрицы  $\mathbf{P}(0)$  обычно берется единичная матрица.

Как видно из выражений (7.14) и (7.15), при определении весового вектора  $w_{ls}(k+1)$  нет необходимости в вычислении обратных матриц, как это требовалось согласно (7.6) и (7.10). Для более ясного понимания сути работы адаптивного процессора целесообразно более детально проанализировать соотношение (7.6). Поскольку след матрицы  $A_k$  является скаляром, то выражение (7.6) можно записать в виде

$$w_{ls}(k) = \left\{ \frac{\mathbf{x}^T(k) A_k^{-1} \mathbf{x}(k)}{\text{tr}[A_k]} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{x}^T(k) A_k^{-1} \mathbf{d}(k)}{\text{tr}[A_k]} \right\}. \quad (7.16)$$

Первый множитель в правой части (7.16) является оценкой корреляционной матрицы  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}$  при использовании  $k$  выборочных значений, т. е.

$$[\widehat{\mathbf{R}}_{xx}]_{i,j}(k) = \sum_{n=1}^k \alpha^{k-n} x_i(n) x_j(n). \quad (7.17)$$

Оценка (7.17) использовалась также в работе [2]. Аналогичным образом второй множитель в правой части (7.16) представляет собой оценку вектора взаимной корреляции  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}(k)$ . Следовательно, матрица  $\mathbf{P}$  из (7.12) связана с корреляционной матрицей соотношением

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) &= \text{tr}[A_k] \mathbf{P}(k) = (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1}) \mathbf{P}(k) = \\ &= \left[ \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \right] \mathbf{P}(k). \end{aligned} \quad (7.18)$$

В записи алгоритмов обработки (7.14) и (7.15) предполагается, что полезный сигнал при каждом формировании выборочных отсчетов известен, что является нереальным предположением, исключающим необходимость использования процессора. На практике достаточно иметь аппроксимацию или оценку полезного сигнала. Поэтому, заменив в уравнении (7.15) величину  $d(k+1)$  ее оценкой  $\widehat{d}(k+1)$ , можно получить для практических применений полезную структуру рекуррентного процессора с обработкой по минимуму взвешенной СКО.

Можно получить также соотношения, эквивалентные (7.15), которые окажутся полезными для различных условий приема сигнала, если заменить мгновенные значения величин их известными средними значениями [3, 7]. Для получения таких эквивалентных форм перепишем (7.15) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) \frac{\mathbf{P}(k)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{P}(k) \mathbf{x}(k+1)} \times \\ &\times [\mathbf{x}(k+1) d(k+1) - \mathbf{x}(k+1) y(k+1)], \end{aligned} \quad (7.19)$$

где  $y(k+1)$  — выходной сигнал антенной решетки. Произведение  $\mathbf{x}(k+1) d(k+1)$  можно заменить средним значением, которое представляет собой оценку вектора взаимной корреляции  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}$ . Поскольку оценка  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}$  не содержит мгновенных флуктуаций векторов  $\mathbf{x}(t)$  и  $d(t)$ ,

то можно ожидать, что время сходимости должно быть больше при использовании оценки  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}$ , чем при использовании произведения  $\mathbf{x}(k)d(k)$  (как показано в гл. 6).

В том случае, когда известно только направление прихода полезного сигнала, а сам сигнал отсутствует, вектор взаимной корреляции  $\mathbf{r}_{xd}$  (который содержит информацию о направлении поступления сигнала) оказывается известным и алгоритм для вычисления весового вектора принимает вид

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\mathbf{P}(k)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k+1)} \times \\ \times [\mathbf{r}_{xd} - \mathbf{x}(k+1)y(k+1)]. \quad (7.20)$$

Конечно, уравнение (7.20) может использоваться также для вычисления весового вектора и при наличии полезного сигнала, однако скорость сходимости при этом будет меньше, чем при использовании уравнения (7.19).

При стационарных условиях приема сигнала выбирают  $\alpha = 1$ , однако такой выбор на практике может привести к определенным трудностям. До тех пор, пока  $0 < \alpha < 1$ , цифровые процедуры реализации (7.14) и (7.15) являются устойчивыми. При  $\alpha = 1$ , однако, большое число итераций может привести к тому, что составляющие  $\mathbf{P}(k)$  станут настолько малыми, что погрешности округления будут оказывать существенное влияние на результаты вычислений. Для того чтобы при  $\alpha = 1$  избежать указанной вычислительной трудности, можно умножить обе части уравнения (7.14) на  $(k+1)$  и обеспечить тем самым устойчивую работу системы. При этом условии выражение (7.18) примет вид

$$\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) = k\mathbf{P}(k). \quad (7.21)$$

## 7.2. РЕКУРРЕНТНОЕ ОБРАЩЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Процессор с обработкой по минимуму взвешенной СКО, рассмотренный в предыдущем разделе, базировался на процедуре

$$\mathbf{P}^{-1}(k+1) = \alpha\mathbf{P}^{-1}(k) + \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{x}^T(k+1), \quad (7.22)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;  $\mathbf{P}^{-1}(k) \triangleq \mathbf{X}^T(k)\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{X}(k)$ . Другая, близкая по своим свойствам, схема весовой обработки данных основана на использовании оценки выборочной ковариационной матрицы  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}$ :

$$\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(k+1) = \alpha\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(k) + \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{x}^T(k+1), \quad (7.23)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ . В результате обращения обеих частей (7.23) получим

$$\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k+1) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(k) + \frac{1}{\alpha} \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{x}^T(k+1) \right\}^{-1}. \quad (7.24)$$

Применив к (7.24) лемму об обращении матриц, запишем выражение

$$\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k+1) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) - \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1) \mathbf{x}^T(k+1)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1) \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1)} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \right\}. \quad (7.25)$$

При отсутствии полезного сигнала  $\mathbf{w}_{\text{онт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{b}^*$  (или  $\mathbf{w}_{\text{онт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}$ ), так что умножение обеих частей выражения (7.25) справа на  $\mathbf{b}^*$  дает следующее рекуррентное соотношение для весового вектора:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{w}}(k+1) &= \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \widehat{\mathbf{w}}(k) - \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1) \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1)} \mathbf{x}^T(k+1) \widehat{\mathbf{w}}(k) \right\}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Согласно процедуре весовой обработки, соответствующей (7.26), подразумевается, что предыдущие данные [характеризуемые  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(k)$ ] имеют меньшую значимость по сравнению с текущими данными [характеризуемыми  $\mathbf{x}^*(k+1) \mathbf{x}^T(k+1)$ ]. Другой алгоритм весовой обработки, в котором предусмотрена возможность учета значимости предыдущих данных по сравнению с текущими, основан на процедуре

$$\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(k+1) = (1-\beta) \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(k) + \beta \mathbf{x}^*(k+1) \mathbf{x}^T(k+1), \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (7.27)$$

Устройство, реализующее весовую обработку (7.27), успешно применялось [при  $\beta = 1/(k+1)$ ] для подавления отражений от местных предметов, для компенсации собственного движения платформы, а также для компенсации эффектов рассеяния в ближней зоне в бортовой радиолокационной системе с селекцией движущихся целей (СДЦ) [8]. Применяв операцию обращения к обеим частям (7.27) и лемму (Г.10), получим [9]

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k+1) &= \frac{1}{(1-\beta)} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) - \\ &- \frac{\beta}{(1-\beta)} \frac{[\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1)] [\mathbf{x}^T(k+1) \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k)]}{(1-\beta) + \beta [\mathbf{x}^T(k+1) \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1)]}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Для того чтобы определить новое значение весового вектора, необходимо умножить  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k+1)$  справа на вектор управления диаграммой  $\mathbf{b}^*$ . В радиолокационных системах с СДЦ вектор  $\mathbf{b}^*$  может быть выбран с учетом среднего значения частоты Доплера, вызванной движением цели. При таком согласовании уменьшается влияние помех в главном лепестке диаграммы направленности, обусловленных неподвижными объектами [8, 10]. Умножив (7.28) справа на вектор  $\mathbf{b}^*$ , получим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{w}}(k+1) &= \frac{1}{(1-\beta)} \times \\ &\times \left\{ \widehat{\mathbf{w}}(k) - \beta \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1)}{(1-\beta) + \beta [\mathbf{x}^T(k+1) \widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k) \mathbf{x}^*(k+1)]} \mathbf{x}^T(k+1) \widehat{\mathbf{w}}(k) \right\}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Для вычисления оценки по формуле (7.28) потребуется  $N^2$  комплексных умножений для формирования  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k)\mathbf{x}^*(k+1)$ , где  $N$  — число степеней свободы адаптивного процессора. Кроме того, потребуется  $0,75N^2$  и  $2,25N$  дополнительных умножений для вычисления  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k+1)$ . Сравнивая выражения (7.29) и (7.26) с (7.20), можно заметить, что информация о направлении прихода сигналов, содержащаяся в векторе  $\mathbf{r}_{xd}$  (или  $\mathbf{b}^*$ ), отсутствует в (7.26) и (7.29). Очевидно, что начальный весовой вектор в процедурах (7.26) или (7.29) соответствует некоторой информации относительно направления прихода сигнала. В целом можно сказать, что уравнения (7.20), (7.26) и (7.29) представляют собой просто различные варианты более общего уравнения весовой обработки данных.

### 7.3. МЕТОДЫ КАЛМАНОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АНТЕННОЙ РЕШЕТКЕ

Задачи адаптивного управления, характерные для небольших связанных антенных решеток, являются относительно простыми и часто успешно решаются с помощью алгоритмов адаптивного управления, основанных на градиентных методах, а также методах случайного поиска. В более сложных задачах, таких как дистанционное управление летательными аппаратами или сопровождение по угловой координате в радиолокационных системах, зачастую требуется и более сложная обработка сигналов. Для таких приложений сравнительно недавно [5] были предложены методы адаптивной обработки, основанные на калмановской фильтрации [11, 12]. Эти методы требуют больше априорной информации об условиях приема сигнала, чем другие методы, и открывают возможности для построения процессоров, объединяющих управление адаптивной антенной решеткой с другими функциями системы, такими как определение местоположения и навигация.

#### 7.3.1. Процессор калмановского типа

Снова обратимся к модели узкополосной простой  $N$ -элементной линейной антенной решетки (рис. 7.1), в которой:  $\mathbf{x}(k)$  — сигнальный вектор,  $\mathbf{w}(k)$  — весовой вектор адаптивного процессора (в соответствующие дискретные моменты времени) и  $y(k) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)$  — выходной сигнал антенной решетки. Для обработки широкополосных сигналов каждый из каналов решетки должен содержать фильтр на базе многоотводной ЛЗ, при этом сигналы с отводов ЛЗ и соответствующие весовые коэффициенты также могут представляться векторами  $\mathbf{x}(k)$  и  $\mathbf{w}(k)$ . Поэтому математическое описание процедуры обработки остается тем же, что и для узкополосного сигнала.

Пусть динамические характеристики оптимальных весовых коэффициентов антенной решетки определяются уравнением состояния

$$\mathbf{w}_{\text{опт}}(k+1) = \Phi(k+1, k)\mathbf{w}_{\text{опт}}(k); \quad \mathbf{w}_{\text{опт}}(0) = \mathbf{w}_0, \quad (7.30)$$

где  $\Phi(k+1, k)$  — переходная матрица состояния. Если условия приема сигнала стационарны, то оптимальные весовые коэффициенты будут постоянными, а матрица  $\Phi(k+1, k)$  — единичной. В случае изменяющихся во времени условий приема должна использоваться более сложная модель матрицы  $\Phi(k+1, k)$ , учитывающая характер изменяющейся обстановки. Пусть система характеризуется уравнением наблюдения

$$d(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}_{\text{опт}}(k) + v(k), \quad (7.31)$$

где  $v(k)$  — гауссовский белый шум с нулевым средним и дисперсией

$$E \{v(k) v(j)\} = \sigma^2(k) \delta_{kj}. \quad (7.32)$$

Выбор величины  $\sigma^2(k)$  рассматривается далее.

Для динамической модели (7.30) с вектором состояния  $\mathbf{w}_{\text{опт}}(k)$  и наблюдаемым сигналом (7.31) устройство оценки весовых коэффициентов решетки (а не полезного сигнала) по минимуму СКО может быть получено на основе результатов теории калмановской фильтрации. При таком подходе оптимальная оценка будет определяться выражением [12]

$$\widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k) = \widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k) [d(k) - \mathbf{x}^T(k) \widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k-1)], \quad (7.33)$$

где  $\widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k)$  — оценка величины  $\mathbf{w}_{\text{опт}}(k)$ , основанная на предыдущих наблюдениях вплоть до момента времени  $k$ ;  $\widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k-1)$  — оценка величины  $\mathbf{w}_{\text{опт}}(k)$ , базирующаяся на наблюдениях вплоть до момента времени  $(k-1)$  [прогноз для  $\mathbf{w}_{\text{опт}}(k)$ ];  $\mathbf{K}(k)$  — матрица коэффициентов передачи калмановского фильтра. Для комплексных величин (7.33) будет иметь вид

$$\widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k) = \widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k) [d^*(k) - \mathbf{x}^\dagger(k) \widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k-1)], \quad (7.34)$$

где символами  $*$  и  $\dagger$  обозначены соответственно операции комплексного сопряжения и комплексного сопряжения и транспонирования.

Тогда

$$\widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k/k-1) = \Phi(k, k-1) \widehat{\mathbf{w}}_{\text{опт}}(k-1/k-1), \quad (7.35)$$

а величина в квадратных скобках в (7.34) является разностью между действительным выходным сигналом и его прогнозируемым значением. Процессор калмановского типа, определяемый указанными уравнениями, показан на рис. 7.2, где для действительных величин

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{x}(k)}{[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{x}(k) + \sigma^2(k)]}, \quad (7.36)$$

а для комплексных величин

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{x}^*(k)}{[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{x}^*(k) + \sigma^2(k)]}. \quad (7.37)$$

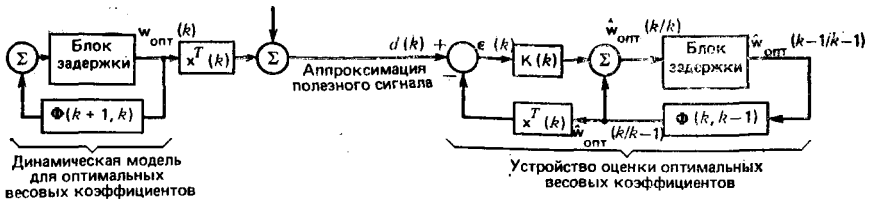


Рис. 7.2. Структурная схема процессора калмановского типа для оптимальных весовых коэффициентов

Ковариационная матрица ошибки прогноза определяется соотношением

$$P(k/k-1) = \Phi(k, k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k, k-1), \quad (7.38)$$

а ковариационная матрица ошибки после фильтрации

$$P(k/k) \triangleq E \{ [w_{\text{опт}}(k) - \hat{w}_{\text{опт}}(k/k)] [w_{\text{опт}}(k) - \hat{w}_{\text{опт}}(k/k)]^T \}. \quad (7.39)$$

Выражение (7.39) можно представить в виде

$$P(k/k) = P(k/k-1) - K(k)x^T(k)P(k/k-1). \quad (7.40)$$

Подставив (7.36) в (7.40), получим

$$P(k/k) = P(k/k-1) - \frac{P(k/k-1)x(k)x^T(k)P(k/k-1)}{[\sigma^2(k) + x^T(k)P(k/k-1)x(k)]}. \quad (7.41)$$

Сравнивая (7.41) и (7.14), можно заметить большое сходство между рекуррентными соотношениями для  $P(k+1)$  в (7.14) и для  $P(k/k)$  в (7.41). Если к уравнению (7.41) применить лемму (Г.10) из приложения Г, то можно получить

$$P^{-1}(k/k) = P^{-1}(k/k-1) + \frac{1}{\sigma^2(k)} x(k)x^T(k). \quad (7.42)$$

Из сравнения (7.42) и (7.13) видно, что ковариационная матрица ошибок при использовании процессора калмановского типа и  $\sigma^2(k) = 1$  соответствует матрице  $P(k)$  процессора с обработкой по минимуму взвешенной СКО при  $\alpha = 1$ . В этом случае из (7.21) следует, что ковариационная матрица ошибок  $P(k/k)$  связана с оценкой корреляционной матрицы  $\hat{R}_{xx}$  соотношением

$$\hat{R}_{xx}^{-1}(k) = kP(k/k). \quad (7.43)$$

Для вычислений по формулам (7.33)—(7.41) необходимо задать начальные значения  $\hat{w}(0/0)$  и  $P(0/0)$ . Желательно выбирать  $\hat{w}_{\text{опт}}(0/0) = E \{ w_{\text{опт}} \}$  и  $P(0/0) = E \{ \Delta w(0)\Delta w^T(0) \}$  [5], где  $\Delta w(0) = \hat{w}(0/0) - w_{\text{опт}}$ , а величину  $w_{\text{опт}}$  соответствующей оптимальному винеровскому решению из гл. 3:

$$w_{\text{опт}} = R_{xx}^{-1}(k)r_{xd}(k). \quad (7.44)$$

В общем случае статистики сигнала, входящие в (7.44), неизвестны и поэтому для определения начальных условий в рассматриваемых рекуррентных уравнениях используются различные (обсуждаемые далее) процедуры. Если имеется априорная информация об условиях приема сигнала, она может использоваться для формирования более точной начальной оценки  $w_{\text{опт}}$  по формуле (7.44), а также для построения динамической модели системы в соответствии с уравнением состояния (7.30).

В тех случаях, когда априорная информация об условиях приема сигнала отсутствует, обычно выбирают матрицу  $\mathbf{P}$  (0/0) единичной, а  $\widehat{w}_{\text{опт}}$  (0/0) так, чтобы диаграмма антенной решетки была ненаправленной. Кроме того, необходимо каким-то образом задать величину  $\sigma^2(k)$ .

Как видно из выражения (7.33), величина в квадратных скобках является разностью между действительным выходным сигналом антенной решетки и его оценкой, полученной по предыдущим наблюдениям. Этот оптимальный выходной сигнал  $d(t)$  может рассматриваться как аппроксимация полезного сигнала, так как оптимальные весовые коэффициенты решетки рассчитывались из условия обеспечения минимума СКО для полезного сигнала. Такая интерпретация оптимального выходного сигнала решетки, в свою очередь, определяет процедуру выбора значения дисперсии шума  $\sigma^2(k)$ . Поскольку  $d(t)$  является аппроксимацией действительного полезного сигнала  $s(t)$ , то [5]

$$d(k) = \mathbf{x}^T(k)w_{\text{опт}}(k) + v(k) = s(k) + \eta(k), \quad (7.45)$$

где  $\eta(k)$  — погрешность аппроксимации сигнала  $s(k)$ . Тогда

$$v(k) = s(k) + \eta(k) - \mathbf{x}^T(k)w_{\text{опт}}(k). \quad (7.46)$$

Если  $s(k)$ ,  $\eta(k)$  и  $\mathbf{x}(k)$  — процессы с нулевым средним, то  $E\{v(k)\} = 0$ . Если к тому же  $\eta(k)$  не коррелирована с  $s(k)$  и с шумовыми составляющими  $\mathbf{x}(k)$ , то

$$\begin{aligned} \sigma^2(k) = E\{v(k)v(k)\} &= w_{\text{опт}}^T \mathbf{R}_{xx} w_{\text{опт}} - 2w_{\text{опт}}^T \mathbf{r}_{xs} + E\{s^2\} + \\ &+ E\{\eta^2\} = \xi_0^2 + E\{\eta^2\}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

где  $\xi_0$  — минимальная ошибка оценки.

Если выражение (7.33) представить в виде

$$\begin{aligned} \widehat{w}(k/k) &= \widehat{w}(k/k-1) + \\ &+ \frac{\mathbf{P}(k/k-1)}{[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{x}(k) + \sigma^2(k)]} [\mathbf{x}(k) d(k) - \mathbf{x}(k) y(k)], \end{aligned} \quad (7.48)$$

где  $y(k) = \widehat{w}^T(k/k-1)\mathbf{x}(k)$ , то, как и в предыдущем разделе, величину  $\mathbf{x}(k)d(k)$  можно заменить ее средним значением. Поэтому уравнение калмановского фильтра для весового вектора может быть модифицировано так, чтобы использовалась либо оценка  $\widehat{\mathbf{r}}_{xd}(k)$  (когда известны полезный сигнал или модель опорного сигнала), либо  $\mathbf{r}_{xd}(k)$  (когда имеется информация только о направлении прихода сигнала).



Существует и другой подход, обеспечивающий работоспособность системы с использованием процессора калмановского типа в нестационарных условиях, когда параметры изменяющихся во времени статистик сигнала неизвестны. В этом случае вместо того, чтобы пытаться построить точную динамическую модель вида (7.30), используют более простую модель:

$$w_{\text{опт}}(k+1) = w_{\text{опт}}(k) + \xi(k), \quad (7.49)$$

где  $\xi(k)$  — белый шум с нулевым средним и

$$\text{cov}[\xi(k)] = Q(k). \quad (7.50)$$

Элементы матрицы  $Q$  характеризуют степень неопределенности, связанную с предположением о стационарности условий приема. Тогда выражение (7.38) принимает вид

$$P(k/k-1) = \Phi(k, k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k, k-1) + Q. \quad (7.51)$$

Практический результат указанной модификации сводится к предотвращению недопустимого уменьшения матрицы коэффициентов передачи  $K(k)$ . При этом оценка  $\widehat{w}_{\text{опт}}$  будет «отслеживать» флуктуации действительной величины  $w_{\text{опт}}$ , хотя оценки результирующего оптимального весового вектора имеют большую дисперсию, чем в случае, когда  $Q = I$ .

### 7.3.2. Скорость сходимости

Тот факт, что величина  $\sigma^2(k)$  зависит от минимальной ошибки оценки и качества аппроксимации полезного сигнала, дает возможность получить выражение для определения скорости сходимости алгоритма при определенных условиях [13]. Выражение (7.36) можно переписать в виде

$$K(k)x^T(k)P(k/k-1)x(k) + K(k)\sigma^2(k) = P(k/k-1)x(k) \quad (7.52)$$

или

$$K(k)\sigma^2(k) = [I - K(k)x^T(k)]P(k/k-1)x(k). \quad (7.53)$$

Подставив (7.53) в (7.40), получим

$$P(k/k)x(k) = K(k)\sigma^2(k). \quad (7.54)$$

Тогда

$$K(k) = \frac{P(k/k)x(k)}{\sigma^2(k)}. \quad (7.55)$$

Подстановка (7.55) в (7.40) дает

$$P(k/k) = P(k/k-1) - \frac{P(k/k)x(k)}{\sigma^2(k)} x^T(k) P(k/k-1) \quad (7.56)$$

или

$$P(k/k) = P(k/k-1) - \frac{[P(k/k)x(k) x^T(k) P(k/k-1)]}{\sigma^2(k)}. \quad (7.57)$$

Умножив обе части (7.57) слева на  $\mathbf{P}^{-1}(k/k)$  и обе части (7.58) справа на  $\mathbf{P}^{-1}(k/k - 1)$ , получим [см. также (7.42)]

$$\mathbf{P}^{-1}(k/k) = \mathbf{P}^{-1}(k/k - 1) + \frac{\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)}{\sigma^2(k)}. \quad (7.58)$$

Выражение (7.58) можно записать в виде

$$\mathbf{P}^{-1}(k/k) = \frac{1}{\sigma^2(k)} [\sigma^2(k) \mathbf{P}^{-1}(k/k - 1) + \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)]. \quad (7.59)$$

Тогда

$$\mathbf{P}(k/k) = \sigma^2(k) [\sigma^2(k) \mathbf{P}^{-1}(k/k - 1) + \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)]^{-1}. \quad (7.60)$$

В результате многократного применения рекуррентного соотношения (7.60), начиная с  $\mathbf{P}^{-1}(0/-1)$ , получим

$$\mathbf{P}(k/k) = \sigma^2(k) \left[ \sigma^2(k) \mathbf{P}^{-1}(0/-1) + \sum_{i=1}^k \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \right]^{-1}. \quad (7.61)$$

В тех случаях, когда аппроксимация полезного сигнала довольно хорошая и  $\widehat{\sigma}^2(k)$  примерно равна ошибке оценки, можно пренебречь матрицей  $\widehat{\sigma}^2(k) \mathbf{P}^{-1}(0/-1)$  по сравнению с  $\sum_i \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i)$ . Тогда

$$\mathbf{P}(k/k) \simeq \widehat{\sigma}^2(k) \left[ \sum_{i=1}^k \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \right]^{-1}. \quad (7.62)$$

Полученное выражение с учетом (7.55) можно представить как

$$\mathbf{K}(k) \simeq \left[ \sum_{i=1}^k \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \right]^{-1} \mathbf{x}(k), \quad (7.63)$$

откуда видно, что  $\mathbf{K}(k)$  не зависит от  $\sigma^2(k)$ .

Среднее арифметическое

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \rightarrow \mathbf{R}_{xx}(k) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (7.64)$$

Для  $k$ -го момента времени СКО ошибка оценки определяется выражением [13]

$$\xi^2(k) = \text{tr} [\mathbf{P}(k/k) \mathbf{R}_{xx}(k)] + \xi_0^2. \quad (7.65)$$

Из (7.62) и (7.64) следует, что

$$\text{tr} [\mathbf{P}(k/k) \mathbf{R}_{xx}(k)] \simeq \sigma^2(k) N k^{-1}, \quad (7.66)$$

где  $N$  — размерность вектора  $\mathbf{x}(k)$ , так что СКО оценки для  $k$ -го момента времени принимает вид

$$\xi^2(k) \simeq \xi_0^2 [1 + N k^{-1}]. \quad (7.67)$$

Выражение (7.67) показывает, что теоретически рассматриваемый алгоритм калмановского типа сходится за  $2N$  итераций. Этот результат аналогичен результату сходимости алгоритма НОМ.

#### 7.4. УСТРОЙСТВО ОБРАБОТКИ ПО МИНИМУМУ ДИСПЕРСИИ ШУМА

В этом разделе целесообразно рассмотреть применение основных понятий при получении рекуррентного алгоритма обработки широкополосных сигналов настроенной антенной решетки для того, чтобы проиллюстрировать небольшие видоизменения, связанные с использованием многоканального процессора на базе многоотводных ЛЗ. Если направление прихода полезного сигнала известно, то эта инфор-

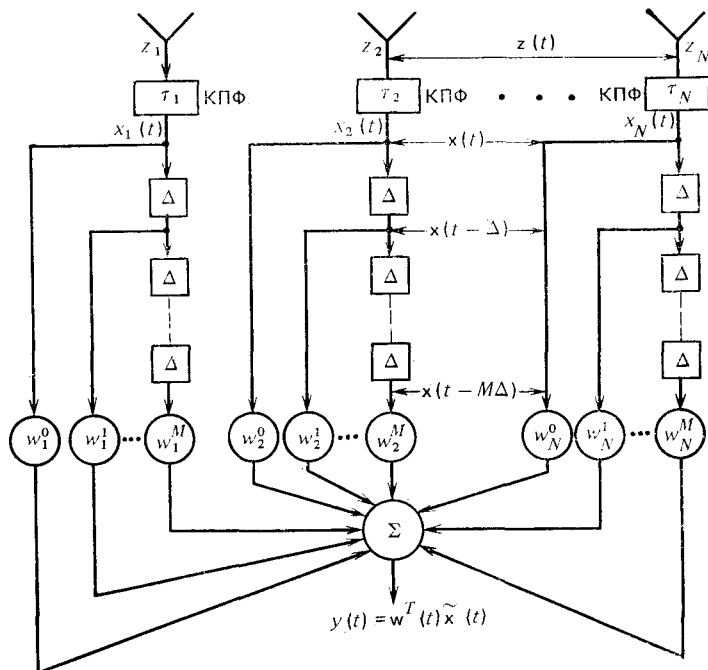


Рис. 7.3. Структурная схема процессора для обработки широкополосных сигналов в настроенной антенной решетке

мация может служить для построения антенной решетки, настроенной на сигнал, как показано на схеме рис. 7.3. В процессоре такой антенной решетки используются корректирующие пространственные фильтры (КПФ), а также информация о направлении прихода полезного сигнала для настройки решетки на сигнал путем соответствующего подбора задержек  $\tau_i$  в каждом канале. При этом [14]

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t - \tau_1) \\ z_2(t - \tau_2) \\ \vdots \\ z_N(t - \tau_N) \end{bmatrix} = d(t) \mathbf{1} + \mathbf{n}(t), \quad (7.68)$$

где  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ ;  $d(t)$  — опорный полезный сигнал;  $\mathbf{n}(t)$  — вектор составляющих помехи с учетом задержек. Определим  $(M+1)N$ -мерный вектор  $\mathbf{x}'(t)$  соотношением

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-\Delta) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-M\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \mathbf{1} \\ d(t-\Delta) \mathbf{1} \\ \vdots \\ d(t-M\Delta) \mathbf{1} \end{bmatrix} + \mathbf{n}'(t). \quad (7.69)$$

В дальнейшем будет удобно пользоваться обозначениями без штриха, помня о том, что все рассматриваемые сигналы получены в результате объединения составляющих с соответствующих отводов ЛЗ. Кроме этого, введя вектор

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^0(t) \\ \mathbf{w}^1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{w}^M(t) \end{bmatrix}, \quad (7.70)$$

выходной сигнал антенной решетки можно представить в виде

$$y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t) = d(t) \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i^0 + d(t-\Delta) \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i^1 + \dots + d(t-M\Delta) \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i^M + \mathbf{w}^T \mathbf{n}(t), \quad (7.71)$$

так как  $\mathbf{w}^{lT} \mathbf{1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i^l$ . Если адаптивные весовые коэффициенты ограничены условиями

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i^l = \begin{cases} 1, & l=0, \\ 0, & l=1, 2, \dots, k, \end{cases} \quad (7.72)$$

то выходной сигнал

$$y(t) = d(t) + \mathbf{w}^T \mathbf{n}(t). \quad (7.73)$$

Выходной сигнал, определяемый (7.73), является несмещенным, так как

$$E \{y(t)\} = E \{d(t) + \mathbf{w}^T \mathbf{n}(t)\} = d(t), \quad (7.74)$$

если считается, что вектор шума имеет нулевое среднее. Тогда дисперсия выходного сигнала будет определяться выражением

$$\text{var} [y(t)] = E \{ \mathbf{w}^T \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^T(t) \mathbf{w} \} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}. \quad (7.75)$$

Определим матрицу размером  $N(M+1) \times (M+1)$  как

$$\mathbf{I}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.76)$$

где  $\mathbf{0}$  —  $N$ -мерный вектор с нулевыми составляющими.

Если желательно минимизировать дисперсию выходного шума, то мерой эффективности системы будет

$$\mathfrak{P}_{\text{мдш}} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}. \quad (7.77)$$

Теперь желательно минимизировать (7.77) при ограничениях (7.72), которые можно переписать как

$$\mathbf{I}_1^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{c}. \quad (7.78)$$

Весовой вектор  $\mathbf{w}$ , минимизирующий (7.77) в соответствии с условиями (7.78), можно найти методом множителей Лагранжа, минимизируя модифицированную меру эффективности:

$$\mathfrak{P}_{\text{ммдш}} = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w} + \lambda [\mathbf{c} - \mathbf{I}_1^T \mathbf{w}]. \quad (7.79)$$

Для определения весового вектора необходимо: 1) приравняв нулю градиент  $\mathfrak{P}_{\text{ммдш}}$  по  $\mathbf{w}$ , получить выражение для  $\mathbf{w}_{\text{мдш}}$ ; 2) определить значение вектора  $\lambda$  так, чтобы удовлетворялось условие (7.78); 3) подставить найденное значение  $\lambda$  в выражения для  $\mathbf{w}_{\text{мдш}}$ . Тогда

$$\mathbf{w}_{\text{мдш}} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{I}_1 [\mathbf{I}_1^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{I}_1]^{-1} \mathbf{c}. \quad (7.80)$$

Для настроенной антенной решетки, подобной приведенной на рис. 7.3, можно также показать (как это было сделано в гл. 3 для узкополосного процессора), что устройство оценки по минимуму дисперсии шума, реализующее (7.80), идентично устройству оценки по максимуму правдоподобия [15].

Как следует из (7.80), для вычисления весового вектора потребуются операции измерения и обращения корреляционной матрицы шума  $\mathbf{R}_{nn}$ . Корреляционная матрица шума может быть получена из данных, содержащих также составляющие полезного сигнала, а использование рекуррентного алгоритма позволяет исключить необходимость прямого обращения матрицы  $\mathbf{R}_{nn}$ .

Трудностей, связанных с измерением корреляционной матрицы шума, когда одновременно присутствуют составляющие полезного сигнала, можно избежать, переформулировав задачу минимизации. Минимизация (7.77) при ограничениях (7.78) полностью эквивалентна задаче

$$\text{минимизировать } \mathfrak{P} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \quad (7.81)$$

при ограничениях вида

$$\mathbf{I}_1 \mathbf{w} = \mathbf{c}. \quad (7.82)$$

Решение этой задачи можно найти, как и ранее, используя метод множителей Лагранжа. В результате получим

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{I}_1 [\mathbf{I}_1^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{I}_1]^{-1} \mathbf{c}. \quad (7.83)$$

Для того чтобы показать эквивалентность задачи, определяемой выражениями (7.81) и (7.82), и исходной задачи, сформулированной в виде (7.77) и (7.78), представим матрицу  $R_{xx}$  в виде

$$R_{xx} = E \{x(t)x^T(t)\} = R_{dd} + R_{nn}, \quad (7.84)$$

где

$$R_{dd} = E \left\{ \begin{bmatrix} d(t) \mathbf{1} \\ d(t-\Delta) \mathbf{1} \\ \vdots \\ d(t-M\Delta) \mathbf{1} \end{bmatrix} [d(t) \mathbf{1}, d(t-\Delta) \mathbf{1}, \dots, d(t-M\Delta) \mathbf{1}] \right\}. \quad (7.85)$$

Подставив (7.84) в (7.81), получим задачу

$$\text{минимизировать } \mathfrak{P} = \mathbf{w}^T R_{xx} \mathbf{w} = \mathbf{w}^T R_{nn} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T R_{dd} \mathbf{w} \quad (7.86)$$

с учетом ограничения (7.72)

$$\mathfrak{P} = \mathbf{w}^T R_{nn} \mathbf{w} + E \{d^2(t)\}. \quad (7.87)$$

Задача минимизации (7.87) при ограничениях (7.82) должна иметь точно такое же решение, что и задача минимизации (7.77) при ограничениях (7.78), поскольку  $E \{d^2(t)\}$  не зависит от  $\mathbf{w}$ , т. е. указанные задачи эквивалентны.

В качестве оценки корреляционной матрицы принятого сигнала в  $k$ -й момент времени можно использовать

$$\widehat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{\left( \sum_{n=1}^k \alpha^{k-n} \right)} \sum_{n=1}^k \alpha^{k-n} \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n), \quad (7.88)$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ . Вводя обозначения

$$\mathbf{x}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(1) \\ \mathbf{x}^T(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(k) \end{bmatrix}, \quad (7.89)$$

$$\mathbf{A}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \alpha^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{k-2} & & \vdots \\ \vdots & & \alpha & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.90)$$

выражение для  $\widehat{R}_{xx}(k)$  можно переписать в виде

$$\widehat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{A}(k)]} \mathbf{X}^T(k) \mathbf{A}(k) \mathbf{X}(k) = \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{A}(k)]} \mathbf{P}^{-1}(k), \quad (7.91)$$

где  $\mathbf{P}^{-1}(k) \triangleq \mathbf{X}^T(k) \mathbf{A}(k) \mathbf{X}(k)$ . Представив  $\mathbf{x}(k+1)$  и  $\mathbf{A}(k+1)$  в блочной форме, как в выражениях (7.7) и (7.9), и используя лемму

об обращении матриц, получим (7.14). Из выражения (7.83) можно найти требуемые откорректированные значения весовых коэффициентов

$$\mathbf{w}_{\text{оит}}(k+1) = \mathbf{P}(k+1)\mathbf{I}_1[\mathbf{I}_1^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{I}_1]^{-1}\mathbf{c}. \quad (7.92)$$

Для вычисления матрицы  $[\mathbf{I}_1^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{I}_1]$  можно применить лемму об обращении матриц, в результате чего

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{оит}}(k+1) = & \\ = & \left\{ \mathbf{I} - \left[ \frac{\mathbf{P}(k)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k+1)} - \mathbf{P}(k+1) \right] \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1) \right\} \mathbf{I}_1^{-1}\mathbf{c}. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Рекуррентный процессор, обеспечивающий минимум дисперсии шума, имеет особенно простую схему в случае узкополосных сигналов. В гл. 3 было показано, что для таких сигналов

$$\mathbf{w}_{\text{мдш}} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{1}}. \quad (7.94)$$

Использование для вычислений выражения (7.94) связано с дополнительными трудностями, поскольку вектор принятого сигнала в общем случае содержит как шум, так и полезный сигнал. Эти трудности можно преодолеть следующим образом.

Ковариационная матрица входного сигнала определяется выражением

$$\mathbf{R}_{xx} \triangleq E\{\mathbf{x}^*(t)\mathbf{x}^T(t)\} = E\{d^2(t)\}\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \mathbf{R}_{nn}, \quad (7.95)$$

где  $E\{d^2(t)\} = \beta$  — скалярная величина. Обращение обеих частей (7.95) и применение леммы об обращении матриц дает

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1} = [\beta\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} - \frac{\beta\mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{nn}^{-1}}{1 + \beta\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{1}}. \quad (7.96)$$

Подставив (7.96) в выражение

$$\frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}},$$

получим тождество

$$\frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}} \equiv \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{1}}. \quad (7.97)$$

Если использовать выражение (7.21) при  $\alpha = 1$ , то из (7.94) и (7.97) получим

$$\mathbf{w}_{\text{мдш}}(k+1) = \frac{(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{1}}{(k+1)\mathbf{1}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{P}(k+1)\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{1}}, \quad (7.98)$$

где  $\mathbf{P}(k+1)$  определяется (7.14). Отметим, что при отсутствии полезного сигнала  $w_{\text{мдш}}$ , определяемое по (7.98), обеспечивает более высокую скорость сходимости, чем при наличии полезного сигнала. Этот результат уже был получен в гл. 6.

### 7.5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рекуррентные соотношения (7.34), (7.38) и (7.41) могут определять процессор как калмановского типа, так и с минимальной взвешенной СКО, поскольку ковариационная матрица ошибок при  $\sigma^2(k) = 1$  в процессоре первого типа соответствует матрице  $\mathbf{P}(k)$  в случае  $\alpha = 1$  для процессора второго типа. Параметр  $\sigma^2(k)$  для процессора калмановского типа должен выбираться в соответствии с (7.47) равным  $\xi_0^2$ . Для моделирования этого рекуррентного алгоритма необходимо задаться геометрией антенной решетки и условиями приема сигнала, как на рис. 7.4 (этот случай был показан ранее на рис. 4.19 и повторен здесь для удобства). На рис. 7.4 показано расположение одного источника полезного сигнала (под углом 0) и трех точечных источников гауссовских помех (под углами 15, 90 и 165° соответственно) относительно четырехэлементной Y-образной антенной решетки с межэлементным расстоянием  $d = 0,787\lambda$ .

Полезный сигнал в каждом случае был фазоманипулированным с равновероятным значением фазового угла 0 или 180°. Рассматривались две ситуации, соответствующие отношениям собственных значений

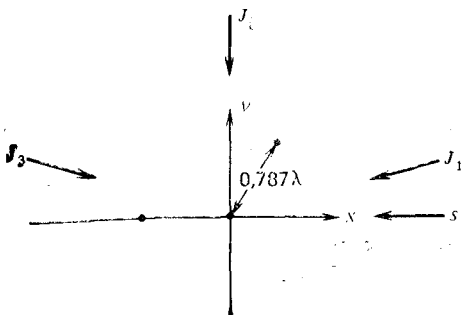


Рис. 7.4. Геометрические соотношения для четырехэлементной Y-образной антенной решетки и расположения источников полезного сигнала и помех

$\lambda_{\text{max}}/\lambda_{\text{min}} = 16\,700$  и  $\lambda_{\text{max}}/\lambda_{\text{min}} = 2440$ . На рис. 7.5—7.8 показаны результаты, иллюстрирующие сходимость алгоритмов при  $\lambda_{\text{max}}/\lambda_{\text{min}} = 16\,700$  и отношениях помеха-собственный шум приемника, равных:  $J_1/n = 4000$ ,  $J_2/n = 400$  и  $J_3/n = 40$ , которым соответствовали собственные значения ковариационной матрицы шума  $\lambda_1 = 1,67 \cdot 10^4$ ,  $\lambda_2 = 1 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_3 = 29$  и  $\lambda_4 = 1$ . Отношение сигнал-собственный шум приемника выбиралось:  $s/n = 10$  для кривых на рис. 7.5 и 7.6,  $s/n = 0,1$  — для рис. 7.7 и  $s/n = 0,025$  — для рис. 7.8. Эффективность алгоритмов определялась в виде зависимости выходного ОСШ от числа итераций, где одна итерация весового вектора соответствовала каждому новому независимому выборочному отсчету. Зависимости на рис. 7.5, 7.7 и 7.8 соответствуют процессору калмановского типа, на рис. 7.6 — процессору с минимумом взвешенной СКО.



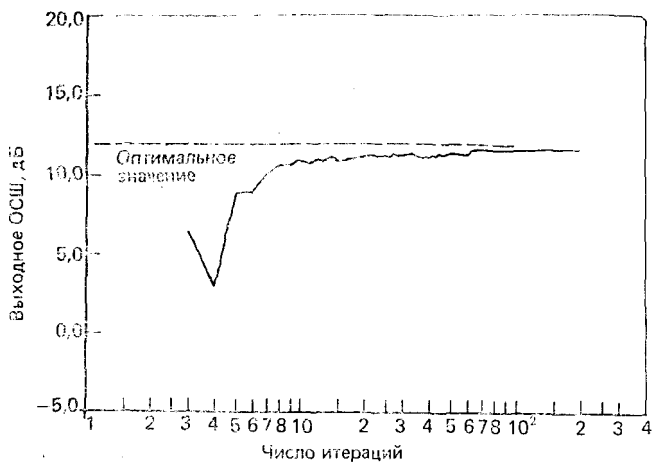


Рис. 7.5. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для процессора калмановского типа при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $s/n=10$ ,  $\sigma^2=\xi_0$ ,  $w(0)=0$ ,  $P(0)=I$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$  (11,76 дБ)

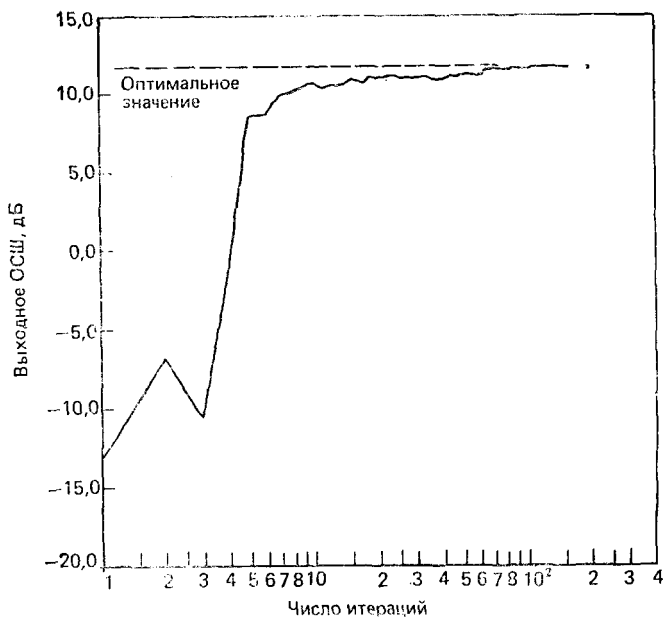


Рис. 7.6. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для процессора по минимуму взвешенной СКО при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $s/n=10$ ,  $\alpha=1$ ,  $w^T(0)=[1, 0, 0, 0]$ ,  $P(0)=I$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$

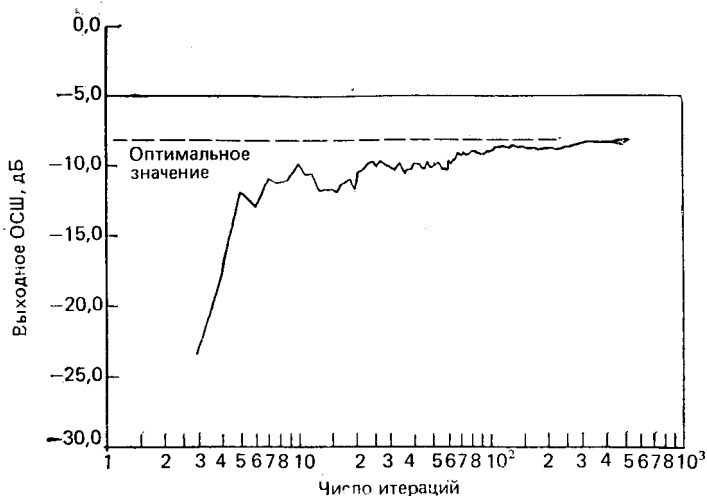


Рис. 7.7. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для процессора калмановского типа при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $s/n=0,1$ ,  $\sigma^2=\xi$ ,  $w(0)=0$ ,  $P(0)=I$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=0,15$  ( $-8,24$  дБ)

На рис. 7.9 и 7.10 представлены результаты, иллюстрирующие сходимость процессора калмановского типа при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=2440$  и отношениях помеха-собственный шум приемника:  $J_1/n=500$ ,  $J_2/n=200$  и  $J_3/n=40$ , которым соответствуют собственные значения ковариационной матрицы шума  $\lambda_1=2,44 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_2=4,94 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_3=25,62$  и  $\lambda_4=1$ . Отношение сигнал-собственный шум приемника



Рис. 7.8. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для процессора калмановского типа при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $s/n=0,025$ ,  $\sigma^2=\xi$ ,  $w(0)=0$ ,  $P(0)=I$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=0,038$  ( $-14,2$  дБ)

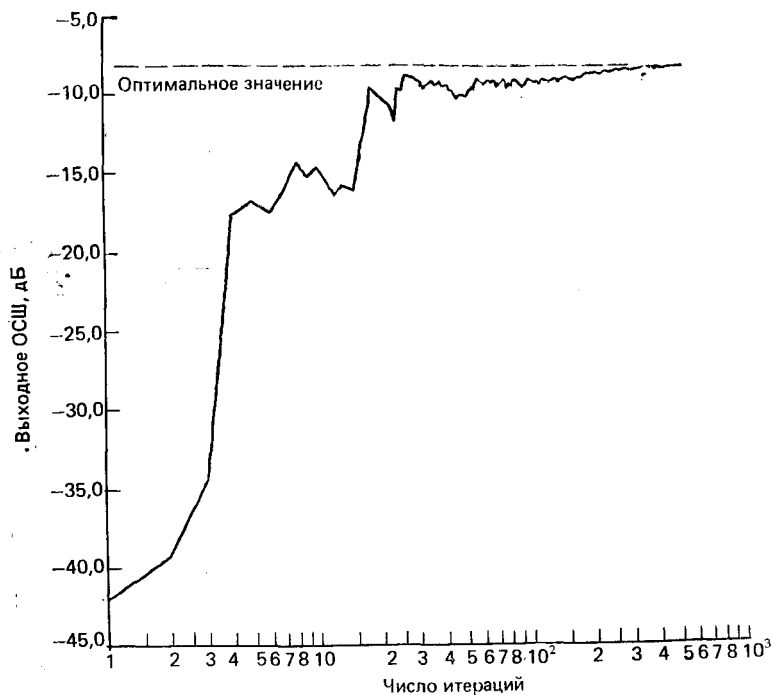


Рис. 7.9. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для процессора калмановского типа при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=2440$ ,  $s/n=0,1$ ,  $\sigma^2=\xi_0$ ,  $w(0)=0$ ,  $P(0)=I$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=0,15$  ( $-8,24$  дБ)

выбиралось:  $s/n = 0,1$  для графиков на рис. 7.9 и  $s/n = 10$  — для рис. 7.10.

Результаты моделирования, приведенные на рис. 7.5—7.10, иллюстрируют следующие интересные и важные свойства рассмотренных рекуррентных алгоритмов.

1. Рекуррентные алгоритмы имеют более высокую скорость сходимости, чем алгоритмы НОМ, особенно при большой величине  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}$  ( $\sim 5$  или 6 итераций, когда  $\text{ОСШ}_{\text{опт}} = 15$  дБ для приведенных примеров). Из сравнения данных на рис. 7.5 (при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 16\,700$ ) и рис. 7.10 (при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ ) видно, что скорость сходимости алгоритма не зависит от разброса собственных значений ковариационной матрицы. Такими же свойствами обладают алгоритмы НОМ.

2. Сходимость алгоритма относительно слабо зависит от значения параметра  $\sigma^2(k)$  в (7.37). Из сравнения результатов моделирования, представленных на рис. 7.5 (при  $\sigma^2 = \xi_0^2$ ) и на рис. 7.6 (при  $\sigma^2 = 1$ ), видно, что для достижения уровня, лежащего на 3 дБ ниже оптимального, потребуется фактически одно и то же число итераций даже при различных значениях начального весового вектора.

3. Как видно из рис. 7.5, 7.7 и 7.8, скорость сходимости рекуррентного алгоритма уменьшается при малых  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}$  и увеличивается

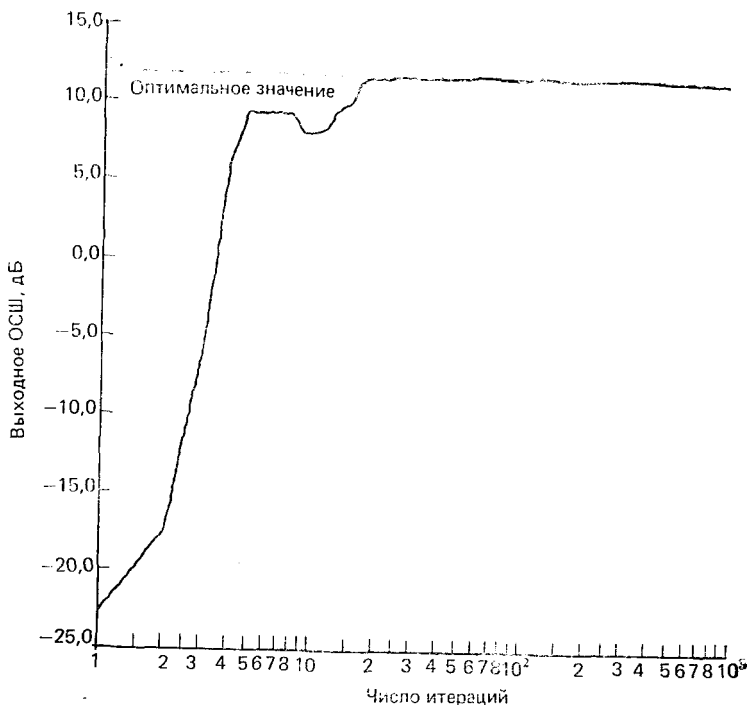


Рис. 7.10. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для процессора калмановского типа при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=2440$ ,  $s/n=10$ ,  $\sigma^2=\xi_0$ ,  $w(0)=0$ ,  $P(0)=I$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$  (11,76 дБ)

при больших  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}$ . Этой особенностью обладает также алгоритм НОМ (и до некоторой степени все алгоритмы, не использующие информацию о направлении прихода сигнала). В том случае, когда предполагается, что информация о направлении прихода сигнала отсутствует, такая информация может быть извлечена в процессе «обучения» при наличии сильного полезного сигнала.

## 7.6. ВЫВОДЫ

Было показано, что различные рекуррентные алгоритмы могут быть получены на основе применения леммы об обращении матриц.

Поскольку рекуррентные алгоритмы отличаются от алгоритмов НОМ главным образом тем, что обращение матрицы осуществляется рекуррентным способом, то не удивительно, что многие свойства, характерные для алгоритмов НОМ, также проявляются при использовании рекуррентных алгоритмов. Высокая скорость сходимости и отсутствие зависимости эффективности от распределения собственных значений ковариационной матрицы являются теми характеристиками, которые делают рекуррентные процессоры привлекательными при условии, что имеются вычислительные средства, обеспечивающие необходимую точность и производительность.

## ЗАДАЧИ

### 1. Оптимальный весовой вектор, обеспечивающий минимум дисперсии шума.

А. Покажите, что если в (7.79) приравнять градиент  $\nabla_{\mathbf{w}_{\text{МДШ}}}$  по  $\mathbf{w}$  нулю, то решением полученного уравнения будет

$$\mathbf{w}_{\text{МДШ}} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{I}_1 \lambda.$$

Б. Покажите, что если величина  $\mathbf{w}_{\text{МДШ}}$ , полученная в п. А, удовлетворяет условиям (7.78), то

$$\lambda = [\mathbf{I}_1^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{I}_1]^{-1} \mathbf{c}.$$

В. Покажите, что подстановка результата, полученного в п. Б, в выражение для  $\mathbf{w}_{\text{МДШ}}$  из п. А приводит к (7.80).

2. Эквивалентность устройств оценки по максимуму правдоподобия и по минимуму дисперсии шума [15]. На практике в некоторых случаях полезный сигнал оказывается полностью неизвестным и не может рассматриваться ни как сигнал с известной формой, ни даже как известная функция некоторых неизвестных параметров. Следовательно, априорно нельзя сделать никаких предположений относительно вида сигнала и поэтому форму сигнала следует рассматривать как неизвестную функцию времени, которую необходимо оценить. Один из способов получения оценки неизвестной временной функции (для настроенной антенной решетки рис. 7.3) основан на применении устройства оценки по максимуму правдоподобия, в котором предполагается, что шумовые составляющие принятого сигнала имеют многомерное гауссовское распределение. Функция правдоподобия принятого сигнала на выходе корректирующего пространственного фильтра поэтому может быть записана как

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (2k+1) |\rho|^{1/2} (2k+1)} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{n=-k}^k (\mathbf{x}_n - \mathbf{s}_n)^T \rho^{-1} (\mathbf{x}_n - \mathbf{s}_n) \right],$$

где  $n$  — выборочные моменты времени;  $\rho$  — ковариационная матрица шума, получаемого с отдельных отводов ЛЗ. Для нахождения оценки  $\hat{\mathbf{s}}_n$  по методу максимума правдоподобия необходимо продифференцировать логарифм функции правдоподобия по оцениваемому параметру  $\mathbf{s}_n$  и приравнять результат нулю. Покажите, что этот результат соответствует оценке сигнала на выхода процессора, полученной при решении задачи 1.

3. Покажите, что решение задачи оптимизации, сформулированной в виде (7.81) и (7.82), определяется выражением (7.83).

4. Покажите, что (7.92) приводит к (7.93) в результате выполнения следующих операций:

А. Умножения (7.14) слева и справа на  $\mathbf{I}_1^T$  и  $\mathbf{I}_1$  соответственно. В результате получаем

$$\mathbf{I}_1^T \mathbf{P} (k+1) \mathbf{I}_1 = \\ = \frac{1}{\alpha} \left[ \mathbf{I}_1^T \mathbf{P} (k) \mathbf{I}_1 - \frac{\mathbf{I}_1^T \mathbf{P} (k) \mathbf{x} (k+1) \mathbf{x}^T (k+1) \mathbf{P} (k) \mathbf{I}_1}{\alpha + \mathbf{x}^T (k+1) \mathbf{P} (k) \mathbf{x} (k+1)} \right].$$

Б. Применения матричного соотношения (Г.4) из приложения Г к результату п. А для доказательства соотношения

$$[\mathbf{I}_1^T \mathbf{P} (k+1) \mathbf{I}_1]^{-1} = \alpha [\mathbf{I}_1^T \mathbf{P} (k) \mathbf{I}_1]^{-1} + \mathbf{I}_1^{-1} \mathbf{x} (k+1) \mathbf{x}^T (k+1) (\mathbf{I}_1^{-1})^T.$$

В. Подстановки результата из п. Б в (7.92), чтобы получить соотношение

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} (k+1) = \mathbf{P} (k+1) [\alpha \mathbf{P}^{-1} (k) + \mathbf{x} (k+1) \mathbf{x}^T (k+1)] (\mathbf{I}_1^{-1})^T \mathbf{c}.$$

Г. Учитывая, что

$$P(k+1)P^{-1}(k) = \frac{1}{\alpha} \left[ \mathbf{I} - \frac{P(k)\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)}{\alpha + \mathbf{x}^T(k+1)P(k)\mathbf{x}(k+1)} \right],$$

покажите, что результат п. В приводит к (7.93).

5. Покажите, что матричное тождество (7.97) получается в результате подстановки (7.96) в выражение

$$\frac{R_{xx}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T R_{xx}^{-1} \mathbf{1}}.$$

## Глава 8. КАСКАДНЫЕ ПРЕДПРОЦЕССОРЫ

При большом разбросе собственных значений корреляционной матрицы входных сигналов возникают трудности при применении алгоритмов МСКО и МСШ, связанные с их медленной сходимостью. Большой разброс собственных значений происходит тогда, когда наряду с сигналом от источника сильных помех появляются сигналы от источников слабых помех, или тогда, когда два или несколько источников сильных помех расположены на близком угловом расстоянии друг от друга.

В гл. 4 было показано, что скорость сходимости можно значительно увеличить, применяя метод ускоренного градиента, если в последнем соответствующим образом выбрать шаговую постоянную. Другим способом получения быстрой сходимости является такое преобразование входных сигналов, при котором поверхности уровня критерия эффективности (которые представлены эллипсами в гл. 4) имеют почти сферическую форму. После такого преобразования, в принципе, возможно, скорректировать все ошибки за один шаг адаптации (при соответствующем выборе размера шага). Этот способ реализован в алгоритме спуска по методу сопряженных градиентов с масштабированием [1].

Аналогичные идеи получили свое развитие при разработке так называемых каскадных предпроцессоров. Понятие каскадного предпроцессора было введено в работах [2, 3] в связи с попытками уменьшить разброс собственных значений корреляционной матрицы входных сигналов с помощью введения подходящего преобразования сигналов. Основной функцией такого преобразования можно считать разложение входных сигналов на главные компоненты<sup>1</sup>. Уравнивая мощности главных компонентов с помощью усилителей с автоматической регулировкой усиления (АРУ), можно значительно уменьшить разброс собственных значений, упрощая таким образом задачи последующих алгоритмов адаптации градиентного типа.

<sup>1</sup> В оригинале «eigenvector components» — проекции вектора входных сигналов на собственные векторы корреляционной матрицы. В теории вероятностей и математической статистике эти проекции принято называть главными компонентами. Дисперсии главных компонентов равны собственным числам корреляционной матрицы. (*Прим. ред.*)

В дальнейшем убедимся, что, изменяя критерий эффективности, по которому производится адаптация элементов предпроцессора, можно добиться того, что отпадет необходимость в последующей обработке, так как предпроцессор выполнит все задачи настройки диаграммы направленности антенной решетки [4]. При таком использовании предпроцессора уменьшается сложность и стоимость всей системы обработки сигналов.

Наконец, для адаптивной подстройки нулей диаграммы антенной решетки можно использовать предпроцессор, основанный на процедуре ортогонализации Грама—Шмидта [5—7]. Предпроцессор Грама—Шмидта выгодно отличается от других простотой и большой скоростью сходимости. Вопросы, связанные с предпроцессорами, осуществляющими разложение на главные компоненты, включены в эту главу по принципиальным соображениям, так как они указывают на перспективы развития и использования подобных устройств.

### 8.1. ПРЕДПРОЦЕССОР НОЛЕНА

Предположим, что имеется возможность построить устройство включения между выходами антенной решетки и адаптивным процессором, преобразующее входные сигналы в главные компоненты. Корреляционная матрица преобразованных сигналов будет тогда диагональной, а ее диагональные элементы будут равны собственным зна-

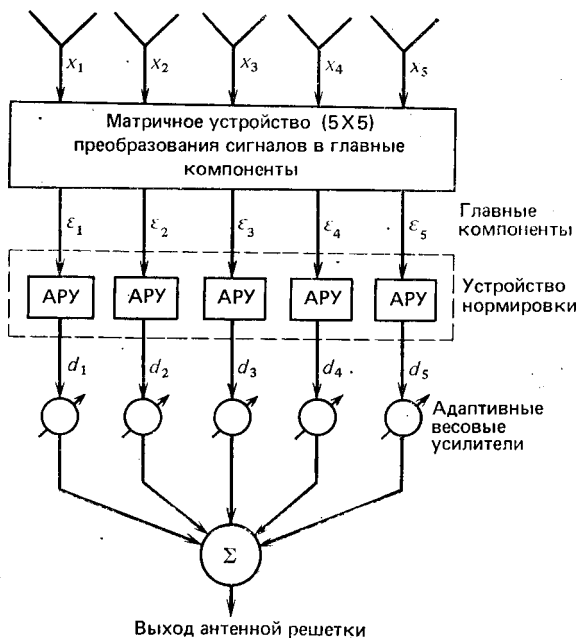


Рис. 8.1. Пятиэлементная адаптивная антенная решетка с устройством преобразования сигналов в главные компоненты и устройством нормировки для выравнивания дисперсий главных компонентов

чениям  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  корреляционной матрицы входных сигналов. Введение в общую схему обработки такого устройства было предложено в работе [8]. Если ввести затем преобразование, уравнивающее различные собственные значения, то тогда, в принципе, можно обеспечить сходимость алгоритма адаптации за один шаг при соответствующем выборе размера этого шага. Если предположить, что имеется необходимая априорная информация о собственных векторах и собственных значениях, то схему адаптивной пятиэлементной антенной решетки с устройствами, осуществляющими указанные преобразования, можно представить в виде, изображенном на рис. 8.1.

Так как в общем случае собственные векторы и собственные значения корреляционной матрицы входных сигналов неизвестны, то устройство, преобразующее входные сигналы в главные компоненты, можно построить лишь приближенно. При этом возникают дополнительные трудности в том случае, когда корреляционная матрица плохо обусловлена. В этом случае небольшие погрешности при оценке элементов корреляционной матрицы могут привести к большим погрешностям при определении главных компонент. К счастью, метод, который будет описан далее, дает достаточно хорошие результаты именно в тех условиях, которые представляют наибольшие трудности для алгоритмов градиентного типа.

### 8.1.1. Однокаскадная цепь Нолена

Рассмотрим цепь, схема которой представлена на рис. 8.2. Предположим, что эта цепь является пассивной, не имеет потерь и в ней отсутствуют отражения. Она содержит  $N$  входов (подключенных к каждому элементу антенной решетки) и  $N$  выходов и состоит из  $N - 1$  переменных фазовращателей и  $N - 1$  направленных ответвителей,

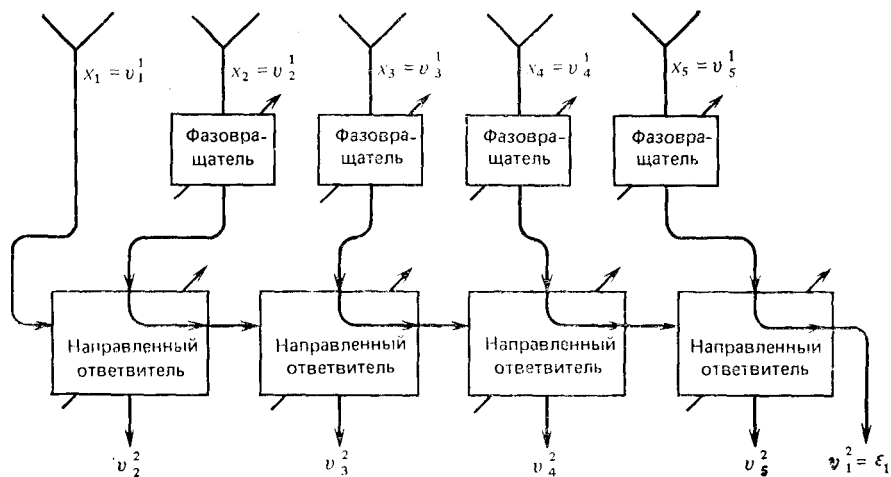


Рис. 8.2. Структурная схема однокаскадной пассивной цепи Нолена при  $N=5$



соединенных последовательно. Такая цепь была впервые описана Ноленом (Nolen) в [9] в связи с проблемой построения многолучевых антенн. Так как эта цепь пассивна, не имеет потерь и отражений, то полная выходная мощность равна полной входной и, следовательно, матрица преобразования, осуществляемого рассматриваемой цепью, будет унитарной.

Обозначим сигналы в цепи рис. 8.2 символом  $v_n^k$ , где  $k$  показывает уровень процессора,  $n$  — номер канала, которому соответствует сигнал. Выходной сигнал можно записать в виде

$$v_i^1 = \sum_{n=1}^N a_n v_n^1, \quad (8.1)$$

где коэффициенты  $a_n$  удовлетворяют ограничению  $\sum_n |a_n|^2 = 1$  и условию, состоящему в том, что коэффициент  $a_1$  должен быть вещественным.

Предположим теперь, что требуется максимизировать выходную мощность

$$\begin{aligned} P_1 &= E \{ |v_i^1|^2 \} = E \{ v_i^1 (v_i^1)^* \} = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N a_n E \{ v_n^1 (v_l^1)^* \} a_l^* = \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N a_n m_{nl}^1 a_l^*, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где

$$m_{nl}^k = E \{ v_n^k (v_l^k)^* \} \quad (8.3)$$

— элемент корреляционной матрицы входных сигналов. Для того чтобы максимизировать  $P_1$  при ограничении  $\sum_n |a_n|^2 = 1$ , воспользуемся методом множителей Лагранжа, согласно которому необходимо максимизировать величину

$$Q = P_1 + \lambda \left[ 1 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right], \quad (8.4)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа. Пусть  $a_n = u_n + jv_n$ , тогда частные производные  $Q$  по  $u_L$  и  $v_L$  можно найти по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u_L} &= \sum_n m_{Ln}^1 (u_n - jv_n) + \sum_l (u_l + jv_l) m_{lL}^1 - 2\lambda u_L = \\ &= \sum_n a_n m_{nL}^1 + \sum_l m_{lL}^1 a_l^* - \lambda (a_L + a_L^*), \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial v_L} &= j \sum_n m_{Ln}^1 (u_n - jv_n) - j \sum_l (u_l + jv_l) m_{lL}^1 - 2\lambda v_L = \\ &= -j \sum_n a_n m_{nL}^1 + j \sum_l m_{lL}^1 a_l^* + j\lambda (a_L - a_L^*). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Положив  $\partial Q/\partial u_L = 0$  и  $\partial Q/\partial v_L = 0$ , получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(a_L + a_L^*) &= \sum_n a_n m_{nL}^* + \sum_l m_{Ll}^* a_l^* \\ \lambda(a_L - a_L^*) &= \sum_n a_n m_{nL} - \sum_l m_{Ll} a_l^* \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

которые после несложных преобразований можно привести к виду

$$\lambda a_L = \sum_{n=1}^N a_n m_{nL}^* \quad (8.8)$$

Это уравнение является классическим уравнением, определяющим собственные векторы и собственные числа матрицы  $\mathbf{M}^*$ , элементами которой являются величины  $m_{nL}^*$ .

Подставив (8.8) в (8.2), получим

$$P_1 = \lambda \sum_{n=1}^N a_n a_n^* \quad (8.9)$$

откуда в силу условия  $\sum |a_n|^2 = 1$  имеем

$$P_1 = \lambda. \quad (8.10)$$

Следовательно, наибольшее значение  $P_1$  (которое равно мощности на выходе цепи, соответствующем крайнему правому выходу схемы на рис. 8.2) совпадает с наибольшим собственным значением матрицы  $\mathbf{M}^*$ .

Если фазовращатели и направленные ответвители в цепи, изображенной на рис. 8.2, настроены так, что мощность  $P_1$  максимальна, то сигнал  $v_1^*$  ортогонален всем другим сигналам  $v_k^*$ , т. е.

$$E \{v_1^* (v_k^*)^*\} = 0 \text{ при } k = 2, 3, \dots, N. \quad (8.11)$$

Условия ортогональности отражают тот факт, что никакая другая линейная комбинация  $v_1^*$  и других  $v_k^*$ , удовлетворяющая условию  $\sum_n |a_n|^2 = 1$ , не может дать большей мощности, чем  $v_1^*$ .

Из (8.11) следует, что все недиагональные элементы первой строки и первого столбца ковариационной матрицы сигналов  $v_k^*$  равны нулю. Таким образом, преобразование, схема которого приведена на рис. 8.2, является одним шагом процедуры диагонализации корреляционной матрицы входных сигналов. Для того чтобы осуществить всю процедуру диагонализации, следует добавить дополнительные цепи, как будет описано в следующем разделе.

### 8.1.2. Многокаскадные цепи

Пусть теперь к выходу одного каскада преобразующей цепи (рис. 8.2) подключены аналогичные цепи так, как показано на рис. 8.3. Второй каскад преобразует только сигналы  $v_2^*, v_3^*, v_4^*, v_5^*$ , оставляя неизменным сигнал  $v_1^* = \epsilon_1$ . В силу того, что в преобразующих цепях отсутствуют отражения, подстройка параметров второго каскада не влияет на  $P_1$ . Пусть параметры второй цепи выбраны так, что макси-

мизируется  $P_2$  — мощность выходного сигнала на выходе второго уровня, изображенном на схеме справа. В этом случае  $P_2$  равно максимальному собственному значению ковариационной матрицы сигналов  $\{v_2^2, v_3^2, \dots, v_N^2\}$ . Если на первом уровне была получена максимальная мощность  $P_1$ , то наибольшее собственное значение упомянутой

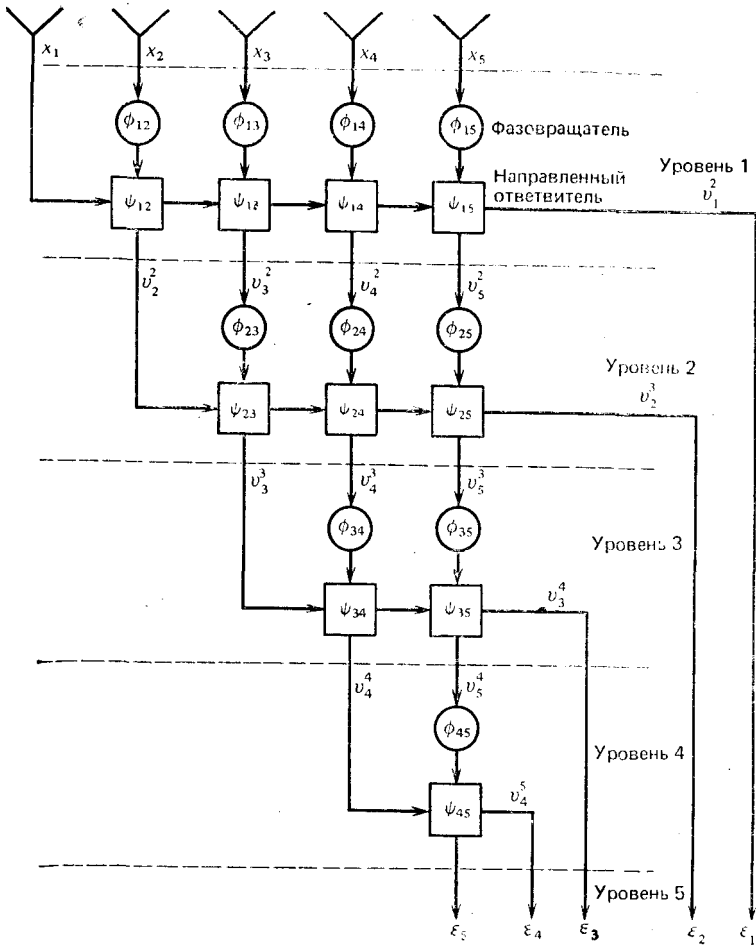


Рис. 8.3. Структурная схема многокаскадной цепи Нолен для пятиэлементной решетки

ковариационной матрицы будет равно второму по величине собственному значению ковариационной матрицы входных сигналов.

Максимизация мощности  $P_2$  приводит к тому, что сигналы на выходе второго каскада  $\{v_2^2, v_3^2, \dots, v_N^2\}$  имеют ковариационную матрицу, у которой недиагональные элементы первого столбца и первой строки равны нулю. Таким образом, первые два каскада преобразующих це-

пей преобразуют исходную ковариационную матрицу к виду, в котором недиагональные элементы первых двух строк и столбцов равны нулю. Каждая последующая цепь преобразования обращает в нуль недиагональные элементы соответствующих столбцов и строк. После преобразования в последнем каскаде достигается полная диагонализация ковариационной матрицы. Так как параметры каждого каскада не влияют на параметры предыдущих, то при настройке одного каскада не нужно перенастраивать предыдущий.

В схеме на рис. 8.1 после цепи преобразования сигналов к главным компонентам следует уравнивающая цепь, состоящая из усилителей с АРУ. На выходе этих усилителей мощности сигналов  $\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$  становятся одинаковыми. Так как ковариационная матрица сигналов  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}$  диагональна, то ковариационная матрица выходных сигналов уравнивающей цепи является скалярной (т. е. представляет произведение скалярной постоянной на единичную матрицу).

Преобразование, осуществляемое всей многокаскадной цепью на рис. 8.3, унитарно, так как преобразование, осуществляемое каждым каскадом, унитарно. Поэтому не только общая выходная мощность равна общей входной мощности, но и все собственные значения ковариационной матрицы остаются неизменными. Если обозначить через  $G_J$  передаточную матрицу первых  $J$  каскадов, то

$$G_J = F_J \cdot F_{J-1} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1, \quad (8.12)$$

где

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_J \\ v_{J+1}^{J+1} \\ \vdots \\ v_N^{J+1} \end{bmatrix} = G_J \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Кроме того, так как второй и последующий каскады не влияют на сигнал  $\varepsilon_1$ , то первая строка матрицы  $G_J$  совпадает с первой строкой матрицы

$$G_1 = F_1. \quad (8.14)$$

Аналогично, так как третий и последующие каскады не влияют на  $\varepsilon_2$ , то вторая строка матрицы  $G_J$  совпадает со второй строкой матрицы

$$G_2 = F_2 \times F_1. \quad (8.15)$$

Продолжая этот процесс таким же образом, можно получить всю матрицу  $G_N$ . Так как первая строка матрицы  $G_J$  совпадает с первой строкой матрицы  $G_1$ , вторая строка матрицы  $G_J$  совпадает со второй строкой матрицы  $G_2$  и т. д.,  $(J-1)$ -я строка матрицы  $G_J$  совпадает с  $(J-1)$ -й строкой матрицы  $G_{J-1}$ , то первые  $J-1$  строк и  $(J-1)$  столбцов матрицы  $F_J$  должны быть такими же, как в единичной матри-

це<sup>1</sup>. Кроме того, так как на крайнем левом входе каждого каскада отсутствует фазовращатель, то  $J$ -й диагональный элемент матрицы  $F_J$  должен быть действительным. Эти условия наряду с требованием унитарности матрицы преобразования определяют границы значений элементов  $J$ -й строки (коэффициентов передачи направленных ответвителей и углов сдвига фазовращателей).

Если максимизация мощности в каждом каскаде преобразующей цепи осуществляется приближенно, то недиагональные элементы результирующей ковариационной матрицы не будут в точности равны нулю. Тем не менее они будут значительно уменьшены (по модулю) и хотя уравнивающая цепь уже не будет выравнивать собственные значения, разброс собственных значений будет значительно уменьшен.

### 8.1.3. Управление цепями преобразования

Рассмотрим теперь задачу подстройки параметров каждого каскада цепи преобразования сигналов в главные компоненты. Оказывается, что условия, представляющие наибольшие трудности при выполнении алгоритма МСКО, являются наиболее благоприятными для адаптации предпроцессора [3].

Для однокаскадной цепи, схема которой представлена на рис. 8.2, требуется максимизировать мощность на выходе, изображенном крайним справа, подстраивая соответствующим образом фазовращатели и направленные ответвители, входящие в эту цепь. Обозначим сигнал на нижнем выходе направленного ответвителя, изображенного в  $(l - 1)$ -й строке и  $k$ -м столбце схемы на рис. 8.3, через  $v_k^l$ . Обозначим сигнал на левом входе того же ответвителя через  $y_k^l$ , а сигнал на правом выходе — через  $\varepsilon_l$  ( $\varepsilon_l = y_{k+1}^l$ ).

Сигналы на входе и выходе цепи, состоящей из фазовращателя и направленного ответвителя, можно записать в виде

$$y_{k+1}^l = y_k^l \cos \psi_{lk} + v_k^l e^{i\varphi_{lk}} \sin \psi_{lk}, \quad (8.16)$$

$$v_k^{l+1} = y_k^l \sin \psi_{lk} + v_k^l e^{i\varphi_{lk}} \cos \psi_{lk}. \quad (8.17)$$

<sup>1</sup> Это следует непосредственно из схемы на рис. 8.3 и из развернутой записи преобразования, осуществляемого в  $J$ -м каскаде:

$$v_1^{J+1} = 1 \cdot v_1^J + 0 \cdot v_2^J + \dots + 0 \cdot v_{J-1}^J + 0 \cdot v_J^J + \dots + 0 \cdot v_N^J,$$

$$v_2^{J+1} = 0 \cdot v_1^J + 1 \cdot v_2^J + \dots + 0 \cdot v_{J-1}^J + 0 \cdot v_J^J + \dots + 0 \cdot v_N^J,$$

.....

$$v_{J-1}^{J+1} = 0 \cdot v_1^J + 0 \cdot v_2^J + \dots + 1 \cdot v_{J-1}^J + 0 \cdot v_J^J + \dots + 0 \cdot v_N^J,$$

$$v_J^{J+1} = 0 \cdot v_1^J + 0 \cdot v_2^J + \dots + 0 \cdot v_{J-1}^J + a_{JJ}^J v_J^J + \dots + a_{JN}^J v_N^J,$$

.....

$$v_N^{J+1} = 0 \cdot v_1^J + 0 \cdot v_2^J + \dots + 0 \cdot v_{J-1}^J + a_{NJ}^J v_J^J + \dots + a_{NN}^J v_N^J.$$

(Прим. ред.)

(Эти выражения показывают, что направленный ответвитель можно рассматривать как гониометр, вал которого повернут на угол  $\psi_{lk}$ ). Обозначим через  $P_l = E \{ \varepsilon_l \}^2$  мощность сигнала

$$\varepsilon_l = \sum_{k=1}^N a_k^l v_k^l, \quad (8.18)$$

так что

$$P_l = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N a_i^l m_{ik}^l (a_k^l)^*, \quad (8.19)$$

где  $m_{ik}^l$  определяется соотношением (8.3), а

$$a_i^l = \begin{cases} \prod_{k=i+1}^N \cos \psi_{lk} & \text{при } i = 1, \\ e^{j\varphi_{li}} \sin \psi_{li} \prod_{k=i+1}^N \cos \psi_{lk} & \text{при } i > 1. \end{cases} \quad (8.20)$$

Подставив выражение  $\sum_{k=1}^{N-1} a_k^l v_k^l = \varepsilon_l - a_N v_N^l$  и (8.20) в (8.19) и вычислив частные производные по  $\varphi_{lk}$  и  $\psi_{lk}$ , получим

$$\frac{\partial P_l}{\partial \varphi_{lk}} = c_1 \operatorname{Im} [E \{ \varepsilon_l (v_k^l)^* \} e^{-j\varphi_{lk}}], \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial P_l}{\partial \psi_{lk}} = c_2 \operatorname{Re} [E \{ \varepsilon_l (v_k^l)^* \} e^{j\varphi_{lk}} \cos \psi_{lk} - E \{ \varepsilon_l (y_k^l)^* \} \sin \psi_{lk}], \quad (8.22)$$

где  $c_1$  не зависит от  $\varphi_{lk}$ , а  $c_2$  не зависит от  $\psi_{lk}$ . Приравняв обе частные производные нулю, получим

$$\varphi_{lk} = \arg [E \{ \varepsilon_l (v_k^l)^* \}], \quad (8.23)$$

$$\psi_{lk} = \operatorname{Arctg} \left[ \frac{\operatorname{Re} (E \{ \varepsilon_l (v_k^l)^* \} e^{-j\varphi_{lk}})}{\operatorname{Re} (E \{ \varepsilon_l (y_k^l)^* \})} \right]. \quad (8.24)$$

Оказывается, что для максимизации выходной мощности достаточно, чтобы  $0 \leq \psi_{lk} \leq \pi$ . Из соотношений (8.23) и (8.24), видно, как, зная  $E \{ \varepsilon_l (v_k^l)^* \}$  и  $E \{ \varepsilon_l (y_k^l)^* \}$ , найти правильные значения для  $\varphi_{lk}$  и  $\psi_{lk}$ . Начиная с первой пары фазовращатель — направленный ответвитель (крайний левый на схеме рис. 8.3) и последовательно продвигаясь до последней пары, можно найти соответствующие значения  $\varphi_{lk}$  и  $\psi_{lk}$  по формулам (8.23), (8.24). Однако при каждой установке этих параметров значения  $\varepsilon_l$  изменяются и меняются соответствующие величины в указанных формулах. Поэтому процесс установки  $\varphi_{lk}$  и  $\psi_{lk}$  должен проводиться рекуррентно. В настоящее время не известно доказательство сходимости таких рекуррентных процессов настройки, но опыт показывает, что, как правило, требуется пять—шесть повторений операций подстройки [3]. В том случае, когда собственные значения ковариационной матрицы входных сигналов сильно отличаются друг от друга, скорость сходимости получается даже большей.

Время настройки цепи преобразования входных сигналов можно резко уменьшить, если учесть, что для существенного уменьшения разброса собственных значений не требуется точной реализации указанной процедуры преобразования. Этого можно добиться с помощью частичной максимизации, при которой на горизонтальном (по схеме на рис. 8.3) выходе каждой пары фазовращатель — направленный ответвитель устанавливается максимальная мощность независимо от значения мощности на выходе всего каскада. При такой частичной процедуре нетрудно показать, что

$$\varphi_{lk} = \arg (E \{y_k^l (v_k^l)^*\}), \quad (8.25)$$

$$\Psi_{lk} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \left[ \frac{2 |E \{y_k^l (v_k^l)^*\}|}{|E \{[y_k^l]^2\}| - |E \{[v_k^l]^2\}|} \right], \quad (8.26)$$

где  $0 \leq \operatorname{Arctg}(\cdot) \leq \pi$ .

Такой процесс является последовательным процессом настройки каждой пары фазовращатель — направленный ответвитель, начиная с входной пары каждого каскада (слева на схеме рис. 8.3) и кончая выходной (справа на схеме рис. 8.3). После того, как закончится процесс настройки одного каскада, настраивается следующий. Как показано в работе [3], процедура частичной настройки дает результаты, удивительно близкие к тем, которые можно получить при полной настройке. Если настройку каждой пары фазовращатель — направленный ответвитель считать одной итерацией, то общий процесс частичной настройки потребует  $N(N-1)/2$  итераций.

## 8.2. ПОДАВЛЕНИЕ ПОМЕХ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДПРОЦЕССОРА НОЛЕНА

Предпроцессор Нолена может служить не только для вспомогательной цели — уменьшения разброса собственных значений с целью повышения скорости сходимости последующих градиентных алгоритмов обработки, но и для выполнения основной задачи подавления помех и выделения полезного сигнала [4]. С помощью каждого каскада цепи Нолена (см. рис. 8.3) можно сформировать один ноль в диаграмме направленности. Погрешности при установке параметров последующих каскадов не искажают нулей, созданных предыдущими, но обратное неверно, и поэтому на неадаптивную цепь Нолена влияют погрешности предыдущих каскадов. Однако при адаптивном управлении возможна частичная компенсация погрешностей предыдущих каскадов с помощью соответствующей подстройки последующих. Учитывая свойства цепи Нолена, можно определить алгоритм подстройки с целью подавления помех.

### 8.2.1. Постановка задачи

Цепь Нолена как цепь с  $N$  входами, к которым подключены антенные элементы, и  $N$  выходами схематически представлена на рис. 8.4. Будем считать, что эта цепь пассивна, не имеет потерь и согласована (на входе и на выходе). При этих условиях полная выходная мощность

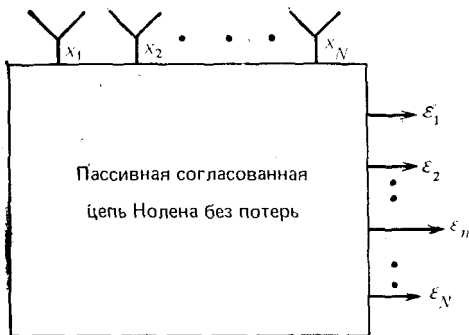


Рис. 8.4. Диаграммообразующая схема Нолена

будет в точности равна полной входной мощности, а передаточная функция цепи будет описываться унитарной матрицей.

Пусть  $\mathbf{x}$  — вектор комплексных амплитуд входных сигналов (сигналов на выходе антенных элементов), а  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — вектор комплексных амплитудных выходных сигналов.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}. \quad (8.27)$$

Векторы  $\mathbf{x}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  связаны соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad (8.28)$$

где  $\mathbf{G}$  — передаточная матрица цепи Нолена. Так как матрица  $\mathbf{G}$  является унитарной, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\dagger \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{x}, \quad (8.29)$$

$$\mathbf{G}^\dagger \mathbf{G} = \mathbf{1}. \quad (8.30)$$

Определим ковариационные матрицы входных и выходных сигналов соотношениями

$$\mathbf{R}_{xx} = E \{ \mathbf{x}^* \mathbf{x}^T \}, \quad (8.31)$$

$$\mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon} = E \{ \boldsymbol{\varepsilon}^* \boldsymbol{\varepsilon}^T \} = \mathbf{G}^* \mathbf{R}_{xx} \mathbf{G}^T. \quad (8.32)$$

Мощность сигнала на  $n$ -м выходе равна  $n$ -му диагональному элементу матрицы  $\mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}$ . Каждый выходной сигнал в общем случае состоит из полезного сигнала и помехи, причем под помехой здесь понимается сумма внешних помех и теплового шума приемника. Предположим, что полезный сигнал не коррелирован с помехой и поэтому  $\mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon}$  можно представить в виде суммы сигнальной и помеховой составляющих

$$\mathbf{R}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathbf{G}^* [ \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{ll} ] \mathbf{G}^T, \quad (8.33)$$

где

$$\mathbf{R}_{ss} = E \{ \mathbf{x}_s^* \mathbf{x}_s^T \}, \quad (8.34)$$

$$\mathbf{R}_{ll} = E \{ \mathbf{x}_l^* \mathbf{x}_l^T \}. \quad (8.35)$$

Векторы  $\mathbf{x}_s$  и  $\mathbf{x}_l$  — составляющие полезного сигнала и помехи во входном сигнале. Обозначим мощности полезного и сигнала помехи на  $n$ -м выходе соответственно как  $\mathfrak{S}_n$  и  $\mathfrak{I}_n$ :

$$\mathfrak{S}_n = [\mathbf{R}_{ss}]_{nn}, \quad (8.36)$$

$$\mathfrak{I}_n = [\mathbf{R}_{ll}]_{nn}. \quad (8.37)$$



Нужно максимизировать мощность сигнала  $\mathcal{E}_n$  и минимизировать мощность помехи  $\mathcal{I}_n$  на  $n$ -м выходе. Так как эти цели противоречивы, то решение должно быть компромиссным. Одно из компромиссных решений состоит в таком выборе унитарной матрицы  $\mathbf{G}$ , при котором максимизируется отношение  $\mathcal{R}_n = \mathcal{E}_n/\mathcal{I}_n$ . Одним из путей решения этой задачи является выбор в качестве меры эффективности

$$\Omega_n = \mathcal{E}_n - \Gamma \mathcal{I}_n, \quad (8.38)$$

где  $\Gamma$  — скалярная постоянная, отражающая сравнительную важность мощностей сигнала и помехи. Если  $\Gamma = 0$ , то максимизируется только мощность полезного сигнала. При  $\Gamma \rightarrow \infty$  минимизируется мощность помех.

При значении  $\Gamma = \mathcal{R}_{\text{опт}}$  максимизация  $\Omega_n$  приводит к максимизации отношения  $\mathcal{R}_n$ . Значение  $\mathcal{R}_{\text{опт}}$  зависит от условий приема и заранее не известно. Полагая  $\Gamma = \mathcal{R}_{\text{min}}$ , где  $\mathcal{R}_{\text{min}}$  — минимальное приемлемое отношение сигнал-помеха, и максимизируя  $\Omega_n$ , можно обеспечить максимизацию  $\mathcal{R}_n$  в наименее благоприятных условиях. При более благоприятных условиях приема  $\mathcal{R}_n$  увеличивается, хотя и не в максимальной степени.

Определим матрицу

$$\mathbf{Z} \triangleq \mathbf{G}^* \mathbf{R}_{ss} \mathbf{G}^T - \Gamma \mathbf{G}^* \mathbf{R}_{II} \mathbf{G}^T. \quad (8.39)$$

Тогда мерой эффективности  $\Omega_n$  является  $n$ -й диагональный элемент матрицы  $\mathbf{Z}$ . Кроме того,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}^* \mathbf{M} \mathbf{G}^T, \quad (8.40)$$

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_{ss} - \Gamma \mathbf{R}_{II}. \quad (8.41)$$

Отметим, что матрица  $\mathbf{M}$  (а следовательно, и  $\mathbf{Z}$ ) согласно (8.41) будет иметь как положительные, так и отрицательные собственные значения. Максимизация  $\Omega_n$  сводится к такому выбору матрицы  $\mathbf{G}$ , при котором максимизируется  $n$ -й диагональный элемент матрицы  $\mathbf{Z}$  с учетом ограничения (8.30). С помощью метода множителей Лагранжа получим уравнения

$$\sum_L M_{nL} G_{Lm} = \lambda G_{mn}. \quad (8.42)$$

Уравнения (8.42) совпадают с уравнением, определяющим собственный вектор матрицы. Следовательно,  $n$ -й столбец матрицы  $\mathbf{G}^T$  должен быть собственным вектором матрицы  $\mathbf{M}$ , соответствующим наибольшему собственному числу. Если  $n$ -й столбец матрицы  $\mathbf{G}^T$  выбран таким образом, то элемент  $Z_{nn}$  будет равен этому максимальному собственному значению, а все недиагональные элементы  $n$ -го столбца и  $n$ -й строки матрицы  $\mathbf{Z}$  будут равны нулю.

Таким образом,  $n$ -я строка унитарной матрицы  $\mathbf{G}$  должна содержать составляющие собственного вектора матрицы  $\mathbf{M}$ , соответствующего максимальному собственному значению. Этого можно добиться, например, следующим образом: в первом каскаде цепи Нолена минимизировать  $\Omega_1$ , выбирая в качестве первой строки матрицы  $\mathbf{G}$  элементы

собственного вектора матрицы  $M$ , соответствующего минимальному собственному числу; затем минимизировать  $\Omega_2$ , выбирая в качестве второй строки матрицы  $G$  элементы собственного вектора матрицы  $M$ , соответствующего второму по величине собственному числу и т. д.; на  $n$ -м этапе этой процедуры следует перейти к максимизации  $\Omega_n$ .

В каскадах цепи Нолен, предшествующих  $n$ -му, максимизируется выходная мощность помехи, максимизируется мощность полезного сигнала и минимизируется мощность помехи, подаваемые на следующие каскады. В  $n$ -м каскаде, где требуется максимизировать выходной полезный сигнал и минимизировать помеху, критерий настройки должен быть изменен на противоположный.

### 8.2.2. Распознавание полезного сигнала

При использовании указанного критерия эффективности крайне важны отличия полезного сигнала от помехи. Если направление прихода сигнала не известно заранее (как часто бывает на практике), необходимо иметь возможность распознавать некоторые отличительные черты самих сигналов.

В системах связи, предназначенных для работы при наличии помех, обычно используется широкополосная модуляция. При такой модуляции для расширения спектров передаваемых сигналов служит псевдослучайное кодирование. При декодировании таких сигналов в приемнике полезный сигнал превращается в узкополосный, а помеха на выходе декодера имеет широкий спектр. Таким образом, процесс демодуляции позволяет, по крайней мере частично, отделить полезный сигнал от помехи с помощью узкополосных фильтров.

При рассмотрении вопросов подстройки цепи Нолена полезно ввести следующую операцию [4]:

$$A^* \otimes B = E \{A_s^* B_s\} - \Gamma E \{A_I^* B_I\}, \quad (8.43)$$

где  $A$  — комплексная огибающая некоторого сигнала, содержащего составляющие полезного сигнала  $A_s$  и помехи  $A_I$ ,  $B$  — комплексная огибающая другого сигнала с составляющими полезного сигнала  $B_s$  и помехи  $B_I$ . Если предположить, что полезный сигнал имеет псевдослучайную фазовую модуляцию (со значениями фазы 0 и  $\pi$ ), а в демодуляторе на приемном конце линии связи имеется синхронизированный тактовый генератор, то оценку  $A^* \otimes B$  можно получить так, как это показано на рис. 8.5. После прохождения принятого сигнала через синхронизированный демодулятор он поступает на полосовые фильтры, выделяющие полезный сигнал, и на режекторные фильтры, выделяющие помеху. Выходы полосовых фильтров подключены к одному коррелятору (сигнальному), формирующему оценку  $E \{A_s^* B_s\}$ . Выходы режекторных фильтров подключены ко второму коррелятору (помеховому), который формирует оценку  $E \{A_I^* B_I\}$ . Взвешенная комбинация выходов (сигнальная составляющая умножается на  $K_s$ , а помеховая — на  $K_I$ ) образуют оценку комплексной величины  $A^* \otimes B$ . Отношение  $K_s$  к  $K_I$  определяет величину  $\Gamma$ .

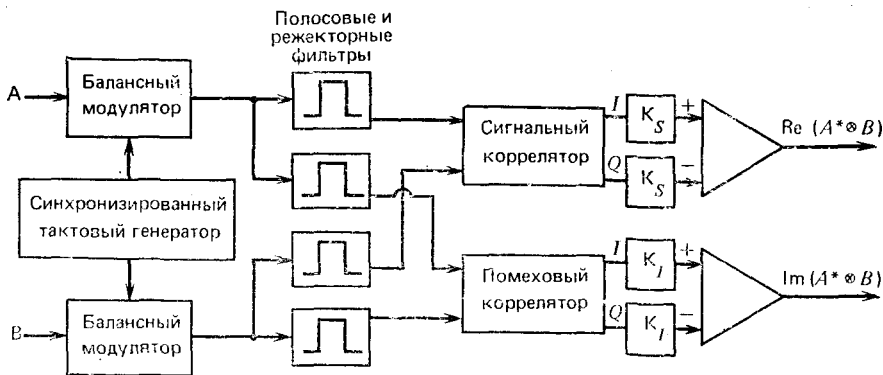


Рис. 8.5. Структурная схема обобщенного коррелятора

Если же распространить операцию  $\otimes$  на векторные величины, то можно записать следующие выражения для  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}^* \otimes \mathbf{x}^T, \quad (8.44)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{h}^* \otimes \mathbf{h}^T. \quad (8.45)$$

С помощью обобщенного коррелятора, схема которого аналогична схеме на рис. 8.5, можно оценить матрицу  $\mathbf{Z}$  и определить, насколько она близка к диагональной.

### 8.2.3. Частичная подстройка предпроцессора Нолена

При частичной подстройке параметров цепи Нолена с целью максимизации (или минимизации) величины  $\Omega_l$  уже нельзя воспользоваться выражениями (8.25) и (8.26), в которые входили величины, получаемые на выходе обычного коррелятора. В рассматриваемом случае эти величины должны быть заменены величинами, получаемыми на выходе обобщенного коррелятора [4], т. е.

$$\varphi_{lk} = \arg \{y_k^l \otimes (v_k^l)^*\}, \quad (8.46)$$

$$\psi_{lk} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \left\{ \frac{2 |y_k^l \otimes (v_k^l)^*|}{|y_k^l \otimes (y_k^l)^*| - |v_k^l \otimes (v_k^l)^*|} \right\}. \quad (8.47)$$

При минимизации  $\Omega_l$  следует брать те значения арктангенса, которые лежат в промежутке  $[-\pi, 0]$ , а при максимизации  $\Omega_l$  — в промежутке  $[0, \pi]$ . Частичная подстройка всех каскадов цепи Нолена требует выполнения  $N(N-1)/2$  итераций для  $N$ -элементной антенной решетки.

## 8.3. ПРЕДПРОЦЕССОР, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИЮ СОГЛАСНО МЕТОДУ ГРАМА — ШМИДТА

В разд. 8.1 показано, что использование унитарного преобразования для получения ортогонального множества сигналов позволяет ускорить сходимость градиентных алгоритмов за счет уменьшения

разброса собственных значений ковариационной матрицы сигналов. Ортогональное множество сигналов можно получить также преобразованием, основанным на процедуре ортогонализации Грама—Шмидта [10]. При этом устройство, осуществляющее это преобразование, которое будет называться предпроцессором Грама—Шмидта, можно использовать двояким образом: либо для ускорения сходимости в последующем адаптивном процессоре Хауэлса—Аппельбаума (рис. 8.6), либо как устройство подавления помех типа КБЛ. Как будет видно из дальнейшего, предпроцессор Грама—Шмидта сравнительно просто реализуется, имеет хорошие переходные характеристики и поэтому является альтернативой предпроцессору, рассмотренному в разд. 8.1.

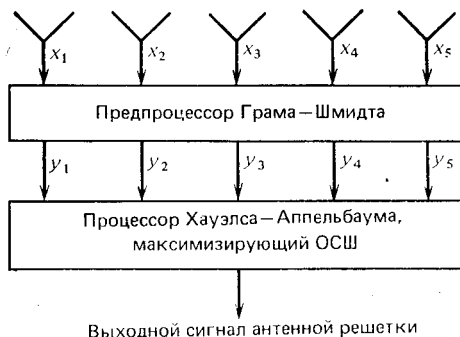


Рис. 8.6. Структурная схема адаптивной антенной решетки с повышенной скоростью сходимости, содержащая устройство ортогонализации сигналов согласно процедуре Грама—Шмидта и адаптивный процессор Хауэлса—Аппельбаума

Преобразование, основанное на процедуре ортогонализации Грама—Шмидта, рассмотрим на примере пятиэлементной антенной решетки. На функциональной схеме для этого примера (рис. 8.7) изображенные квадратами блоки осуществляют преобразование, обеспечивающее ортогональность между преобразованным выходным и опорным входным сигналами [5].

На вход каждого блока в схеме на рис. 8.7 поступают два сигнала:  $v_k^k = y_k$  (опорный для уровня  $k$ ) и  $v_n^k$ , где  $n \geq k + 1$ . Каждый блок обеспечивает ортогональность между  $v_k^k$  и  $v_n^k$ . Цепи первого уровня схемы обеспечивают преобразование сигналов  $v_n^1$ ,  $n \geq 2$  в сигналы  $v_n^2$ ,  $n \geq 2$ , ортогональные  $v_1^1 = y_1$ . Затем множество сигналов  $v_n^2$ ,  $n \geq 3$  преобразуется в цепях второго уровня схемы в сигналы, ортогональные  $v_n^2 = y_2$ . Этот процесс продолжается. На  $n$ -м уровне все выходные сигналы  $y_1, y_2, \dots, y_n$  взаимно ортогональны, т. е.  $E(y_m y_n^*) = 0$  при всех  $m \neq n$ . После этого преобразования к каждому выходу цепи можно подключить контуры Хауэлса—Аппельбаума с большим коэффициентом передачи для слабых сигналов и малым — для сильных, чтобы длительность переходного процесса различных сигналов была одной и той же.

Обозначим символом  $G$  результирующее преобразование, осуществляемое предпроцессором Грама—Шмидта, тогда

$$y = Gx. \quad (8.48)$$

Для того чтобы получить преобразование  $G$ , нужно только добиться правильности выполнения каждым блоком, изображенным в схеме на рис. 8.7, своих функций. В гл. 5 было показано, что выходной сигнал адаптивного контура Хауэlsa—Аппельбаума в установившемся состоянии будет некоррелированным с опорным сигналом (ортогональным опорному сигналу). Таким образом, каждый блок в схеме на рис. 8.7 может быть реализован с помощью адаптивного контура Ха-

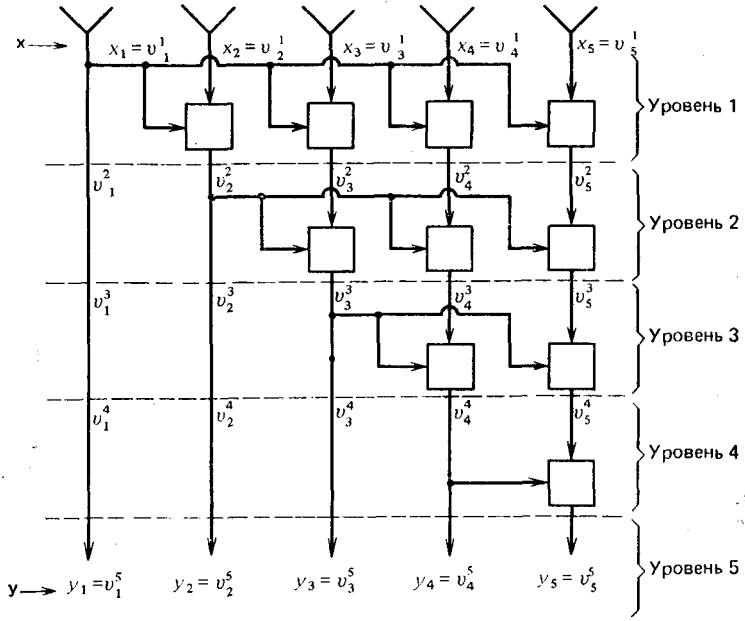


Рис. 8.7. Структурная схема цепи, осуществляющей ортогонализацию сигналов по Граму — Шмидту

уэlsa—Аппельбаума, как показано на рис. 8.8. Преобразование в каждом блоке схемы на рис. 8.7 (с использованием обозначений на рис. 8.8) можно записать как

$$v_n^{k+1} = v_n^k - u_{k(n-1)} v_k^k, \quad k+1 \leq n \leq N, \quad (8.49)$$

где  $N$  — число элементов антенной решетки. В установившемся состоянии адаптивные весовые коэффициенты могут быть представлены в виде

$$u_{k(n-1)} = \overline{((v_k^k)^* v_n^{k+1})} / \overline{((v_k^k)^* v_k^k)}, \quad (8.50)$$

где черта означает математическое ожидание. Выражения (8.49), (8.50) являются аналогами известных соотношений для процедуры ортого-

нализации Грама—Шмидта. При реализации этой процедуры в  $N$ -элементной антенной решетке требуется  $N(N - 1)/2$  адаптивных весовых коэффициентов. Так как для реализации адаптивного процессора Хауэлса—Аппельбаума, обеспечивающего максимизацию ОСШ,

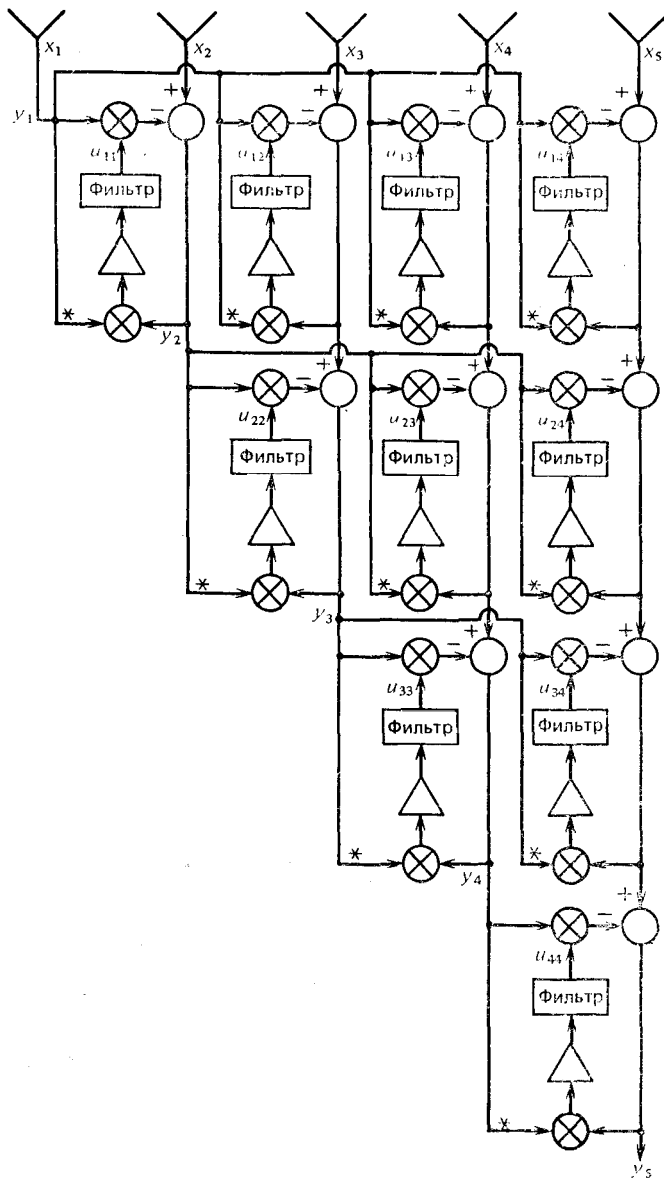


Рис. 8.8. Структурная схема цепи, осуществляющей ортогонализацию сигналов в пятиэлементной антенной решетке с помощью контуров адаптивного управления Хауэлса — Аппельбаума

потребуется еще  $N$  адаптивных коэффициентов, то общее число адаптивных коэффициентов в схеме на рис. 8.6 равно  $N(N+1)/2$ .

Преобразование входного вектора  $x$  в вектор  $y$  с некоррелированными составляющими не единственно. В отличие от преобразования в главные компоненты, при котором первой является составляющая с максимальной мощностью, в процедуре ортогонализации Грама—Шмидта в качестве первой может быть выбрана любая составляющая вектора  $x$ , а остальные подвергаются преобразованию согласно (8.49).

Поскольку сигналы на выходе преобразующей цепи, схема которой приведена на рис. 8.7, не коррелированы, то эта цепь может функционировать как система КБЛ, выходной сигнал которой (в установившемся состоянии) не коррелирован с сигналами на входе вспомогательных каналов. Как было показано в гл. 3,  $N-1$ -элементный КБЛ эквивалентен  $N$ -элементной адаптивной антенной решетке с сигнальным вектором:

$$t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.51)$$

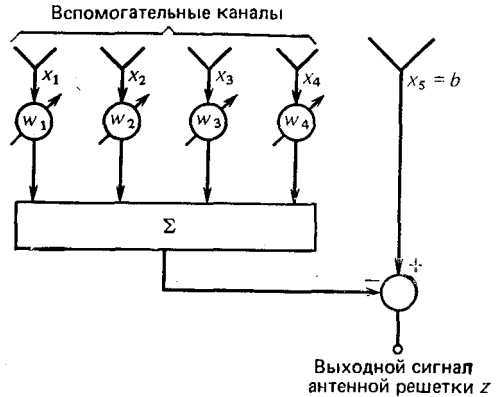


Рис. 8.9. Структурная схема КБЛ, эквивалентная схеме на рис. 8.7

Далее будет показано, что при выборе  $x_5 = b$  в качестве сигнала опорного канала в схеме на рис. 8.7 (так что  $t^T = [0, 0, \dots, 1]$ ) и  $z = y_5$  в качестве выходного сигнала этот выходной сигнал сходится к  $z = b - w^T x$ . Здесь  $x$  — вектор сигналов вспомогательных каналов, а  $w$  — вектор весовых коэффициентов вспомогательных каналов для эквивалентной схемы КБЛ, приведенной на рис. 8.9. Таким образом, предпроцессор в схеме на рис. 8.7 и КБЛ в схеме на рис. 8.9 эквивалентны в том смысле, что в установившемся состоянии их выходные сигналы совпадают. В гл. 3 показано, что для КБЛ

$$w_{\text{опт}} = R_{xx}^{-1} (x^* b). \quad (8.52)$$

Если сигнал основного канала заменяется контрольным сигналом  $p$  (т) от местного генератора, то

$$w_{\text{опт}} = R_{xx}^{-1} (x^* p). \quad (8.53)$$

и выходной сигнал антенной решетки определяется как

$$z = p(t) - w^T x(t). \quad (8.54)$$

### 8.3.1. Сходимость алгоритма предпроецтора Грама — Шмидта

Сначала покажем, что выходной сигнал в схеме на рис. 8.8 сходится к сигналу на выходе КБЛ. Полная эквивалентность в установившемся состоянии системы КБЛ предпроецтора Грама—Шмидта будет продемонстрирована на примере трехэлементной системы, схема которой приведена на рис. 8.10, и предпроецтора, представленного схемой на рис. 8.11 [5]. Схема на рис. 8.10 содержит два контура Хауэлса—Аппельбаума с весовыми коэффициентами  $w_1$  и  $w_2$ , а схема на рис. 8.11 — три контура с весовыми коэффициентами  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  и  $u_{22}$ . Анализ, проведенный для этого случая, можно распространить на произвольное число элементов.

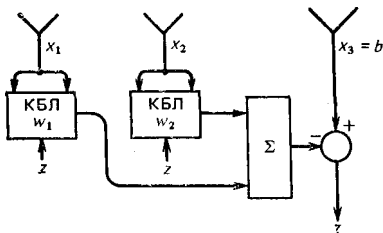


Рис. 8.10. Структурная схема трехэлементной системы КБЛ с двумя контурами Хауэлса—Аппельбаума

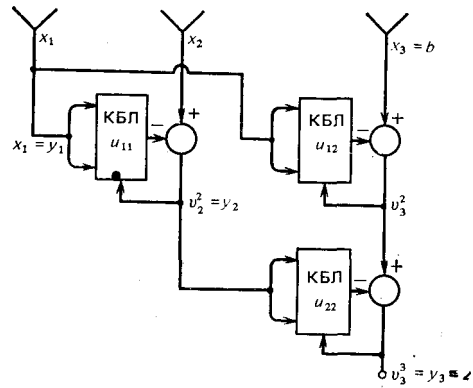


Рис. 8.11. Структурная схема трехэлементной системы КБЛ на основе предпроецтора Грама—Шмидта с тремя контурами Хауэлса—Аппельбаума

Для схемы на рис. 8.10 установившееся значение оптимального весового вектора (с составляющими  $w_1$  и  $w_2$ ) определяется формулой (8.52), где  $R_{xx} = R_{n,n}$  при отсутствии полезного сигнала. Из выражения (8.52) следует, что

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x_1^* x_1} & \overline{x_1^* x_2} \\ \overline{x_2^* x_1} & \overline{x_2^* x_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{x_1^* b} \\ \overline{x_2^* b} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \overline{x_2^* x_2} & -\overline{x_1^* x_2} \\ -\overline{x_2^* x_1} & \overline{x_1^* x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1^* b} \\ \overline{x_2^* b} \end{bmatrix}}{(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* x_1})}, \quad (8.55)$$

так что

$$w_1 = \frac{(\overline{x_2^* x_2})(\overline{x_1^* b}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* b})}{(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* x_1})}, \quad (8.56)$$

$$w_2 = \frac{(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* b}) - (\overline{x_2^* x_1})(\overline{x_1^* b})}{(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* x_1})}. \quad (8.57)$$



Для схемы на рис. 8.11 из (8.49) и (8.50) следует, что

$$y_2 = x_2 - u_{11}x_1, \quad (8.58)$$

$$v_3^2 = b - u_{12}x_1, \quad (8.59)$$

$$z = v_3^2 - u_{22}y_2. \quad (8.60)$$

В установившемся режиме весовые коэффициенты определяются как

$$u_{11} = \overline{(x_1^* x_2)} / \overline{(x_1^* x_1)}, \quad (8.61)$$

$$u_{12} = \overline{(x_1^* b)} / \overline{(x_1^* x_1)}, \quad (8.62)$$

$$u_{22} = \overline{(y_2^* v_3^2)} / \overline{(y_2^* y_2)}. \quad (8.63)$$

Из (8.58)—(8.60) следует, что

$$z = b - [(u_{12} - u_{11}u_{22})x_1 + u_{22}x_2]. \quad (8.64)$$

Сравнивая (8.64) с выражением для выходного сигнала схемы на рис. 8.10, можно заметить, что коэффициенты  $w_2$  и  $w_1$  выполняют роль коэффициентов  $u_{22}$  и  $u_{12} - u_{11}u_{22}$  соответственно.

Если подставить (8.58) и (8.59) в (8.63), то получим выражение

$$u_{22} = \frac{\overline{(x_1^* x_1)} \overline{(x_2^* b)} - \overline{(x_2^* x_1)} \overline{(x_1^* b)}}{\overline{(x_1^* x_1)} \overline{(x_2^* x_2)} - \overline{(x_1^* x_2)} \overline{(x_2^* x_1)}}, \quad (8.65)$$

которое совпадает с (8.57) для  $w_2$ . Аналогично подстановка (8.61), (8.62) и (8.65) в формулу  $u_{12} - u_{11}u_{22}$  дает

$$u_{12} - u_{11}u_{22} = \frac{\overline{(x_1^* b)} \overline{(x_2^* x_2)} - \overline{(x_1^* x_2)} \overline{(x_2^* b)}}{\overline{(x_1^* x_1)} \overline{(x_2^* x_2)} - \overline{(x_1^* x_2)} \overline{(x_2^* x_1)}}, \quad (8.66)$$

что совпадает с выражением (8.56) для  $w_1$ . Таким образом, в установившемся режиме выходные сигналы схем на рис. 8.10 и 8.11 совпадают и

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= u_{22}, \\ w_1 &= u_{12} - u_{11}u_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (8.67)$$

Эквивалентность в общем случае можно доказать методом математической индукции. Нетрудно показать, что матрица преобразования  $\mathbf{G}$  является нижней треугольной матрицей, элементы которой  $g_{ij}$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$g_{ij} = 0, \quad i < j, \quad (8.68)$$

$$g_{jj} = 1, \quad (8.69)$$

$$g_{ij} = - \sum_{k=j}^{i-1} u_{jk}^* g_{i(k+1)}, \quad i > j, \quad (8.70)$$

причем  $j$ -я строка матрицы  $\mathbf{G}$  содержит выражения, аналогичные выражениям в правой части (8.67) для весовых коэффициентов эквивалентной  $j$ -элементной системы КБЛ:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{j-1} &= -g_j(j-1), \\ \omega_{j-2} &= -g_j(j-2), \\ &\vdots \\ \omega_1 &= -g_{j1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.71)$$

Рассмотрим теперь переходные процессы в схемах рис. 8.10 и 8.11, полагая, что сигналы в основном и вспомогательном каналах представляют последовательности дискретных выборочных значений. В последующем анализе предполагается, что адаптивные весовые коэффициенты совпадают со своими средними значениями на каждом шаге адаптации и, таким образом, не учитываются погрешности, связанные с шумом контура обратной связи. Через  $x_{kn}$  обозначим  $n$ -е выборочное значение сигнала  $k$ -го элемента. Выборочные значения сигнала в основном канале будут обозначаться через  $b_n$ . Для системы с  $N$  вспомогательными каналами и одним основным после приема  $N$  выборочных значений весовые коэффициенты каналов можно найти из следующей системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \omega_k x_{kn} = b_n \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N. \quad (8.72)$$

Эта система имеет единственное решение, так как матрица, определяемая выборочными значениями  $x_{kn}$ , является невырожденной, если только присутствует тепловой шум. Уравнения (8.72) связаны с уравнением (8.52), так как, умножив обе части (8.72) на  $x_{mn}^*$  и суммируя результат по индексу  $n$ , получим

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \omega_k x_{mn}^* x_{kn} = \sum_{n=1}^N x_{mn}^* b_n \quad (8.73)$$

или в матричной форме

$$\widehat{\mathbf{R}}_{xx} \widehat{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{x}}^* \widehat{\mathbf{b}}. \quad (8.74)$$

Сравнивая (8.74) с (8.52), можно сделать вывод, что при стационарных условиях приема сигнала среднее значение решения уравнения (8.74) совпадает с решением уравнения (8.52).

Процесс подстройки весовых коэффициентов в контуре Хауэлса—Аппельбаума может быть рассмотрен на модели, приведенной на рис. 8.12. При приеме  $i$ -го выборочного значения сигнала результирующее изменение весового коэффициента  $u_{k(n-1)}$  может быть вычис-

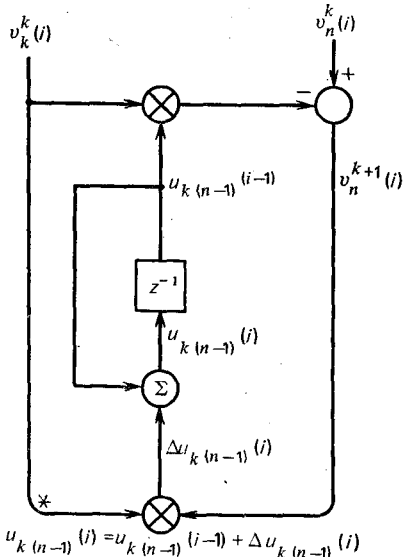


Рис. 8.12. Дискретная модель для контура Хауэлса—Аппельбаума

лено с помощью формулы (8.50) (если в этой формуле убрать знаки статистического усреднения):

$$\Delta u_{k(n-1)}(i) = \frac{(v_k^k)^* (v_n^k(i) - u_{k(n-1)}(i-1) v_k^k(i))}{(v_k^k)^* v_k^k}, \quad (8.75)$$

а весовые коэффициенты по формуле

$$u_{k(n-1)}(i) = u_{k(n-1)}(i-1) + \Delta u_{k(n-1)}(i). \quad (8.76)$$

Если все весовые коэффициенты в предпроцессоре Грама—Шмидта первоначально положить равными нулю, то после приема первого выборочного значения  $v_2^2 = x_{21}$  и  $v_3^2 = v_3^2 = b_1$ , так что

$$u_{11}(1) = \frac{x_{11}^* v_2^1}{|x_{11}|^2} = \frac{x_{11}^* x_{21}}{|x_{11}|^2}, \quad (8.77)$$

$$u_{12}(1) = \frac{x_{11}^* v_3^1}{|x_{11}|^2} = \frac{x_{11}^* b_1}{|x_{11}|^2}, \quad (8.78)$$

$$u_{22}(1) = \frac{(v_2^2)^* v_3^2}{|v_2^2|^2} = \frac{x_{21}^* b_1}{|x_{21}|^2}. \quad (8.79)$$

После приема второго выборочного значения имеем  $v_2^2 = x_{22} - u_{11}(1)x_{12}$ ,  $v_3^2 = b_2 - u_{12}(1)x_{12}$ ,  $v_3^2 = v_3^2 - u_{22}(1)v_2^2$ , так что

$$\Delta u_{11}(2) = \frac{x_{12}^* [x_{22} - u_{11}(1)x_{12}]}{|x_{12}|^2}, \quad (8.80)$$

$$\Delta u_{12}(2) = \frac{x_{12}^* [b_2 - u_{12}(1)x_{12}]}{|x_{12}|^2}, \quad (8.81)$$

$$\Delta u_{22}(2) = \frac{(x_{22} - u_{11}(1)x_{12})^*}{|x_{22} - u_{11}(1)x_{12}|^2} [b_2 - u_{12}(1)x_{12} - u_{22}(1)(x_{22} - u_{11}(1)x_{12})]. \quad (8.82)$$

Подставив (8.77)—(8.79) в (8.80)—(8.82), получим:

$$u_{11}(2) = u_{11}(1) + \Delta u_{11}(2) = \frac{x_{12}^* x_{22}}{|x_{12}|^2}, \quad (8.83)$$

$$u_{12}(2) = u_{12}(1) + \Delta u_{12}(2) = \frac{x_{12}^* b_2}{|x_{12}|^2}, \quad (8.84)$$

$$u_{22}(2) = u_{22}(1) + \Delta u_{22}(2) = \frac{x_{11} b_2 - x_{12} b_1}{x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}}. \quad (8.85)$$

С учетом соотношений (8.67) выражения для весовых коэффициентов приобретают вид

$$w_2(2) = u_{22}(2),$$

$$w_1(2) = u_{12}(2) - u_{11}(2) u_{22}(2) = \frac{x_{22} b_1 - x_{21} b_2}{x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}}. \quad (8.86)$$

Заметим, однако, что  $w_1(2)$  и  $w_2(2)$ , определяемые формулами (8.85) и (8.86), при  $N = 2$  удовлетворяют уравнению (8.72). Таким образом, в системе КБЛ с двумя вспомогательными каналами, построенной на

основе предпроцессора Грама—Шмидта, за две итерации вырабатываются весовые коэффициенты, удовлетворяющие уравнению (8.74). Аналогичный анализ можно провести для системы КБЛ с  $N$  вспомогательными каналами, построенной на основе предпроцессора Грама—Шмидта, и показать, что решение уравнения (8.74) получается за  $N$  итераций. При отсутствии собственного шума приемника и наличии помех от  $N$  точечных источников решение уравнения (8.74) совпадает с выражением для оптимального весового вектора. При наличии шума требуется дополнительное усреднение, чтобы скомпенсировать погрешности, вызванные шумом.

Отметим, что при использовании соотношения (8.75) значения коэффициентов  $u_{11}$  и  $u_{12}$  на первом уровне предпроцессора зависят только от текущего выборочного значения сигналов. Однако необходимое значение весового коэффициента  $u_{22}$  получается после приема двух выборочных значений сигналов. В  $N$ -каскадной схеме предпроцессора Грама—Шмидта необходимые весовые коэффициенты получаются только после приема  $N$  выборочных значений сигналов.

В обычной системе КБЛ с двумя вспомогательными каналами невозможно получить сходимость весовых коэффициентов к оптимальному значению за две выборки (при отсутствии шума). Действительно, для схемы на рис. 8.10 после приема первого выборочного значения сигналов

$$\omega_1(1) = \frac{x_{11}^* b_1}{|x_{11}|^2}, \quad (8.87)$$

$$\omega_2(1) = \frac{x_{21}^* b_1}{|x_{21}|^2}. \quad (8.88)$$

После приема второго выборочного значения

$$\omega_1(2) = \omega_1(1) + \frac{x_{12}^* (b_2 - \omega_1(1) x_{12} - \omega_2(1) x_{22})}{|x_{12}|^2}, \quad (8.89)$$

$$\omega_2(2) = \omega_2(1) + \frac{x_{22}^* (b_2 - \omega_1(1) x_{12} - \omega_2(1) x_{22})}{|x_{12}|^2}. \quad (8.90)$$

Весовые коэффициенты, определяемые (8.89) и (8.90), не совпадают со значениями весовых коэффициентов, определяемыми формулами (8.85) и (8.86), и поэтому не удовлетворяют уравнению (8.72). Рассматривая результаты моделирования, видим, что в устройстве, схема которого приведена на рис. 8.10, длительность переходного процесса значительно больше (при более высоком уровне шума в контуре обратной связи), чем в предпроцессоре Грама—Шмидта.

#### 8.4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для того чтобы получить представление о скорости сходимости, которую можно достичь с помощью предпроцессора Грама—Шмидта, моделировалась работа устройства, аналогичного изображенному на рис. 8.6, при четырех элементах антенной решетки и при использова-

нии в последнем каскаде дискретного адаптивного контура подстройки по методу МСКО вместо контура Хауэлса—Аппельбаума. Коэффициенты передачи в этих контурах были обратно пропорциональны оценке  $\widehat{p}_i$  мощности сигнала на входе, полученной усреднением по выборке объемом  $K$ , так что  $\Delta_{s_i} = \alpha_L \widehat{p}_i$ . Аналогично коэффициент передачи каждого дискретного контура Хауэлса—Аппельбаума в предпроцес-

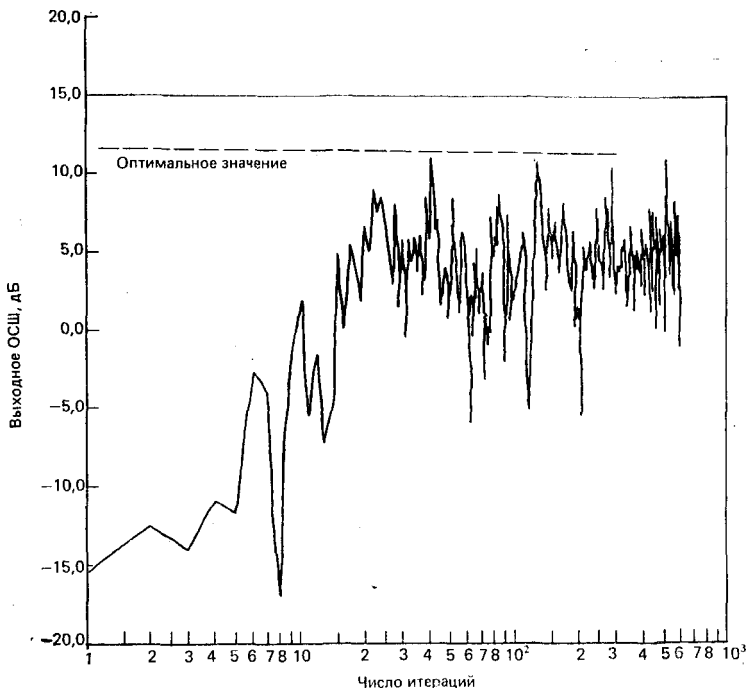
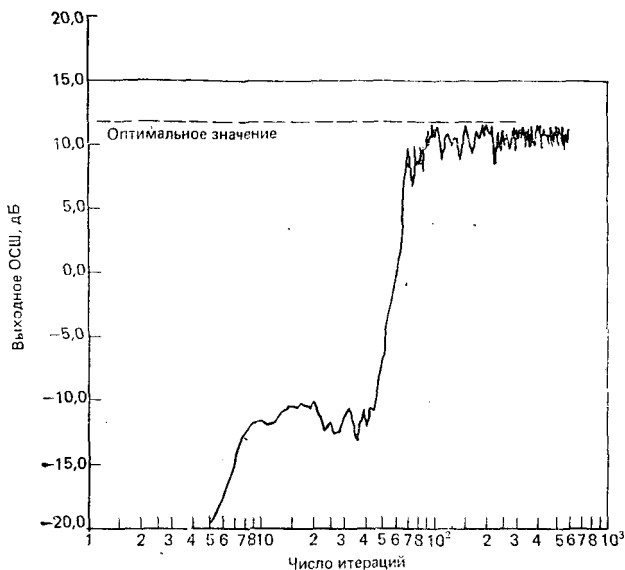


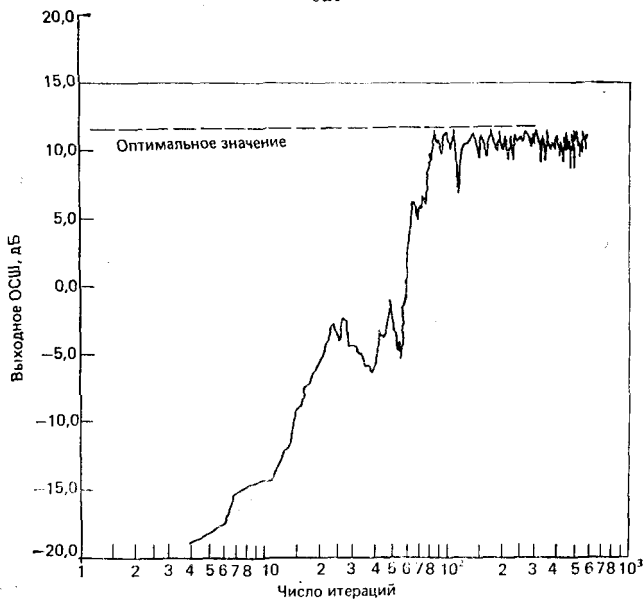
Рис. 8.13. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама—Шмидта при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16700$ ,  $K=3$ ,  $\alpha=\alpha_L=0,5$ ,  $w(0)=0$ ,  $s/n=10$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$  (11,76 дБ)

соре был выбран равным  $G_i = \alpha/\widehat{p}_i$ . Такой выбор коэффициентов передачи уравнивает длительности переходных процессов для сигналов  $y_1, \dots, y_4$ . Кроме того, оценки корреляционных моментов в аналоговом процессоре (рис. 8.8) вычислялись по выборке объемом  $K$ . Интервал усреднения также позволял получать оценки мощности сигналов на выходе окончного устройства обработки с помощью усреднения мгновенной мощности. Конфигурация антенной решетки и условия приема сигнала соответствует тем, которые были приняты для схемы на рис. 7.4, а полезный сигнал опять представлял собой фазоманипулированное колебание с равновероятными значениями фазы 0 и  $180^\circ$ .

Эффективность алгоритма характеризовалась зависимостью ОСШ от числа итераций. Условия приема сигналов характеризовались двумя значениями отношения  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ : 16 700 и 2440. Результаты, при-



**Рис. 8.14.** Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама—Шмидта при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $K=3$ ,  $\alpha=\alpha_L=0,1$ ,  $w(0)=0$ ,  $s/n=10$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$



**Рис. 8.15.** Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама—Шмидта при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $K=9$ ,  $\alpha=0,3$ ,  $\alpha_L=0,25\alpha$ ,  $w(0)=0$ ,  $s/n=10$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$

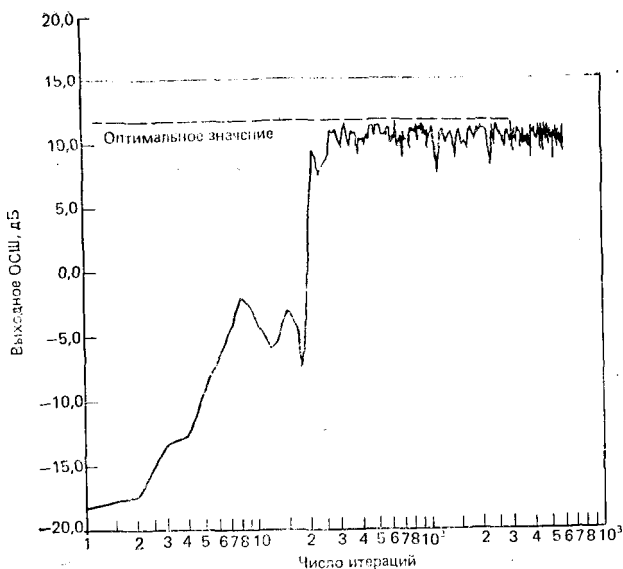


Рис. 8.16. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама — Шмидта при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $K=9$ ,  $\alpha=\alpha_L=0,3$ ,  $w(0)=0$ ,  $s/n=10$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$

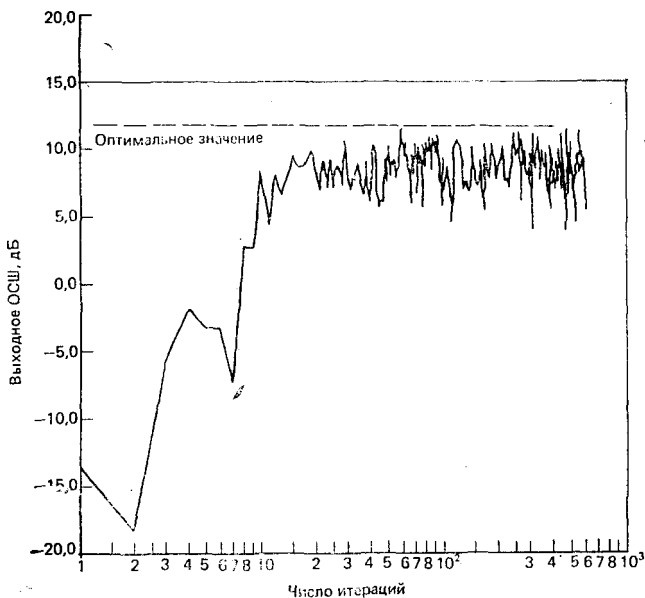


Рис. 8.17. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама — Шмидта при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=16\,700$ ,  $K=9$ ,  $\alpha=\alpha_L=0,65$ ,  $w(0)=0$ ,  $s/n=10$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$

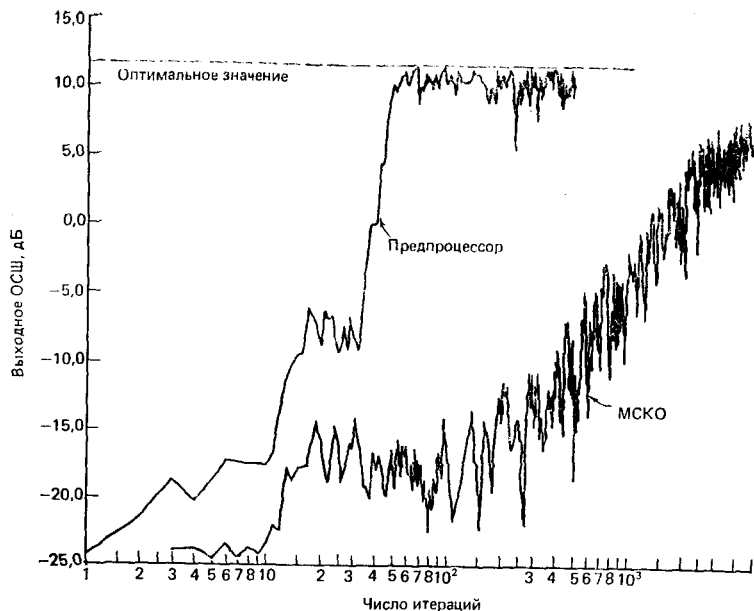


Рис. 8.18. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама — Шмидта и алгоритма МСКО при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=2440$ ,  $K=3$ ,  $\alpha=\alpha_L=0,1$ ,  $w^T(0)=[1, 0, 0, 0]$ ,  $s/n=10$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=15$

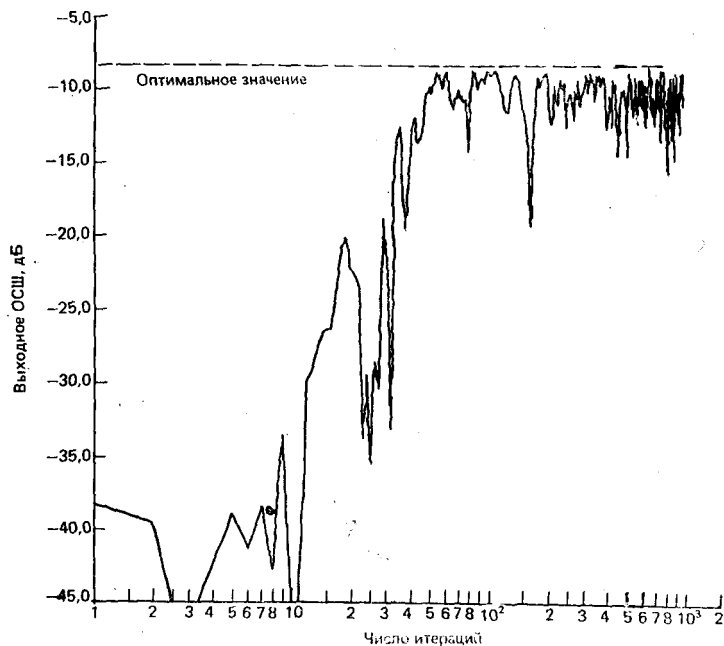


Рис. 8.19. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама — Шмидта при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=2400$ ,  $K=3$ ,  $\alpha=\alpha_L=0,1$ ,  $w(0)=0$ ,  $s/n=0,1$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}}=0,15$  ( $-8,2$  дБ)



веденные на рис. 8.13—8.17, характеризовались отношениями помеха-тепловой шум  $J_1/n = 4000$ ,  $J_2/n = 40$  и  $J_3/n = 400$ , при которых собственные значения ковариационной матрицы шума равны  $\lambda_1 = 1,67 \times 10^4$ ,  $\lambda_2 = 10^3$ ,  $\lambda_3 = 29$  и  $\lambda_4 = 1,0$ . Результаты, приведенные на рис. 8.18—8.20, характеризовались отношениями помеха-тепловой шум  $J_1/n = 500$ ,  $J_2/n = 40$  и  $J_3/n = 200$ , при которых собственные значения ковариационной матрицы шума равны  $\lambda_1 = 2,44 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_2 = 4,94 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_3 = 25,62$  и  $\lambda_4 = 1,0$ . Все другие условия определяют

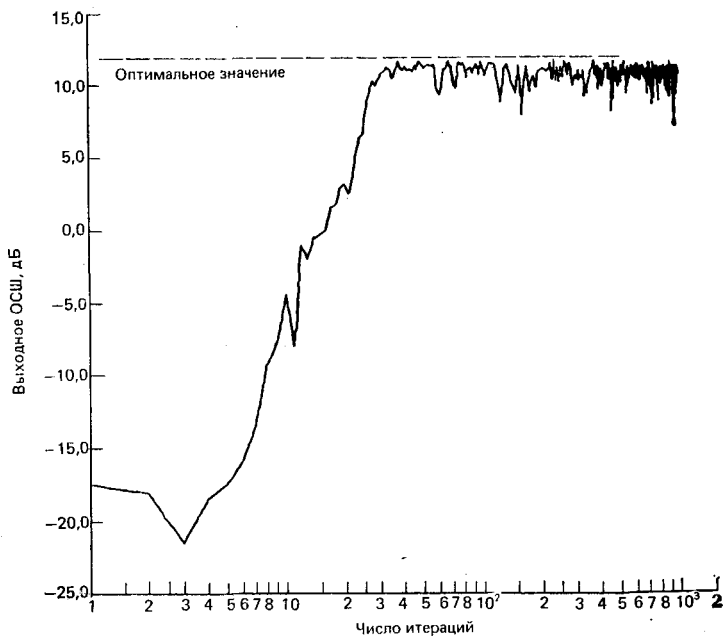


Рис. 8.20. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для предпроцессора Грама—Шмидта при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ ,  $K=3$ ,  $\alpha = \alpha_L = 0,1$ ,  $w(0) = 0$ ,  $s/n = 10$ ,  $\text{ОСШ}_{\text{опт}} = 15$

ся объемом выборки  $K$ , приходящимся на одну итерацию, коэффициентом передачи  $\alpha$  в контуре Хауэлса—Апельбаума, коэффициентом передачи  $\alpha_L$  в контуре МСКО, отношением полезный сигнал-тепловой шум  $s/n$  и начальным значением весового вектора  $w(0)$ .

Сравнение результатов, приведенных на рис. 8.13—8.20, позволяет сделать следующие выводы:

1. Большой разброс собственных значений ковариационной матрицы почти не влияет на скорость сходимости (ср. рис. 8.14 и 8.20).

2. Сравнимые флуктуации выходного ОСШ (характеризующие шум в контуре управления), полученные при  $K = 3$ ,  $\alpha = 0,3/p$  и  $K = 9$ ,  $\alpha = 0,1/p$ , показывают, что уровень шума в контуре определяется произведением  $K\alpha$  (ср. рис. 8.14 и 8.15).

3. Небольшое увеличение коэффициента передачи контура может привести к большим флуктуациям весовых коэффициентов (ср. рис. 8.16 с рис. 8.13 и 8.17).

4. Значения произведения  $K\alpha$ , при котором получается приемлемый уровень шума в контуре, зависит от ОСШ<sub>онт</sub> (ср. рис. 8.19 и 8.20). Меньшим значениям ОСШ<sub>онт</sub> соответствуют меньшие значения  $K\alpha$ . Отметим также, что при одинаковых условиях время адаптации предпроцессора Грама—Шмидта больше, чем при рекурсивных алгоритмах и алгоритмах НОМ. Сравнительные значения времени адаптации для различных алгоритмов приведены в гл. 10.

5. Степень ускорения переходных процессов, которую можно получить с помощью предпроцессора Грама—Шмидта, иллюстрируется графиками на рис. 8.18. Здесь показаны кривые ОСШ для устройств, осуществляющих обработку согласно методу МСКО при наличии и отсутствии предпроцессора Грама—Шмидта. Чем больше разброс собственных значений матрицы  $R_{xx}$ , тем больше улучшение, даваемое предпроцессором, при использовании его совместно с процессором, реализующим алгоритм МСКО.

## 8.5. ВЫВОДЫ

Зависимость скорости сходимости алгоритмов МСКО и Хауэлса—Апельбаума от распределения собственных значений ковариационной матрицы можно существенно ослабить, вводя предпроцессор, разлагающий вектор входного сигнала на ортогональные составляющие. Предпроцессор Нолена разлагает вектор входного сигнала на ортогональные главные компоненты, но его использование для ускорения сходимости осложняется из-за слишком больших вычислительных затрат на подстройку. Предпроцессор Грама—Шмидта также разлагает входной сигнал на ортогональные составляющие (в общем случае не совпадающие с главными компонентами). При небольших вычислительных затратах на подстройку он позволяет значительно уменьшить зависимость скорости сходимости от распределения собственных значений. Поэтому наиболее предпочтительным является предпроцессор Грама—Шмидта, обеспечивающий высокую скорость сходимости при сравнительной простоте реализации.

## ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите контур адаптивного управления на рис. 8.21 и покажите, что:

А. Схема на рис. 8.21 эквивалентна стандартной схеме КБЛ с весовыми коэффициентами

$$\omega_1 = u_1 + u_3, \quad \omega_2 = -u_2 u_3.$$

Б. Установившиеся значения весовых коэффициентов в схеме на рис. 8.21 определяются выражениями:

$$u_1 = \frac{\overline{x_1^* b}}{\overline{x_1^* x_1}}, \quad u_2 = \frac{\overline{x_2^* x_1}}{\overline{x_2^* x_2}}, \quad u_3 = \frac{\overline{x_1^* x_2}}{\overline{x_1^* x_1}} \left[ \frac{(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* b}) - (\overline{x_2^* x_1})(\overline{x_1^* b})}{(\overline{x_2^* x_2})(\overline{x_1^* x_1}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* x_1})} \right].$$

Отметим, что эти значения не совпадают со значениями весовых коэффициентов для стандартной схемы КБЛ.

*Замечание.* Математические выкладки, относящиеся к задачам 2—12, можно найти в [7].

2. Рассмотрите схему трехэлементной антенной решетки, приведенную на рис. 8.11.

А. Покажите, что установившиеся значения весовых коэффициентов в этой схеме определяются выражениями (8.61), (8.62) и (8.65).

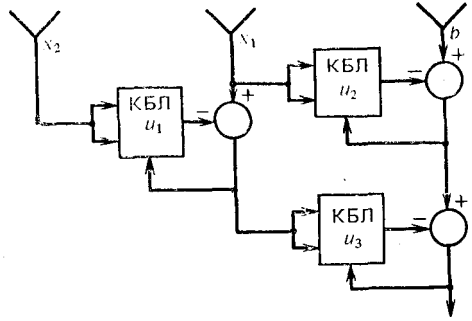


Рис. 8.21. Структурная схема цепи с тремя контурами Хауэлса — Аппельбаума, в которой весовые коэффициенты сходятся к неправильным значениям

Б. С помощью выражения (8.64) для выходного сигнала антенной решетки покажите, что

$$z = x_3 - u_{22} x_2 - \frac{(\overline{x_1^* x_3})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* x_3})}{(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* x_1})} x_1.$$

В. Среднее значение мощности шума на выходе определяется соотношением  $N_0 = \overline{|z|^2} = \overline{z z^*}$ . Для простоты записи обозначьте  $u_1 = u_{11}$ ,  $u_2 = u_{12}$ ,  $u_3 = u_{22}$  и покажите, что

$$N_0 = \overline{(x_3^* x_3)} + |\overline{u_3}|^2 \overline{(x_2^* x_2)} + |\overline{u_2} - \overline{u_1} \overline{u_3}|^2 \overline{(x_1^* x_1)} - \overline{u_3} (\overline{x_3^* x_2}) - \overline{u_3^*} (\overline{x_2^* x_3}) - \overline{(u_2 - \overline{u_1} \overline{u_3})} (\overline{x_3^* x_1}) - \overline{(u_2^* - \overline{u_1}^* \overline{u_3}^*)} (\overline{x_1^* x_3}) + \overline{u_3} (\overline{u_2^* - \overline{u_1}^* \overline{u_3}^*)} (\overline{x_1^* x_2}) + \overline{u_3^*} (\overline{u_2 - \overline{u_1} \overline{u_3}}) (\overline{x_2^* x_1}).$$

3. Используя обозначения задачи 2В, представьте весовые коэффициенты  $u_n$  для схемы на рис. 8.11 в виде

$$u_n = \overline{u}_n + \delta_n,$$

где  $\delta_n$  — флуктуационная составляющая весового коэффициента. Тогда полную мощность шума на выходе можно представить соотношением

$$N_{\text{шум}} = N_0 + N_u = \overline{\left\{ x_3 - (\overline{u}_3 + \delta_3) x_2 - [(\overline{u}_2 + \delta_2) - (\overline{u}_1 + \delta_1)(\overline{u}_2 + \delta_3)] x_1 \right\}^2},$$

где  $N_u$  — избыточная мощность шума, вызванная флуктуационными составляющими. Учитывая, что  $\overline{\delta_n} = 0$ , и пренебрегая третьей и четвертой степенью  $\delta_n$ , покажите, что

$$N_u = |\overline{\delta_3}|^2 \overline{[(x_2^* x_2) - (x_2^* x_1) \overline{u}_1] + (x_1^* x_1) |\overline{\delta_2} - \overline{u}_3 \overline{\delta_1}|^2}.$$

4. Весовой коэффициент  $u_1 = u_{11}$  для схемы на рис. 8.11 удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\tau_1 \left( \frac{\dot{u}_1}{G_1} \right) + \frac{u_1}{G_1} = x_1^* (x_2 - u_1 x_1),$$

где  $G_1$  — коэффициент передачи усилителя;  $\tau_1$  — постоянная времени интегрирующего фильтра в контуре адаптивного управления коэффициентом  $u_1$ . Предыдущее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{\alpha_1} \dot{\bar{u}}_1 + \left( x_1^* x_1 + \frac{1}{G_1} \right) \bar{u}_1 = x_1^* x_2, \quad \text{где } \alpha_1 = \frac{G_1}{\tau_1},$$

так что

$$\frac{1}{\alpha_1} \dot{\bar{u}}_1 + \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_1} \right) \bar{u}_1 = \overline{x_1^* x_2}.$$

Вычитая дифференциальное уравнение для среднего значения из дифференциального уравнения для мгновенного значения  $u_1 = \bar{u}_1 + \delta_1$  и пренебрегая членом второго порядка  $\delta_1 (\overline{x_1^* x_1} - \overline{x_1^* x_1})$ , получаем

$$\frac{1}{\alpha_1} \dot{\delta}_1 + \left( \frac{1}{G_1} + \overline{x_1^* x_1} \right) \delta_1 + (x_1^* x_1 - \overline{x_1^* x_1}) u_1 = (x_1^* x_2 - \overline{x_1^* x_2}).$$

Покажите, что в установившемся режиме, когда

$$\bar{u}_1 = \overline{x_1^* x_2} / (\overline{x_1^* x_1}),$$

это уравнение примет вид

$$\frac{1}{\alpha_1} \dot{\delta}_1 + \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_1} \right) \delta_1 = \left( x_1^* x_2 - \frac{\overline{x_1^* x_2}}{\overline{x_1^* x_1}} x_1^* x_1 \right) = \frac{1}{\alpha_1} f_1(t),$$

где  $f_1(t)$  можно считать случайным процессом.

5. Решение дифференциального уравнения, полученного в задаче 4, можно записать в виде

$$\delta_1(t) = \int_0^t f_1(\tau) \exp \left[ -\alpha_1 \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_1} \right) (t - \tau) \right] d\tau,$$

так что

$$\dot{\delta}_1(t) = f_1(t) - \alpha_1 \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_1} \right) \delta_1(t).$$

Подставьте  $\delta_1(t)$  и  $\dot{\delta}_1(t)$  в дифференциальное уравнение, полученное в задаче 4, и убедитесь, что указанное выражение действительно является решением этого дифференциального уравнения.

6. Второй момент флуктуаций  $\delta_1$  определяется как  $\overline{\delta_1^* \delta_1}$ .

А. Используя выражение для  $\delta_1(t)$ , полученное в задаче 5, покажите, что

$$\begin{aligned} \overline{\delta_1^* \delta_1} &= \exp \left[ -2\alpha_1 \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_1} \right) \right] \int_0^t \int_0^t \overline{f_1^*(\tau) f_1(u)} \times \\ &\times \exp \left[ \alpha_1 \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_1} \right) (\tau + u) \right] d\tau du. \end{aligned}$$

Б. Предположим, что случайный процесс

$$f_1(t) = \alpha_1 \left[ x_1^* x_2 - \frac{\overline{x_1^* x_2}}{\overline{x_1^* x_1}} x_1^* x_1 \right]$$

имеет интервал корреляции, равный  $\varepsilon$ , так что значения  $f_1(t)$ , удаленные друг от друга более чем на  $\varepsilon$ , можно считать статистически независимыми. Пусть

$$\int_0^t \overline{f_1^*(\tau) f_1(u)} du = \overline{f_1^* f_1} \varepsilon \quad \text{при } t > \tau + \varepsilon.$$

Покажите, что

$$\overline{\delta_1^* \delta_1} = \frac{\overline{e f_1^* f_1}}{2\alpha_1 [\overline{x_1^* x_1} + 1/G_1]} \quad \text{при } t > \tau + \varepsilon.$$

7. Покажите, что второй момент  $f_1$ , определенный в задаче 6Б, характеризуется соотношением

$$\begin{aligned} \overline{f_1^* f_1} &= \alpha_1^2 \left[ \overline{x_1^* x_2 - \frac{x_1^* x_2}{x_1^* x_1} x_1^* x_1} \right] \left[ \overline{x_1 x_2^* - \frac{(x_2^* x_1)}{(x_1^* x_1)} x_1^* x_1} \right] = \\ &= \alpha_1^2 \{ \overline{(x_1^* x_1)} \overline{(x_1^* x_2)} - \overline{(x_1^* x_2)} \overline{(x_2^* x_1)} \}. \end{aligned}$$

8. Подставив величину  $\overline{f_1^* f_1}$ , полученную в задаче 7, в выражение для  $\overline{\delta_1^* \delta_1}$  из задачи 6Б, покажите, что

$$\overline{\delta_1^* \delta_1} = \frac{\varepsilon \alpha_1 [\overline{(x_1^* x_1)} \overline{(x_2^* x_2)} - \overline{(x_2^* x_1)} \overline{(x_1^* x_2)}]}{2 [\overline{x_1^* x_1} + 1/G_1]}.$$

Заметим, что для получения  $\overline{\delta_2^* \delta_2}$  в приведенном соотношении нужно просто заменить  $x_2$  на  $x_3$ ,  $\alpha_1$  на  $\alpha_2$ , а  $G_1$  на  $G_2$ .

9. Из рис. 8.11 видно, что входными сигналами для второго каскада (характеризуемой коэффициентом  $u_3 = u_{22}$ ) являются  $y_1$  и  $y_2$ . Следовательно, чтобы рассчитать процессы этого каскада нужно заменить  $x_1$  на  $y_2$ ,  $x_2$  на  $y_1$ , а  $G_1$  на  $G_3$  в выражении, полученном в задаче 8. При этом потребуется вычислить  $\overline{y_1^* y_1}$ ,  $\overline{y_1^* y_2}$ ,  $\overline{y_2^* y_2}$ . Покажите, что

$$\begin{aligned} \overline{y_1^* y_1} &= \overline{|x_3 - u_3 x_1|^2} = \overline{x_3^* x_3} - \frac{\overline{(x_1^* x_3)} \overline{(x_3^* x_1)}}{x_1^* x_1}, \\ \overline{y_2^* y_2} &= \overline{|x_2 - u_1 x_1|^2} = \overline{x_2^* x_2} - \frac{\overline{(x_1^* x_2)} \overline{(x_2^* x_1)}}{x_1^* x_1}, \\ \overline{y_2^* y_1} &= \overline{\left[ x_2 - \frac{x_1^* x_2}{x_1^* x_1} x_1 \right]^* \left[ x_3 - \frac{x_1^* x_3}{x_1^* x_1} x_1 \right]} = \overline{x_2^* x_3} - \frac{\overline{(x_2^* x_1)} \overline{(x_1^* x_3)}}{x_1^* x_1}. \end{aligned}$$

10. Для вычисления величины  $N_{22}$  в задаче 3 требуется найти второй момент  $\overline{\delta_2^* \delta_1}$ . Соответствующие выражения для  $\delta_1(t)$  из задачи 5 применительно к  $\delta_2(t)$  можно переписать в виде

$$\delta_2(t) = \int_0^t f_2(\tau) \exp \left[ -\alpha_2 \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_2} \right) (t_1 - \tau) \right] d\tau,$$

где

$$f_2(t) = \alpha_2 \left[ x_1^* x_3 - \frac{\overline{x_1^* x_3}}{x_1^* x_1} x_1^* x_1 \right].$$

Используя эти результаты, покажите, что

$$\begin{aligned} \overline{\delta_2^* \delta_1} &= \int_0^t \int_0^t \overline{f_2^* (\tau) f_1(u)} \exp \left[ -\alpha_2 \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_2} \right) (t - \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_1 \left( \overline{x_1^* x_1} + \frac{1}{G_1} \right) (t - u) \right] d\tau du. \end{aligned}$$

Введя обозначение

$$\int_0^1 \overline{f_2^*}(\tau) \overline{f_1}(u) du = \overline{f_2^* f_1},$$

покажите, что

$$\overline{\delta_2^* \delta_1} = \frac{\varepsilon \overline{f_2^* f_1}}{\alpha_2 [\overline{x_1^* x_1} + 1/G_2] + \alpha_1 [\overline{x_1^* x_1} + 1/G_1]}.$$

11. Оцените значение  $\overline{f_2^* f_1}$ , оставляя только один член вида  $\overline{x_m^* x_n}$  в выражении

$$\overline{f_2^* f_1} = \alpha_2 \alpha_1 \left[ \overline{x_1 x_3^* - \frac{x_3^* x_1}{x_1^* x_1} x_1^* x_1} \right] \left[ \overline{x_1^* x_2 - \frac{x_1^* x_2}{x_1^* x_1} x_1^* x_1} \right],$$

и покажите, что результирующее выражение для  $\overline{f_2^* f_1}$  примет вид

$$\overline{f_2^* f_1} = \alpha_2 \alpha_1 [(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_3^* x_2}) - (\overline{x_3^* x_1})(\overline{x_1^* x_2})],$$

так что

$$\overline{\delta_2^* \delta_1} = \frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2 [(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_3^* x_2}) - (\overline{x_3^* x_1})(\overline{x_1^* x_2})]}{\alpha_2 [\overline{x_1^* x_1} + 1/G_2] + \alpha_1 [\overline{x_1^* x_1} + 1/G_1]}.$$

12. Подставляя результат, полученный в задаче 11, в выражение для  $N_u$ , полагая, что  $\alpha_1 = \alpha_2$ , и пренебрегая всеми величинами вида  $1/G$ , покажите, что

$$N_u = \{[(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_1^* x_2})(\overline{x_2^* x_1})][(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_3^* x_3}) - (\overline{x_3^* x_1})(\overline{x_1^* x_2})] - |(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_3}) - (\overline{x_2^* x_1})(\overline{x_1^* x_2})|^2\} \times \\ \times \left[ \frac{\alpha_3 \varepsilon}{2(\overline{x_1^* x_1})^2} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{2(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_2^* x_1})(\overline{x_1^* x_2})} \right].$$

Отметим, что часть  $N_u$ , пропорциональная  $\alpha_3$ , обусловлена флуктуациями коэффициента  $u_3$ . Часть  $N_u$ , пропорциональная  $\alpha_1$ , обусловлена флуктуациями как  $u_1$ , так и  $u_2$ . Если  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  выбраны так, что все три цепи имеют одну и ту же эффективную постоянную времени

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{(\overline{x_1^* x_1})^2}{(\overline{x_1^* x_1})(\overline{x_2^* x_2}) - (\overline{x_2^* x_1})(\overline{x_1^* x_2})},$$

то из полученного выражения для  $N_u$  видно, что составляющая шума в контуре управления, обусловленная флуктуациями  $u_3$ , в точности равна сумме составляющих, обусловленных флуктуациями величин  $u_1$  и  $u_2$ .

## Глава 9. АЛГОРИТМЫ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Градиентные алгоритмы наиболее пригодны в тех случаях, когда критерии эффективности являются квадратичными или, по крайней мере, унимодальными. Для некоторых классов задач [1—3] математические соотношения между изменяемыми параметрами и критерием эффективности оказываются неизвестными или очень сложными. В других задачах из-за ограничений, накладываемых на параметры системы адаптивного управления, может оказаться, что зависимость критерия эффективности не будет более унимодальной. Если график зависимости интересующего критерия эффективности является многомодаль-

ным и имеет седловидные точки, то градиентные методы следует применять с осторожностью. Одним из путей решения таких задач является применение поисковых алгоритмов. Алгоритмы, относящиеся к этому классу, обеспечивают поиск глобального экстремума как для унимодальных, так и многомодальных критериев и пригодны при любом вычислимом критерии эффективности [4—11]. Еще недавно поисковые алгоритмы использовались очень неохотно, главным образом из-за того, что в них при определении направления поиска не учитывалась информация предыдущих шагов и тем самым сходимость оказывалась медленной. Кроме того, алгоритмы поиска становятся не очень эффективными в случае унимодальных критериев. Тем не менее эти алгоритмы обладают и достоинствами, заключающимися в простоте реализации, малом объеме необходимых вычислений и нечувствительности к разрывам оптимизируемой функции (критерию). Эти алгоритмы эффективны при неполных данных о характере критерия. Основными типами поисковых алгоритмов являются алгоритмы систематического и случайного поиска.

При использовании метода систематического поиска осуществляется подробный «просмотр» интересующей области параметрического пространства, с помощью которого легко определяется глобальный экстремум. На практике, однако, этот тип поиска может оказаться очень длительным, так как большая часть периода поиска тратится на просмотр областей параметрического пространства, в которых нет экстремума.

Методы случайного поиска можно классифицировать как направленные и ненаправленные в зависимости от того, используется или нет информация, приобретенная на каждом шаге процесса обучения. Кроме того, оба указанных варианта могут обеспечивать более высокую скорость сходимости за счет увеличения шага адаптации в благоприятных направлениях. В этой главе рассматриваются три типовых алгоритма случайного поиска, использовавшихся для применений в адаптивных антенных решетках: линейного случайного поиска (ЛСП), ускоренного случайного поиска (УСП), направленного ускоренного случайного поиска (НУСП).

### 9.1. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК

Алгоритм «линейного случайного поиска» был рассмотрен в работе [12]. Согласно этому алгоритму в начале каждой итерации к весовому вектору прибавляется некоторое случайное приращение  $\Delta \mathbf{w}_k$  и определяется соответствующее изменение критерия эффективности. Затем пропорционально произведению изменения оценки критерия эффективности и случайного приращения весового вектора изменяется весовой вектор, т. е.

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \mu_s \{ \mathfrak{F}[\mathbf{w}_k] - \mathfrak{F}[\mathbf{w}_k + \Delta \mathbf{w}_k] \} \Delta \mathbf{w}_k, \quad (9.1)$$

где  $\mathfrak{F}[\cdot]$  — выбранный критерий эффективности;  $\mu_s$  — шаговая постоянная. Составляющие случайного вектора  $\Delta \mathbf{w}_k$  характеризуются нормальным законом распределения с нулевым средним значением и

дисперсией  $\sigma^2$ . Константы  $\mu_s$  и  $\sigma^2$  должны выбираться так, чтобы обеспечивались как устойчивость, так и достаточная скорость сходимости алгоритма. Рассматриваемый алгоритм называется «линейным», так как изменение весового вектора прямо пропорционально изменению критерия эффективности.

Для анализа характеристик алгоритма ЛСП полезно ввести некоторые определения. Истинное изменение критерия эффективности, получаемое в результате прибавления  $\Delta w_k$  к вектору  $w_k$ , есть

$$(\Delta \mathfrak{P})_k \triangleq \mathfrak{P}[w_k + \Delta w_k] - \mathfrak{P}[w_k]. \quad (9.2)$$

Если оценивается значение критерия эффективности, то соответствующее изменение значений оцененных величин определяется выражением

$$(\widehat{\Delta \mathfrak{P}})_k \triangleq \widehat{\mathfrak{P}}[w_k + \Delta w_k] - \widehat{\mathfrak{P}}[w_k]. \quad (9.3)$$

Тогда ошибка в оценке изменения критерия эффективности будет

$$\gamma_k \triangleq (\Delta \mathfrak{P})_k - (\widehat{\Delta \mathfrak{P}})_k, \quad (9.4)$$

а дисперсия этой ошибки

$$\text{var}[\gamma_k] = \text{var}[(\widehat{\Delta \mathfrak{P}})_k] = \text{var}\{\widehat{\mathfrak{P}}[w_k + \Delta w_k]\} + \text{var}\{\widehat{\mathfrak{P}}[w_k]\}. \quad (9.5)$$

Для того чтобы определить дисперсию оценки  $\widehat{\mathfrak{P}}[w_k]$ , необходимо выбрать конкретный критерий эффективности и способ получения оценки для выбранного критерия.

Обратимся вновь к анализу алгоритма ЛСП, выбрав в качестве интересующего критерия эффективности СКО, т. е.  $\mathfrak{P}[w] = \xi[w]$ . Будем считать, что оценка СКО получается в результате усреднения независимых отсчетов, как это определено выражением (4.98) разд. 4.3.2. При таком выборе критерия эффективности и его соответствующей оценки получим

$$\text{var}[\gamma_k] = \frac{2}{K} \{\xi^2[w_k + \Delta w_k] + \xi^2[w_k]\}, \quad (9.6)$$

где  $K$  — число независимых выборочных значений, использованных для нахождения оценки  $\widehat{\xi}[w]$ . В установившемся режиме, когда процесс подстройки весового вектора происходит в окрестностях точки минимума критерия эффективности, значение дисперсии, определяемой выражением (9.6), близко к значению

$$\text{var}[\gamma_k] \approx \frac{4}{K} \xi_{\min}^2. \quad (9.7)$$

Случайное изменение весового вектора при алгоритме ЛСП приводит к изменению СКО. Для получения  $\widehat{\xi}[w_k + \Delta w_k]$  на каждой итерации используется  $K$  выборочных данных. Одним из путей увеличения скорости сходимости при этом алгоритме является такое использование параллельно работающих процессоров (одного для обработки  $w_k$  и другого — для  $w_k + \Delta w_k$ ), при котором выборочные значения, необходимые для получения оценок  $\widehat{\xi}[w_k]$  и  $\widehat{\xi}[w_k + \Delta w_k]$ , могут



браться одновременно. Значение адаптивного весового вектора в начале следующей итерации устанавливается после получения обеих указанных оценок  $\hat{\xi}$ . Для любой итерации среднее превышение СКО, возникающее в результате изменения весового вектора, определяется как

$$E \left\{ \xi [w_h] - \frac{\xi [w_k] + \xi [w_k + \Delta w_k]}{2} \right\} = \frac{1}{2} E \{ \xi [w_h] - \xi [w_k + \Delta w_k] \}. \quad (9.8)$$

Вектор  $\Delta w_h$  имеет нулевое среднее значение и не коррелирован с  $w_h$ . Пусть  $\Delta w'_k$  представляет вектор случайного приращения в нормальных координатах (в которых корреляционная матрица является диагональной, т. е.  $R_{xx} = \Lambda$ ), тогда  $\text{cov} [\Delta w_k] = \text{cov} [\Delta w'_k] = \sigma^2 \mathbf{I}$ . Следовательно, среднее превышение СКО может быть представлено в виде

$$\frac{1}{2} E \{ \Delta w_k^T R_{xx} \Delta w_k \} = \frac{1}{2} E \{ \Delta w_k^T \Lambda \Delta w'_k \} = \frac{1}{2} \sigma^2 \text{tr} (R_{xx}). \quad (9.9)$$

Определим возмущение  $P$  как отношение среднего превышения СКО (являющегося следствием случайных приращений весового вектора) к минимальной СКО. Тогда

$$P = \frac{\sigma^2 \text{tr} (R_{xx})}{2\xi_{\min}}. \quad (9.10)$$

### 9.1.1. Устойчивость алгоритма ЛСП

При выборе СКО в качестве критерия эффективности уравнение подстройки весового вектора (9.1) можно переписать с учетом обозначений (9.2)—(9.4) в виде

$$w_{h+1} = w_h + \mu_s \{ -(\Delta \xi)_h + \gamma_h \} \Delta w_h. \quad (9.11)$$

Учитывая, что  $v_h \triangleq w_h - w_{\Delta}$ , уравнение (9.11) можно представить как

$$v_{h+1} = v_h + \mu_s \{ -(\Delta \xi)_h + \gamma_h \} \Delta w_h. \quad (9.12)$$

Поскольку величина  $\sigma^2$  выбирается малой, то  $\Delta w_h$  будет также малым и тогда

$$(\Delta \xi)_h = \Delta w_h^T \nabla_h, \quad (9.13)$$

где  $\nabla_h$  — градиент критерия эффективности, определяемый в точке  $w_h$ . Поскольку  $\nabla_h = 2R_{xx}v_h$ , выражение (9.13) можно записать в виде

$$(\Delta \xi)_h = 2\Delta w_h^T R_{xx}v_h. \quad (9.14)$$

Тогда уравнение (9.12) можно переписать как

$$\begin{aligned} v_{h+1} &= v_h + \mu_s \Delta w_h [-2\Delta w_h^T R_{xx}v_h + \gamma_h] = \\ &= [I - 2\mu_s \Delta w_h \Delta w_h^T R_{xx}] v_h + \mu_s \gamma_h \Delta w_h. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Уравнение (9.15) является эквивалентной формой уравнения (9.1) и оказывается более полезным для анализа даже несмотря на то, что при реализации алгоритма используется (9.1). Форма записи в (9.15)

подчеркивает тот факт, что адаптивный весовой вектор может рассматриваться как решение векторного линейного разностного уравнения первого порядка со случайно изменяющимся коэффициентом  $\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}_k \Delta \mathbf{w}_k^T \mathbf{R}_{xx}$  и случайной возбуждающей функцией  $\mu_s \gamma_k \Delta \mathbf{w}_k$ .

Приведенное векторное линейное разностное уравнение более удобно анализировать в нормальных координатах, переход к которым осуществляется умножением обеих частей (9.15) слева на матрицу преобразования  $\mathbf{Q}$  (см. разд. 4.1.3); в результате получим

$$\mathbf{v}'_{k+1} = (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) \mathbf{v}'_k + \mu_s \gamma_k \Delta \mathbf{w}'_k. \quad (9.16)$$

Хотя уравнение (9.16) несколько проще, чем (9.15), получить решение для него довольно трудно, поскольку матричный коэффициент при  $\mathbf{v}'_k$  случаен и имеет недиагональный вид. Поэтому условия устойчивости для алгоритма ЛСП будут определены не из точного решения уравнения (9.16), а на основе анализа среднего значения адаптивного весового вектора.

Вычислив математическое ожидание для обеих частей уравнения (9.16) и учтя, что  $\Delta \mathbf{w}'_k$  является случайным вектором, не коррелированным с  $\gamma_k$  и  $\mathbf{v}'_k$ , можно записать

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{v}'_{k+1} \} &= E \{ (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) \mathbf{v}'_k \} + \mu_s E \{ \gamma_k \Delta \mathbf{w}'_k \} = \\ &= (\mathbf{I} - 2\mu_s E \{ \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \} \Lambda) E \{ \mathbf{v}'_k \} + 0 = (\mathbf{I} - 2\mu_s \sigma^2 \Lambda) E \{ \mathbf{v}'_k \}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

В [12] решение для (9.17) приводится в виде

$$E \{ \mathbf{v}'_k \} = (\mathbf{I} - 2\mu_s \sigma^2 \Lambda)^k \mathbf{v}'_0. \quad (9.18)$$

Формула (9.18) позволяет найти математическое ожидание весового вектора в переходном режиме для заданного начального значения  $\mathbf{v}'_0$ . Если (9.18) характеризует устойчивый процесс адаптации, то математическое ожидание  $\mathbf{v}'_k$  должно сходиться к нулю. Из (9.18) вытекают следующие условия устойчивости:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} > \mu_s \sigma^2 > 0. \quad (9.19)$$

Если произведение  $\mu_s \sigma^2$  выбрано так, чтобы выполнялись условия (9.19), то тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \{ \mathbf{v}'_k \} = 0. \quad (9.20)$$

Поскольку характер рассматриваемого переходного процесса аналогичен характеру процесса при использовании метода наискорейшего спуска (см. разд. 4.2.2), то можно по аналогии считать, что постоянная времени  $p$ -й составляющей среднего значения весового вектора в нормальных координатах будет

$$\tau_p = 1 / (2\mu_s \sigma^2 \lambda_p). \quad (9.21)$$

Постоянная времени  $p$ -й составляющей кривой обучения равна половине величины, определяемой (9.21), т. е.

$$\tau_{p \text{ сн}} = 1 / (4\mu_s \sigma^2 \lambda_p). \quad (9.22)$$

При выполнении условий устойчивости (9.19) обеспечивается сходимость только математического ожидания адаптивного весового вектора, при этом флуктуации весового вектора могут быть значительными. Для того чтобы охарактеризовать эти флуктуации, нужно определить ковариационную матрицу весового вектора. Для простоты будем считать, что дисперсии составляющих весового вектора ограничены и изменение весового вектора в установившемся режиме представляет собой стационарный случайный процесс. Полагая, что указанные условия выполняются, умножением обеих частей уравнения (9.16) на соответствующие транспонированные величины получаем выражение для ковариационной матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{k+1} \mathbf{v}'_{k+1}{}^T &= (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) \mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_k{}^T (\mathbf{I} - 2\mu_s \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T) + \\ &+ \mu_s^2 \gamma_k^2 \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T + (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) \mathbf{v}'_k \mu_s \gamma_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T + \\ &+ \mu_s \gamma_k \Delta \mathbf{w}'_k \mathbf{v}'_k{}^T (\mathbf{I} - 2\mu_s \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Вычислим математические ожидания для обеих частей (9.23), учитывая, что  $\gamma_k$  и  $\Delta \mathbf{w}'_k$  являются некоррелированными случайными процессами с нулевым средним. Тогда

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{v}'_{k+1} \mathbf{v}'_{k+1}{}^T \} &= E \{ (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) \mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_k{}^T (\mathbf{I} - \\ &- 2\mu_s \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T) \} + \mu_s^2 E \{ \gamma_k^2 \} E \{ \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \} + 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Поскольку  $\text{var} [\gamma_k] \simeq (4/K) \xi_{\min}^2$  и  $\text{cov} [\Delta \mathbf{w}'_k] = \sigma^2 \mathbf{I}$ , выражение (9.24) можно представить в виде

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{v}'_{k+1} \mathbf{v}'_{k+1}{}^T \} &= E \{ (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) \mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_k{}^T (\mathbf{I} - \\ &- 2\mu_s \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T) \} + \mu_s^2 \frac{4}{K} \xi_{\min}^2 \sigma^2 \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

В установившемся режиме  $\mathbf{v}'_k$  также является стационарным случайным процессом с нулевым средним, который не коррелирован с  $\Delta \mathbf{w}'_k$ , и поэтому (9.25) можно записать как

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{v}'_{k+1} \mathbf{v}'_{k+1}{}^T \} &= E \{ (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) E [\mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_k{}^T] (\mathbf{I} - \\ &- 2\mu_s \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T) \} + \mu_s^2 \frac{4}{K} \xi_{\min}^2 \sigma^2 \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Следовательно, ковариационная матрица адаптивного весового вектора в установившемся режиме имеет вид

$$\begin{aligned} \text{cov} [\mathbf{v}'_k] &= E \{ (\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda) \text{cov} [\mathbf{v}'_k] (\mathbf{I} - 2\mu_s \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T) \} + \\ &+ \mu_s^2 \frac{4}{N} \xi_{\min}^2 \sigma^2 \mathbf{I} = \text{cov} [\mathbf{v}'_k] - 2\mu_s E \{ \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \} \Lambda \text{cov} [\mathbf{v}'_k] - \\ &- 2\mu_s \text{cov} [\mathbf{v}'_k] \Lambda E \{ \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \} + 4\mu_s^2 E \{ \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda \times \\ &\times \text{cov} [\mathbf{v}'_k] \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \} + \mu_s^2 \frac{4}{N} \xi_{\min}^2 \sigma^2 \mathbf{I} = \text{cov} [\mathbf{v}'_k] - \\ &- 2\mu_s \sigma^2 \Lambda \text{cov} [\mathbf{v}'_k] - 2\mu_s \sigma^2 \text{cov} [\mathbf{v}'_k] \Lambda + 4\mu_s^2 E \{ \Delta \mathbf{w}'_k \times \\ &\times \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \Lambda \text{cov} [\mathbf{v}'_k] \Lambda \Delta \mathbf{w}'_k \Delta \mathbf{w}'_k{}^T \} + \mu_s^2 \frac{4}{K} \xi_{\min}^2 \sigma^2 \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Решить уравнение (9.27) довольно сложно, поскольку входящие в него ковариационные матрицы не факторизуются. Может считаться правдоподобным (хотя и недоказанным), что в установившемся режиме ковариационная матрица  $\mathbf{v}_k$  диагональна. Полученные при использовании указанного упрощения результаты показывают, что в нем есть определенный смысл.

Случайная возбуждающая функция в уравнении (9.16) содержит составляющие, не коррелированные друг с другом и во времени. Кроме того, случайный коэффициент  $\mathbf{I} - 2\mu_s \Delta \mathbf{w}_k' \Delta \mathbf{w}_k'^T \Lambda$  является диагональным в среднем (хотя в общем случае не при всех  $k$ ) и не коррелированным как с  $\mathbf{v}_k$ , так и с самим собой во времени. Поэтому довольно правдоподобно, что матрица ковариации  $\mathbf{v}_k$  является диагональной.

Считая, что  $\text{cov} [\mathbf{v}_k']$  является на самом деле диагональной, перегруппировав члены, (9.27) можно переписать в другом виде:

$$4\mu_s \sigma^2 \Lambda \text{cov} [\mathbf{v}_k'] - 4\mu_s^2 E \{ \Delta \mathbf{w}_k' \Delta \mathbf{w}_k'^T \Lambda \text{cov} [\mathbf{v}_k'] \times \\ \times \Lambda \Delta \mathbf{w}_k' \Delta \mathbf{w}_k'^T \} = \mu_s^2 \frac{4}{K} \xi_{\min}^2 \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (9.28)$$

Наибольший интерес представляет случай медленной адаптации, при котором

$$\mu_s \sigma^2 \Lambda \ll \mathbf{I}. \quad (9.29)$$

Кроме того, можно заметить, что

$$\mu_s^2 E \{ \Delta \mathbf{w}_k' \Delta \mathbf{w}_k'^T \Lambda \text{cov} [\mathbf{v}_k'] \Lambda \Delta \mathbf{w}_k' \Delta \mathbf{w}_k'^T \} \simeq (\mu_s \sigma^2 \Lambda)^2 \text{cov} [\mathbf{v}_k'], \quad (9.30)$$

тогда с учетом (9.29)

$$(\mu_s \sigma^2 \Lambda)^2 \text{cov} [\mathbf{v}_k'] \ll \mu_s \sigma^2 \Lambda \text{cov} [\mathbf{v}_k']. \quad (9.31)$$

Полученный в (9.31) результат свидетельствует о том, что в выражении (9.28) можно пренебречь членом  $-4\mu_s^2 E \{ \cdot \}$ . Тогда (9.28) может быть записано в виде

$$\text{cov} [\mathbf{v}_k'] = \frac{\mu_s}{K} \xi_{\min}^2 \Lambda^{-1}. \quad (9.32)$$

Несмотря на то, что (9.32) базируется на правдоподобном предположении, на практике вытекающие из него выражения для рассогласования дают, как правило, точные результаты [12].

Рассогласование при использовании алгоритма ЛСП может быть найдено на основе рассмотрения среднего превышения СКО, обусловленного шумом весового вектора:

$$E \{ \mathbf{v}_k'^T \Lambda \mathbf{v}_k' \} = \sum_{p=1}^N \lambda_p E \{ (v_{p_k}')^2 \}, \quad (9.33)$$

где  $N$  — число собственных значений матрицы  $\Lambda$ . Используя выражение (9.32), можно записать

$$E \{ \mathbf{v}_k'^T \Lambda \mathbf{v}_k' \} = \sum_{p=1}^N \lambda_p \left( \frac{\mu_s}{K} \xi_{\min}^2 \frac{1}{\lambda_p} \right) = (N \mu_s / K) \xi_{\min}^2. \quad (9.34)$$

Поскольку рассогласование  $M$  определяется как среднее превышение СКО, деленное на минимальное значение СКО

$$M \triangleq \frac{E \{ \mathbf{v}'_k \Lambda \mathbf{v}'_k \}}{\xi_{\min}}, \quad (9.35)$$

то для алгоритма ЛСП

$$M = \frac{N \mu_s}{K} \xi_{\min}. \quad (9.36)$$

Используя выражение для возмущения  $P$ , полученный результат можно представить в виде

$$M = \frac{N \mu_s \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{xx})}{2KP} = \frac{N^2 \mu_s \sigma^2 \lambda_{cp}}{2KP}. \quad (9.37)$$

Напомним теперь, что постоянная времени  $p$ -й составляющей кривой обучения для алгоритма ЛСП (измеряемая числом требуемых итераций) определяется формулой (9.21). Поскольку для одной итерации векторного вектора требуется получение двух оценок  $\hat{\xi}$ , то на каждую итерацию приходится  $2K$  выборочных отсчетов. Поэтому постоянная времени кривой обучения определяется как

$$T_{рско} \triangleq 2K \tau_{рско} = \frac{K}{2\mu_s \sigma^2 \lambda_p}. \quad (9.38)$$

Из (9.38) следует, что

$$\lambda_p = \frac{K}{2\mu_s \sigma^2} \frac{1}{T_{рско}} \quad (9.39)$$

$$\lambda_{cp} = \frac{K}{2\mu_s \sigma^2} \left( \frac{1}{T_{рско}} \right)_{cp}. \quad (9.40)$$

Подставив (9.40) в (9.37), получим

$$M = \frac{N^2}{4P} \left( \frac{1}{T_{рско}} \right)_{cp}. \quad (9.41)$$

Поскольку полное рассогласование характеризуется случайной  $M$  и детерминированной  $P$  составляющими, то с учетом (9.41) можно записать

$$M_{\Pi} = \frac{N^2}{4P} \left( \frac{1}{T_{рско}} \right)_{cp} + P. \quad (9.42)$$

Если детерминированная составляющая полного рассогласования выбрана оптимально, то как  $M$ , так и  $P$  одинаковы, а значение  $P$  равно половине значения полного рассогласования, так что

$$(M_{\Pi})_{\min} = \frac{N^2}{2P_{\text{опт}}} \left( \frac{1}{T_{рско}} \right)_{cp} = N \left[ \left( \frac{1}{T_{рско}} \right)_{cp} \right]^{1/2}. \quad (9.43)$$

Полезно сравнить этот результат с соответствующим результатом (4.83), полученным для алгоритма МСКО.

## 9.2. УСКОРЕННЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК

Предположим, что критерий эффективности  $\mathcal{F}[\mathbf{w}]$  выбран и его желательно минимизировать в некоторой области значений комплексного весового вектора  $\mathbf{w}$ . Пусть изменение комплексного весового вектора производится согласно упрощенному варианту ускоренного случайного поиска, описанного в [13], т. е.

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu_s(k)[\Delta\mathbf{w}(k)], \quad (9.44)$$

где  $\mu_s(k)$  — шаговая постоянная (в исходном состоянии  $\mu_s(0) = \mu_0$ ) и  $\Delta\mathbf{w}(k)$  — случайный вектор, составляющие которого определяются как

$$\Delta w_i(k) = \cos \theta_i + j \sin \theta_i; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (9.45)$$

$\theta_i$  — случайный угол, равномерно распределенный на интервале  $\{0, 2\pi\}$  так, что  $|\Delta w_i(k)| = 1$ . С помощью  $\Delta\mathbf{w}(k)$  изменяется направление весового вектора, с помощью  $\mu_s$  — его длина.

В исходном состоянии весовой вектор устанавливается равным  $\mathbf{w}(0)$  и определяется либо критерий эффективности  $\mathcal{F}[\mathbf{w}(0)]$ , либо его оценка  $\hat{\mathcal{F}}[\mathbf{w}(0)]$ . Затем весовой вектор изменяется в соответствии с процедурой (9.44) при  $\mu_s(0) = \mu_0$ , после чего находится оценка критерия эффективности  $\hat{\mathcal{F}}[\mathbf{w}(1)]$  и производится ее сравнение с величиной  $\hat{\mathcal{F}}[\mathbf{w}(0)]$ . Если в результате этого сравнения эффективность улучшается, то приращение  $\Delta\mathbf{w}$  сохраняется неизменным, а шаговая постоянная  $\mu_s$  удваивается (приводя к «ускоренной» сходимости). Если же результирующая эффективность не улучшилась, то предыду-

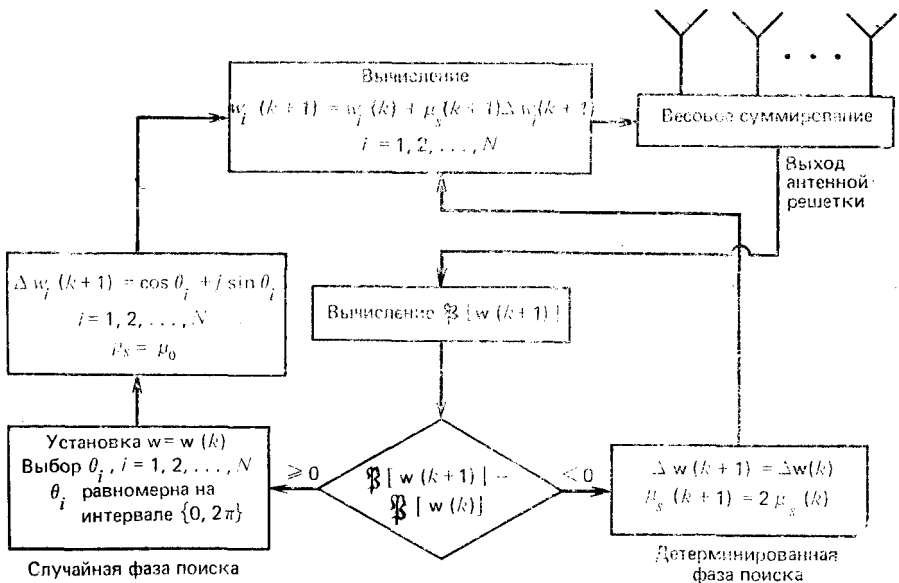


Рис. 9.1. Блок-схема алгоритма УСП

щее значение вектора  $w$  сохраняется таким же, как и в исходном состоянии, выбирается новое значение вектора  $\Delta w$ , а  $\mu_s$  устанавливается равной  $\mu_0$ . Вследствие того, что при использовании алгоритма УСП происходит возврат к предыдущему значению  $w$  в том случае, когда эффективность не улучшается, этот алгоритм оказывается устойчивым независимо от выбора шаговой постоянной. Блок-схема упрощенного варианта алгоритма УСП показана на рис. 9.1.

Рассмотрим одну составляющую комплексного весового вектора, для которой  $v_i = w_i - w_{\text{опт}}$  —  $w_{\text{опт}}$ . Если  $v_i(k) < \mu_0/2$ , то любое последующее изменение этой составляющей с шаговой постоянной  $\mu_0$  приведет к  $v_i(k+1) \geq v_i(k)$ , как показано на рис. 9.2. Поэтому, если все составляющие весового вектора отличаются не более, чем на  $\mu_0/2$  от соответствующих составляющих вектора  $w_{\text{опт}}$ , при использовании шаговой постоянной  $\mu_0$  нельзя добиться дальнейшего улучшения эффективности. Таким образом, это условие определяет нижний предел возможно достижимой эффективности в установившемся режиме при использовании процедуры УСП.

Для упрощения анализа будем считать, что распределение вектора  $w_i(k)$  равномерно внутри области, определяемой условиями  $v_i = \mu_0/2$ . Тогда в установившемся режиме математическое ожидание  $v_i$  будет равно  $v_{ss}(k) = 0$ , а среднее превышение СКО (в предположении  $\mathcal{P} = \xi$  и с учетом того, что  $E\{|v_i|^2\} = \mu_0^2/8$ ) будет определяться выражением

$$E\{\mathbf{v}'^T(k)\Lambda\mathbf{v}'(k)\} = \frac{\mu_0^2}{8} \xi_{\text{min}} \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}). \quad (9.46)$$

Тогда среднее значение рассогласования в установившемся режиме будет

$$M_{\text{ср}} = \frac{\mu_0^2}{8} \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}). \quad (9.47)$$

На каждой последующей итерации составляющие весового вектора получают случайное приращение на величину  $\mu_0$  относительно их значения в установившемся режиме. Считая, что такое приращение происходит при  $v_{ss} = p$  (как показано на рис. 9.3), получаем  $E\{v_p\} = \mu_0$ ,  $E\{|v_p|^2\} = 9\mu_0^2/8$  и среднее значение полного рассогласования

$$M_{\text{п}} = \frac{9\mu_0^2}{8} \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}). \quad (9.48)$$

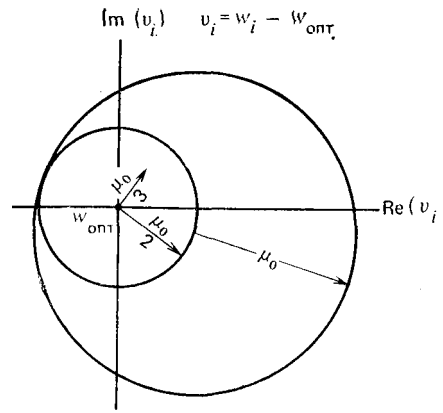


Рис. 9.2. Графическая интерпретация приращения одной составляющей весового вектора

Из предыдущего обсуждения следует, что в установившемся режиме пока принимается правильное решение, базирующееся на определении  $\xi [w(k+1)] - \xi [w(k)]$ , среднее значение полного рассогласования определяется соотношением (9.48).

На практике при применении алгоритма УСП используется статистика  $\Delta\hat{\Psi} = \hat{\Psi}[w(k+1)] - \hat{\Psi}[w(k)]$  вместо  $\Delta\Psi = \Psi[w(k+1)] - \Psi[w(k)]$ , а статистика  $\Delta\hat{\Psi}$ , полученная на основе разности оценок, содержит шум, который может привести к сбою в определении направления. Поэтому важно гарантировать, чтобы разность  $\Delta\Psi$ ,

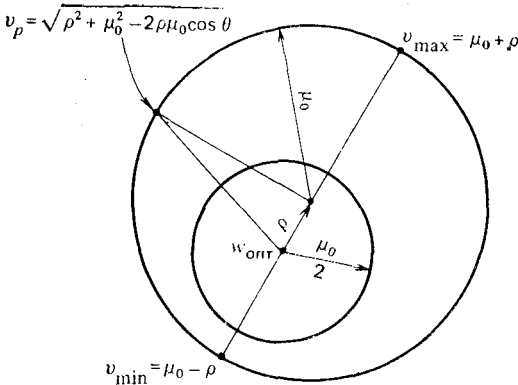


Рис. 9.3. Графическая интерпретация приращения составляющей весового вектора

обусловленная приращением весового вектора, была значительно больше среднего квадратического отклонения погрешности. Это можно обеспечить выбором  $\Delta\Psi > \sigma_\Psi$ , где  $\sigma_\Psi^2$  определяется выражением (9.7). Выбрав  $K$  и  $\mu_s$  так, чтобы  $\Delta\Psi > \sigma_\Psi$ , нетрудно убедиться, что среднее значение рассогласования в установившемся режиме приблизительно определяется формулой (9.48). Кроме того, желательно, чтобы разность  $\Delta\Psi$ , обусловленная приращением весового вектора, была меньше, чем  $E\{\Psi[w(k)]\}$ . Поэтому при выборе в установившемся режиме  $\Psi = \xi$ , константы  $K$  и  $\mu_s$  должны выбираться так, чтобы удовлетворялись условия

$$\xi_{\min} > \frac{9}{8} \mu_0^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) > \frac{2\xi_{\min}}{\sqrt{K}}. \quad (9.49)$$

Хотя значения  $K$  и  $\mu_s$  удовлетворяют условию  $\Delta\Psi > \sigma_\Psi$ , шум измерения критерия эффективности тем не менее присутствует, и это может в отдельных экспериментах привести к обманчиво хорошим результатам. Очевидно, что такие ложные результаты будут в среднем корректироваться на последующих шагах.

### 9.3. НАПРАВЛЕННЫЙ УСКОРЕННЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК

Метод НУСП рассмотрен в [14—16] и включает две фазы: случайную и детерминированную. Управление поиском в параметрическом пространстве сводится к чередованию этих фаз в зависимости от того,



наблюдается или не наблюдается улучшение эффективности. В первоначальной случайной фазе поиска (которая является фазой сбора информации) адаптивный весовой вектор получает случайное приращение, характеризуемое многомерной функцией плотности вероятностей (ФПВ). Как только определено направление, в котором эффектив-

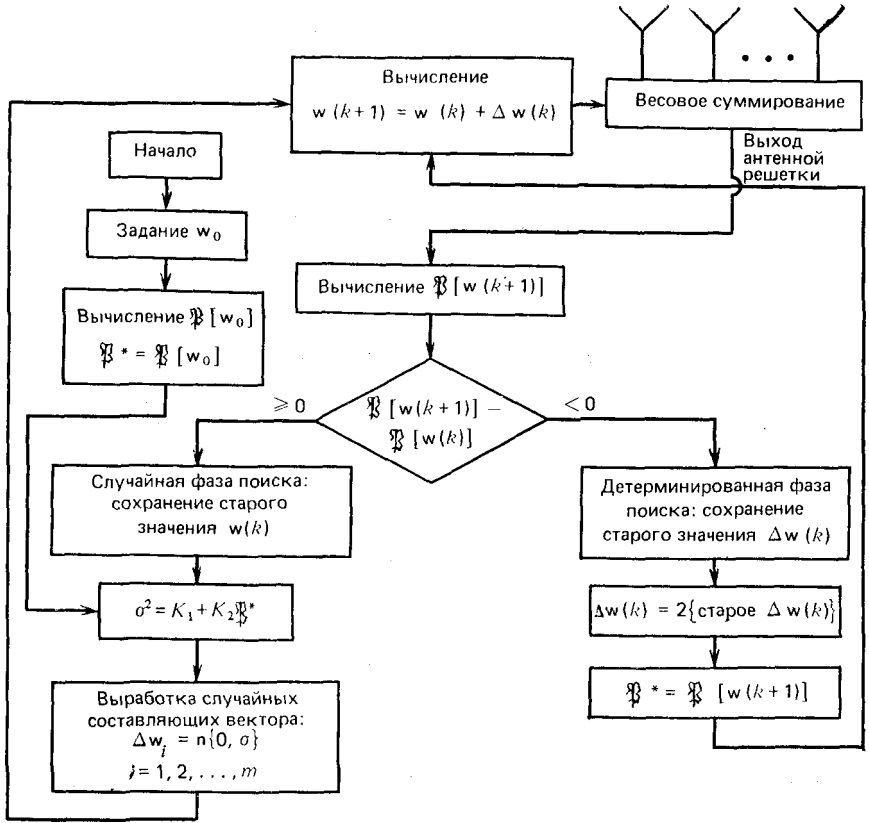


Рис. 9.4. Блок-схема алгоритма НУСП

ность улучшается, осуществляется переход к детерминированной фазе, а информация, приобретенная в течение случайной фазы поиска, используется для увеличения шага в этом направлении. Если же в результате такого ускоренного движения получается неудовлетворительный результат, то снова осуществляется переход к случайной фазе поиска, однако теперь ФПВ выбирается с меньшим средним квадратическим отклонением, чем в первоначальной фазе поиска.

Блок-схема упрощенного варианта алгоритма НУСП показана на рис. 9.4. Выполнение алгоритма начинается с задания начального весового вектора  $w_0$ , для которого оценивается критерий эффективности  $F[w_0]$ . При этом получаемое минимальное значение критерия  $F^*$  за-

помниается. В исходном состоянии  $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P} [w_0]$ . Алгоритм начинается со случайной фазы поиска, при которой весовой вектор получает случайное приращение  $\Delta w$ , при этом каждая из составляющих вектора  $\Delta w$  имеет нормальную ФПВ с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$ . Значение дисперсии выбирается равным

$$\sigma^2 = K_1 + K_2 \mathfrak{P}^*, \quad (9.50)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — константы, выбираемые так, чтобы шаг был достаточно малым, когда эффективность оптимальна, и достаточно большим для получения информации о направлении поиска, когда эффективность далека от оптимальной.

Затем вычисляется значение адаптивного весового вектора по формуле

$$w(k+1) = w(k) + \Delta w(k) \quad (9.51)$$

и оценивается критерий эффективности  $\mathfrak{P} [w(k+1)]$ . Если эффективность не увеличивается, то сохраняются случайная фаза поиска и предыдущее значение весового вектора  $w$ . Как только будет определено направление, при движении по которому улучшается эффективность, осуществляется переход к детерминированной фазе поиска. Скорость сходимости в исследуемом направлении возрастает из-за увеличения вдвое по сравнению с предыдущей фазой поиска шаговой постоянной. Значение приращения  $\Delta w$  весового вектора на каждом шаге удваивается до тех пор, пока улучшается эффективность. Как только значение критерия эффективности начинает уменьшаться, осуществляется переход к случайной фазе поиска, при котором приращение  $\Delta w$  адаптивного весового вектора будут значительно меньше, чем на предыдущем этапе, так как используется меньшее значение  $\sigma$ .

Из описания упрощенного варианта НУСП видно, что основное различие между ним и УСП заключается в способе осуществления случайной фазы поиска. Случайным является не только направление поиска (как в УСП), но также и размер шага, определяемый параметром  $\sigma$ , который, в свою очередь, зависит от полученного минимального значения критерия эффективности. Поэтому размер шага имеет тенденцию к уменьшению по мере увеличения эффективности. Замечания, относящиеся к алгоритму УСП, приведенные в предыдущем разделе, при минимальной шаговой постоянной  $\mu_0$  справедливы в статистическом смысле и для алгоритма НУСП. При  $\mathfrak{P} = \xi$  условия (9.49) также должны удовлетворяться, где теперь математическое ожидание изменения значения критерия эффективности, обусловленного приращением весового вектора, определяется выражением

$$E \{ \Delta \xi \} = \sigma^2 \text{tr} (R_{xx}). \quad (9.52)$$

Шум, неизбежно присутствующий при выполнении измерений критерия эффективности, может привести к обманчиво хорошим результатам в каком-либо из экспериментов, тем самым обуславливая риск направления поиска по ложному пути. Для того чтобы избежать этого, необходимо в течение случайной фазы алгоритма периодически перепроверять критерий эффективности в предполагаемых наи-

лучших направлениях. Кроме того, для обеспечения работоспособности алгоритма в нестационарных условиях необходимо периодически устанавливать большую шаговую постоянную и осуществлять проверочные приращения равномерно по всем направлениям в параметрическом пространстве.

В самом общем виде алгоритм НУСП обладает рядом свойств, которые здесь не будут моделироваться. Наиболее важным из таких свойств является возможность придания алгоритму «долговременной памяти» с помощью использования при определении направлений поиска неизотропной многомерной нормальной ФПВ [17], позволяющей осуществлять такое направление поиска, при котором бы вероятность улучшения эффективности на каждом последующем шаге возрастала. Эта многомерная ФПВ формируется в соответствии с результатами, полученными в течение начального этапа поиска, когда ни одному из направлений не отдается предпочтения. На следующем этапе многомерная ФПВ, полученная ранее, обеспечивает формирование новых направлений поиска. На завершающем этапе поиска размерность параметрического пространства может быть уменьшена при переходе от одновременного поиска по всем параметрам к почти последовательному поиску, при котором на каждом шаге учитывается лишь небольшое число параметров. Выбор для поиска такой части параметров производится случайным образом на каждой новой итерации.

#### 9.4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделировалась четырехэлементная антенная решетка, геометрические соотношения для которой и расположение источников сигнала и помех показаны на рис. 7.4. При использовании СКО в качестве критерия эффективности алгоритмы случайного поиска обладают гораздо меньшей скоростью сходимости, чем алгоритмы МСКО. Моделировались две помеховые ситуации, характеризующиеся наличием трех источников помех и следующими условиями: 1) умеренным разбросом собственных значений корреляционной матрицы  $R_{xx}$ , когда  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 153,1$  и 2) значительным разбросом собственных значений, когда  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ . Если выбрать энергетические отношения помехасобственный шум приемника равными  $J_1/n = 25$ ,  $J_2/n = 4$  и  $J_3/n = 20$ , а отношение сигнал-собственный шум приемника равным  $s/n = 10$ , то соответствующие собственные значения будут:  $\lambda_1 = 153,1$ ;  $\lambda_2 = 42,6$ ;  $\lambda_3 = 3,34$  и  $\lambda_4 = 1$ , для которых  $ОСШ_{\text{опт}} = 15,9$  (12 дБ). Типичные результаты, иллюстрирующие сходимость в случае, когда  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 153,1$ , приведены на рис. 9.5—9.8. Аналогично, если выбрать  $J_1/n = 500$ ,  $J_2/n = 40$  и  $J_3/n = 200$ , а отношение сигнал-собственный шум приемника  $s/n = 10$ , то соответствующие собственные значения будут:  $\lambda_1 = 2440$ ;  $\lambda_2 = 494$ ;  $\lambda_3 = 25,6$  и  $\lambda_4 = 1$ , для которых  $ОСШ_{\text{опт}} = 15,08$  (11,8 дБ). Типичные результаты, иллюстрирующие сходимость при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ , даны на рис. 9.9—9.12.

При моделировании алгоритма УСП было найдено, что для получения удовлетворительных результатов, блок-схема алгоритма подстройки весовых коэффициентов, показанная на рис. 9.1, должна быть

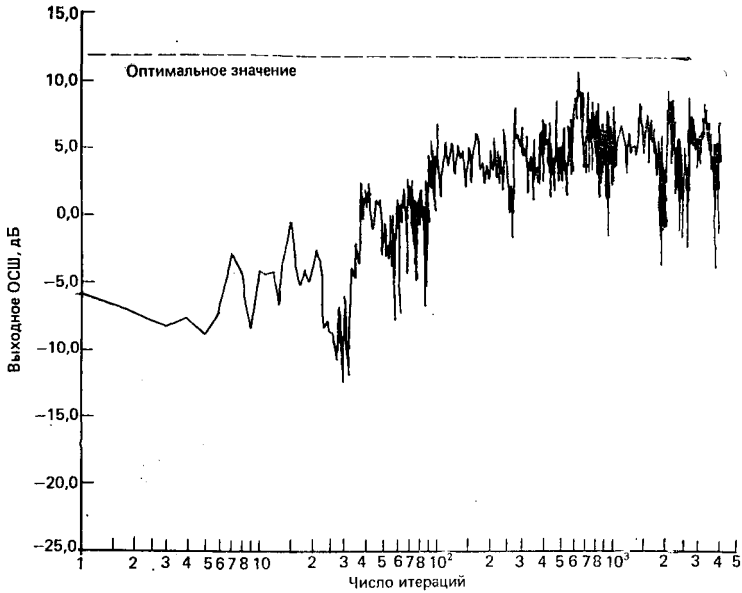


Рис. 9.5. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма ЛСП при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 153,1$

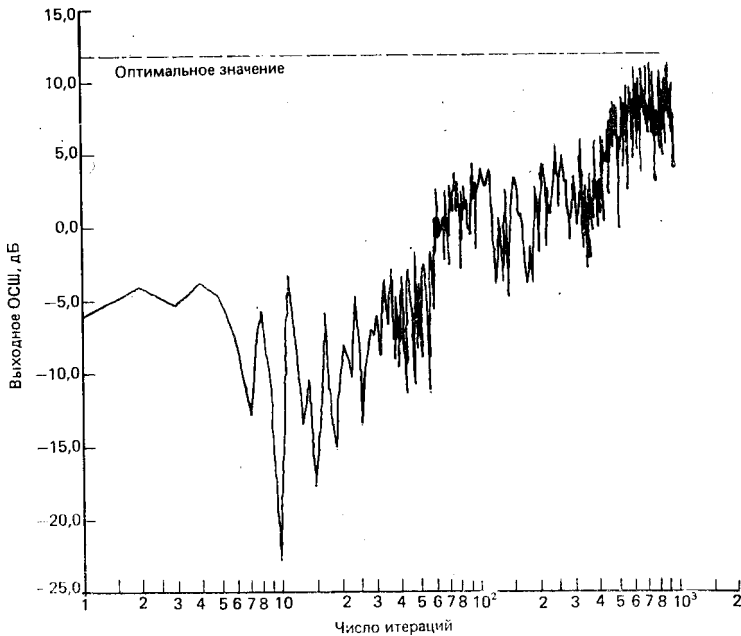


Рис. 9.6. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма УСП при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 153,1$

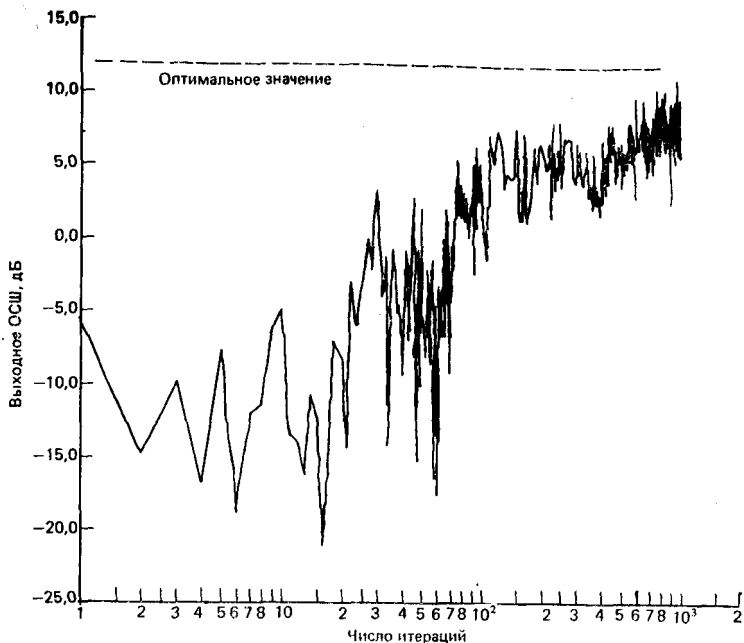


Рис. 9.7. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма НУСП при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 153,1$

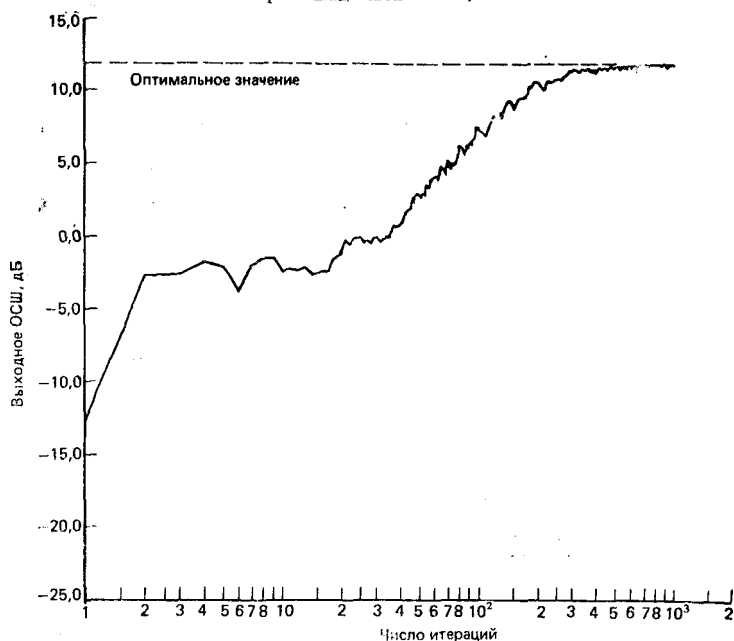


Рис. 9.8. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма МСКО при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 153,1$

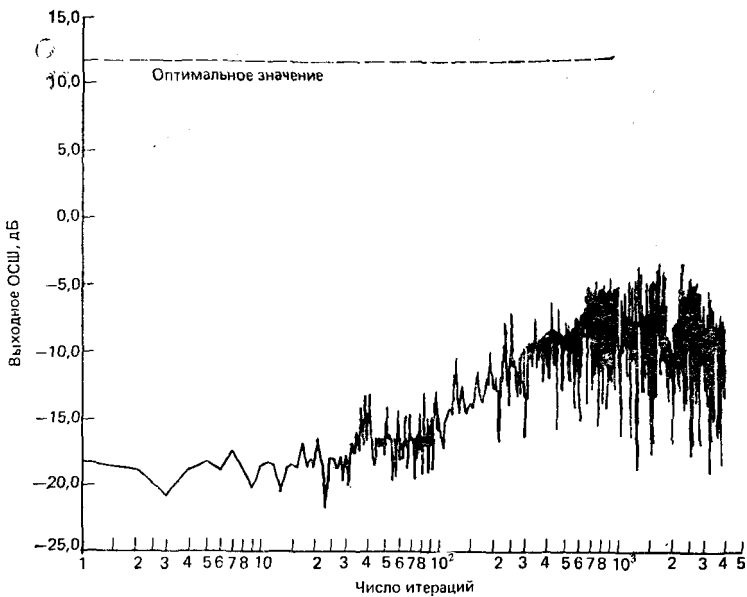


Рис. 9.9. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма ЛСП при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$

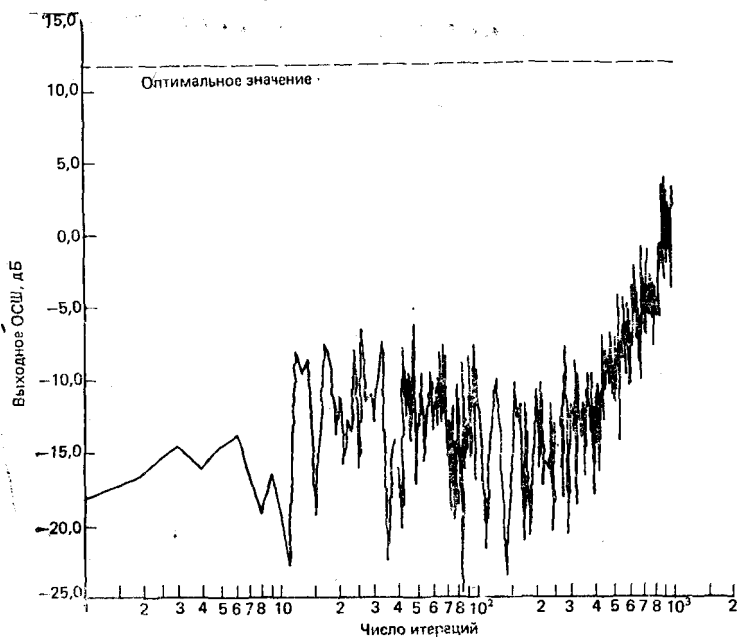


Рис. 9.10. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма УСП при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$

видоизменена. Сложность в использовании указанной схемы связана с тем фактом, что, чем больше величина  $w(k+1)$  отличается от  $w_{\text{опт}}$ , тем больше дисперсия оценки  $\widehat{\xi}[w(k+1)]$ . Поэтому, если шаговая постоянная  $\mu_0$  выбирается так, чтобы в установившемся режиме получалась приемлемая погрешность в окрестности  $w_{\text{опт}}$ , то может оказаться, что изменение  $\xi[w(k+1)]$  за счет приращения  $\Delta w(k+1)$  будет меньше случайных флуктуаций  $\widehat{\xi}[w(k+1)]$  в том случае, когда

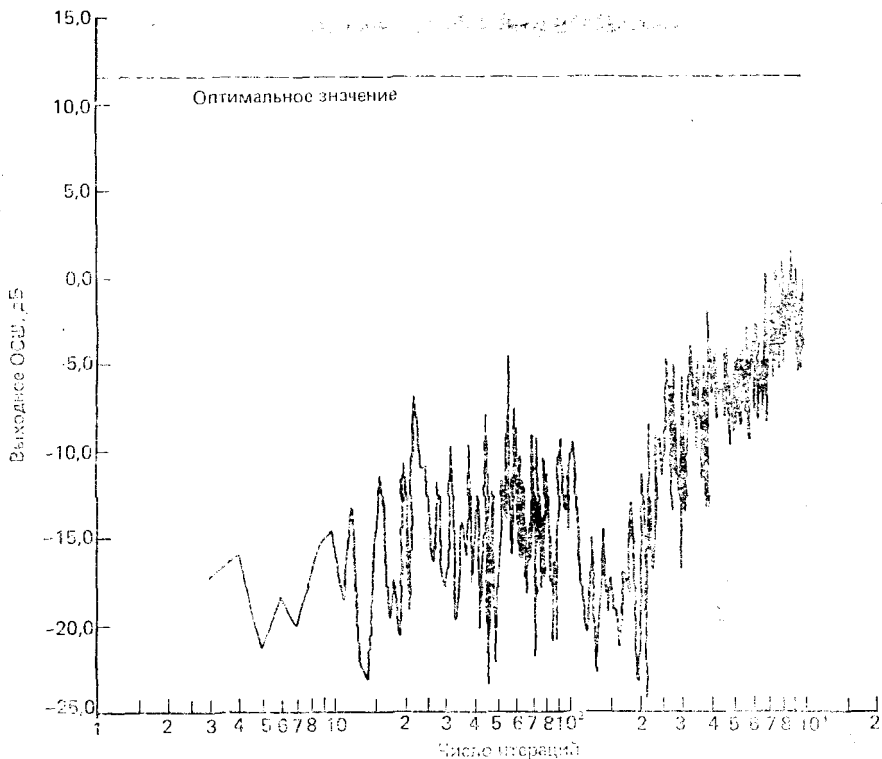


Рис. 9.11. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма НУСП при  $\lambda_{\text{max}}/\lambda_{\text{min}} = 2440$

$w(k+1)$  значительно отличается от  $w_{\text{опт}}$ . В этом случае согласно алгоритму подстройки будет вырабатываться последовательность весовых коэффициентов, «бесцельно» флуктуирующих около некоторого значения.

Для того чтобы исправить положение, необходимо прежде всего осознать, что значение шаговой постоянной  $\mu_0$  должно выбираться в соответствии с изменением дисперсии оценки  $\widehat{\xi}[w(k+1)]$  при значительном отличии  $w(k+1)$  от  $w_{\text{опт}}$ . Такая коррекция может быть выполнена с помощью выбора в алгоритме УСП шаговой постоянной  $\mu_s = \sqrt{K_1 + K_2 \Phi^*}$  так, как это делается в алгоритме НУСП

(рис. 9.4). Конечно, предпочтительнее было бы использование  $\mu_s = \sqrt{K_1 + K_2 (\mathfrak{P}^* - \mathfrak{P}_{\min})}$ , однако величина  $\mathfrak{P}_{\min}$  в общем случае неизвестна.

При моделировании алгоритмов ЛСП, УСП и НУСП критерием эффективности служила СКО. При получении оценки СКО выбира-

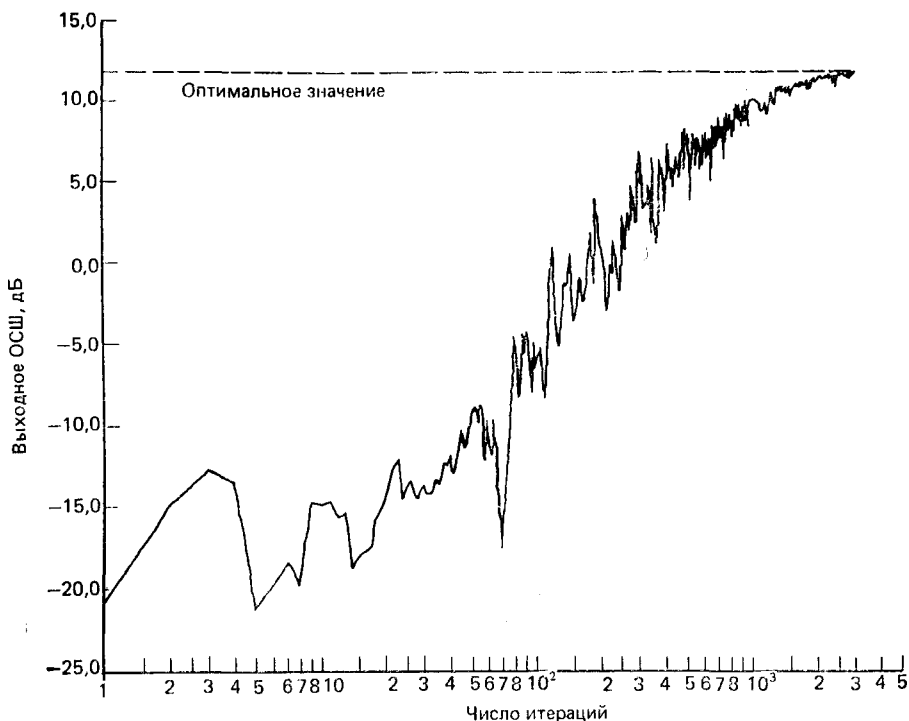


Рис. 9.12. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма МСКО при  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$

лось  $K = 90$ . При моделировании алгоритма НУСП для удовлетворения условий (9.49) использовалось соотношение

$$\sigma^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 \xi^*, \quad (9.53)$$

где  $\mathfrak{f}_1 = 1/160$  и  $\mathfrak{f}_2 = 0,1$ . Аналогично при моделировании алгоритма УСП использовалось соотношение

$$\mu_s^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 \xi^* \quad (9.54)$$

с теми же значениями  $\mathfrak{f}_1$  и  $\mathfrak{f}_2$ , что и в алгоритме НУСП. При моделировании алгоритма ЛСП за исходные принимались значения  $\mu_s = 1,6$  и  $\sigma^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = 0,05$ , приводящие к большей ошибке рассогласования, чем при алгоритмах УСП и НУСП. Для сравнения моделировался также алгоритм МСКО с шаговой постоянной, соответствующей  $\mu_s \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = 0,1$ . При этом принималась оценка градиента, полу-



ченная усреднением трех выборочных отсчетов  $e(k)x(k)$ , т. е.  $K = 3$  вместо обычно используемого  $K = 1$ . Во всех случаях начальный весовой вектор выбирался равным  $w^T(0) = [0, 1; 0; 0; 0]$ .

Результаты моделирования, приведенные на рис. 9.5—9.7, показывают, что после выполнения 800 итераций как при алгоритме УСП, так и при алгоритме НУСП достигается уровень, лежащий на 3 дБ ниже оптимального, в то время как при алгоритме ЛСП не достигается указанный уровень даже после выполнения 4000 итераций, хотя рассогласование при алгоритме ЛСП превышает рассогласование при алгоритмах УСП и НУСП. Эти результаты свидетельствуют о том, что алгоритмы УСП и НУСП характеризуются более благоприятным сочетанием степени рассогласования и скорости адаптации по сравнению с аналогичными параметрами алгоритма ЛСП. Как видно из результатов моделирования, показанных на рис. 9.8, при алгоритме МСКО в противоположность алгоритмам случайного поиска достигается уровень на 3 дБ ниже оптимального после выполнения только 150 итераций при небольшом рассогласовании. Такое существенное различие в скорости сходимости, обеспечиваемой алгоритмом МСКО и тремя алгоритмами случайного поиска, оказывается на самом деле еще более значительным, чем следует из сравнения только числа итераций, поскольку при выполнении алгоритмов случайного поиска на каждую итерацию требуется 90 выборочных отсчетов, а при выполнении алгоритма МСКО — только три. Поэтому временная шкала на рис. 9.5—9.7 в 30 раз больше соответствующей временной шкалы на рис. 9.8.

Результаты моделирования, представленные на рис. 9.9—9.12, полученные для случая  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ , подтверждают предыдущие результаты, характеризующие  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 153,1$ . Эти результаты также показывают, что характеристики алгоритмов случайного поиска, как и алгоритма МСКО, зависят от распределения собственных значений матрицы  $R_{xx}$ .

## 9.5. ВЫВОДЫ

Алгоритмы случайного поиска оказываются полезными для многомодальных критериев эффективности и при реализации требуют лишь оценки выбранного критерия эффективности. Вычисления, связанные с подстройкой весовых коэффициентов при выполнении алгоритмов ЛСП, УСП и НУСП, являются чрезвычайно простыми и легко выполнимыми на практике. В системах адаптивного управления и системах распознавания образов [12] применяются более совершенные и сложные алгоритмы случайного поиска, однако при этом сразу же теряется главное достоинство алгоритмов случайного поиска применительно к адаптивным антенным решеткам — их простота.

Простота вычислений и реализации алгоритмов случайного поиска достигается ценой более медленной сходимости к оптимальному весовому вектору. Следует отметить, что алгоритмы УСП и НУСП обладают более благоприятным сочетанием степени рассогласования и скорости сходимости, чем алгоритм ЛСП. Тем не менее при использовании алгоритма МСКО в случае унимодального критерия скорость сходимости

оказывается на порядок выше, чем при использовании алгоритмов случайного поиска. Рассмотренные здесь характеристики алгоритмов случайного поиска точно так же, как характеристики алгоритма МСКО, зависят от распределения собственных значений корреляционной матрицы входных сигналов. Наконец, отметим, что скорость сходимости всех рассмотренных алгоритмов случайного поиска уменьшается с ростом размерности параметрического пространства вследствие увеличения числа возможных направлений поиска. Отсюда следует, что на конечных этапах поиска полезно уменьшать размерность параметрического пространства. Заметим, что краткое обсуждение поисковых алгоритмов, приведенное в данной главе, является неполным и касается лишь алгоритмов, основанных на измерении только выходной мощности. В частности, следовало бы рассмотреть также методы «управляемого поиска», предложенного в [20], которые при определенных условиях обладают более высокой скоростью сходимости.

### ЗАДАЧИ

1. Сочетание уровня рассогласования и скорости сходимости для алгоритма ЛСП [12]. Считая все собственные значения корреляционной матрицы  $R_{xx}$  одинаковыми, так что  $(T_{p\text{еко}})_{\text{ср}} = T_{\text{еко}}$ , постройте зависимость  $T_{\text{еко}}$  от  $N$  для алгоритма ЛСП при  $(M_{\text{п}})_{\text{min}} = 10\%$  в формуле (9.43). Сравните полученную зависимость с аналогичными зависимостями для алгоритмов МСКО и ДНС из задачи 1 гл. 4.

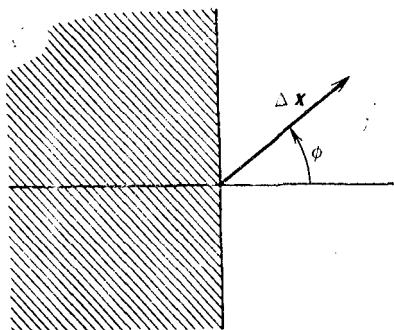


Рис. 9.13. Область параметрического пространства, вектор смещения  $\Delta x$  и угол  $\varphi$

2. Потери при простом случайном поиске с реверсивным шагом [18]. Рассмотрим алгоритм простого случайного поиска, описываемый уравнением

$$x(i+1) = x(i) + \Delta x(i+1),$$

где  $\Delta x$  — случайный вектор, удовлетворяющий условиям  $|\Delta x|^2 = 1$  и

$$\Delta x(i+1) = \begin{cases} \xi, & \text{если эффективность улучшается,} \\ -\Delta x(i), & \text{если эффективность не улучшается,} \end{cases}$$

где  $\xi$  — случайное направление вектора  $\Delta x$ .

А. Рассмотрим параметрическое пространство (рис. 9.13), в котором улучшение эффективности обеспечивается для любого угла из диапазона  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  и не происходит улучшения эффективности для углов из диапазона

$\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ . Среднее смещение в благоприятном направлении определяется формулой:

$$U(n) = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi p(\varphi) d\varphi,$$

где  $n$  — число степеней свободы;  $p(\varphi)$  — функция плотности вероятностей угла  $\varphi$  для равномерного распределения направлений случайного шага в  $n$ -мерном пространстве. Покажите, что

$$p(\varphi) = \frac{\sin^{n-2} \varphi}{2 \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \varphi d\varphi} = \frac{\Gamma(n-1)}{2^{n-2} \left[ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]^2} \sin^{n-2} \varphi,$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция.

*Указание.* Заметим, что площадь кольцевой области на поверхности  $n$ -мерной сферы «шириной»  $d\varphi = A_{n-2} \sin^{n-2} \varphi d\varphi$ . Поэтому площадь поверхности гиперсферы, ограниченной гиперконусом с вертикальным углом  $2\varphi$ , определяется выражением

$$S(\varphi) = A_{n-2} \int_0^{\varphi} \sin^{n-2} \varphi d\varphi.$$

Вероятность того, что случайный вектор лежит в этом конусе при равновероятном выборе случайного направления, равняется отношению «площадей»  $S(\varphi)$  и  $S(\pi)$ . Плотность распределения вероятностей  $p(\varphi)$  получается дифференцированием этого отношения по параметру  $\varphi$ .

Б. Покажите, что  $U(n)$ , приведенная в п. А, определяется выражением

$$U(n) = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin^{n-2} \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \varphi d\varphi} = \frac{\Gamma(n-1)}{2^{n-3} (n-1) \left[ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]^2}.$$

Поскольку для параметрического пространства, изображенного на рис. 9.13, вероятность успешного и неудачного шагов является одинаковой, то в среднем для одного успешного шага существует один неудачный и соответствующий реверсивный, т. е. всего три шага. Поэтому среднее смещение для одного успешного шага уменьшается на  $2/3$  и равняется только  $1/3 U(n)$ .

Потери поиска определяются как число требуемых шагов поиска, при котором векторная сумма этих шагов имеет такую же длину, как и при одном шаге в успешном направлении. Тогда средние потери поиска будут равны  $3/U(n)$ .

**3. Сравнение эффективности алгоритмов на основе функции потерь поиска [19].** Рассмотрим градиентный поиск с фиксированной шаговой постоянной, определяемый уравнением

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{x}(i) - a(i) \mu_s \frac{\Delta(i)}{|\Delta(i)|},$$

где  $\mu_s$  — шаговая постоянная;

$$\Delta(i) = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]_{\mathbf{x}(i)};$$

$$a(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } F[\mathbf{x}(i+1)] < F[\mathbf{x}(i)], \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$F[\cdot]$  — известный критерий эффективности. Рассмотрим также случайный поиск с фиксированной шаговой постоянной, описываемый уравнением

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{x}(i) - b(i) \Delta \mathbf{x}(i) + \Delta \mathbf{x}(i+1),$$

где  $\Delta x(i)$  — случайный вектор, имеющий равномерное распределение на гиперсфере радиуса  $\mu_s$  с центром в начале координат;

$$b(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } F[x(i)] \geq F[x(i-1)], \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим функцию потерь поиска следующим соотношением:

$$SL(x) \hat{=} \frac{F(x)}{\left( \frac{F(x) - F(x + \Delta x)}{N} \right)},$$

где  $F(x)$  — критерий эффективности;  $N$  — число измерений критерия эффективности на каждую итерацию.

А. Покажите, что для квадратичного критерия эффективности  $F(x) = \rho^2$  и градиентного поискового алгоритма

$$F(x + \Delta x) = \rho^2 - 2\rho\mu_s + \mu_s^2.$$

Б. Для того чтобы эмпирически оценить градиент  $\Delta$  в некоторой точке  $x$ , требуется оценка  $F[\cdot]$  в этой точке, а также в точках, расположенных на некотором расстоянии  $\epsilon$  от точки  $x$ , по направлениям каждой из координат. Таким образом общее число оценок функции  $F[\cdot]$  равно  $n + 1$  (где  $n$  — число степеней свободы). Покажите, что для градиентного поиска функция потерь определяется выражением

$$SL(x) = \rho^2(n + 1) / (2\rho\mu_s - \mu_s^2).$$

В. Для заданной точки  $x(i)$  следующая точка  $x(i + 1)$  при выполнении алгоритма случайного поиска определяет угол  $\varphi$  с линией, соединяющей  $x(i)$  с точкой экстремума критерия эффективности. В задаче 2 была получена функция плотности распределения вероятностей  $p(\varphi)$  для этого угла  $\varphi$ . Покажите, что при использовании случайного поиска математическое ожидание изменения эффективности определяется как

$$E\{-\Delta F\} = E\{\Delta\rho^2\} = \int_0^{\varphi_0} \Delta\rho^2 p(\varphi) d\varphi,$$

где

$$\varphi_0 = \arccos\left\{\frac{\mu_s}{2\rho}\right\}; \quad \Delta\rho^2 = 2\rho\mu_s \cos\varphi - \mu_s^2.$$

Г. Покажите, что для алгоритма случайного поиска функция потерь определяется выражением

$$SL(x) = \frac{2\rho^2 \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \varphi d\varphi}{\int_0^{\varphi_0} 2\mu_s \rho \cos \varphi \sin^{n-2} \varphi d\varphi - \int_0^{\varphi_0} \mu_s^2 \sin^{n-2} \varphi d\varphi}.$$

При заданных значениях  $\rho$ ,  $\mu_s$  и  $n$  можно сравнить функции потерь, приведенные в пп. Б и Г, для определения сравнительной эффективности алгоритмов градиентного и случайного поиска.

**4. Изменение функции потерь поиска при введении реверсивного шага [19].** Эффективность алгоритма случайного поиска с фиксированной шаговой постоянной (см. задачу 3) может быть значительно улучшена путем придания «реверсивного» свойства алгоритму случайного поиска. Алгоритм случайного поиска с реверсированием и фиксированной шаговой постоянной описывается уравнением

$$x(i + 1) = x(i) + c(i)\Delta x(i + 1) + 2[c(i) - 1]\Delta x(i),$$

где

$$c(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } F[\mathbf{x}(i)] \leq F[\mathbf{x}(i-1)], \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Такая модификация случайного поиска обеспечивает поиск в точке  $\mathbf{y} - \Delta\mathbf{y}$ , если начальный поиск в точке  $\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$  не давал улучшения эффективности.

А. Покажите, что

$$E\{-\Delta F\} = E\{\Delta\rho^2\} = \frac{3 \int_0^{\varphi_0} \Delta\rho^2 \sin^{n-2} \varphi d\varphi}{2 \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \varphi d\varphi},$$

где

$$\varphi_0 = \arccos\left\{\frac{\mu_s}{2}\right\};$$

$$\Delta\rho^2 = 2\rho\mu_s \cos \varphi - \mu_s^2.$$

Б. Покажите, что

$$SL(\mathbf{x}) = \frac{4\mu_s^2 \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \varphi d\varphi}{\int_0^{\varphi_0} 6\mu_s \rho \cos \varphi \sin^{n-2} \varphi d\varphi - \int_0^{\varphi_0} 3\mu_s^2 \sin^{n-2} \varphi d\varphi}.$$

Эту функцию потерь можно сравнить с аналогичной функцией, найденной в п. Г задачи 3, для конкретных значений  $\rho$ ,  $\mu_s$  и  $n$  и точно определить улучшение эффективности, получаемое в результате придания алгоритму реверсивного свойства.

## Глава 10. СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ

В гл. 4—9 были рассмотрены параметры переходных процессов и особенности реализации различных классов адаптивных алгоритмов, наиболее широко используемых при применении адаптивных антенных решеток. Прежде чем приступить к обсуждению некоторых практических задач, связанных с разработкой системы с адаптивной антенной решеткой, целесообразно дать сводку основных характеристик каждого класса алгоритмов.

В каждой главе второй части книги анализировался алгоритм (реализующий определенный подход к процессу адаптации), который сравнивался с алгоритмом МСКО по скорости сходимости. Сравнить переходные процессы различных алгоритмов по их скорости сходимости удобно на конкретном примере. Поскольку сочетание степени рассогласования и скорости адаптации для алгоритмов случайного поиска (ЛСП, УСП и НУСП, гл. 9) и для алгоритма ДНС (гл. 4) является неблагоприятным по сравнению с таким сочетанием для алгоритма МСКО, обращаться к алгоритмам случайного поиска и ДНС целесообразно

только тогда, когда основным преимуществом считается простота аппаратной реализации алгоритмов или когда график критерия эффективности оказывается неунимодальным. К тому же алгоритм Хауэлса-Апельбаума, максимизирующий ОСШ, по рассогласованию и скорости сходимости аналогичен алгоритму МСКО. Поэтому при сравнении внимание будет обращено лишь на следующие адаптивные алгоритмы:

1. Алгоритм минимальной средней квадратической ошибки — МСКО (разд. 4.2).

2. Ускоренный градиентный алгоритм Пауэлла — УГП (разд. 4.4.1).

3. Алгоритм, основанный на непосредственном обращении матрицы — НОМ (вариант (6.24) из разд. 6.1.2).

4. Рекуррентный алгоритм — РА (разд. 7.5).

5. Алгоритм на основе каскадного предпроцессора, осуществляющий ортогонализацию согласно методу Грама — Шмидта — ПГШ (разд. 8.3).

При сравнении предполагалось, что начальные условия для всех алгоритмов были одинаковыми и определялись одним и тем же исходным весовым вектором  $w^T(0) = [0, 1; 0; 0; 0]$ . Вычисления производились для помеховой ситуации и геометрии антенной решетки, представленных на рис. 4.19, а условия приема сигнала соответствовали разбросу собственных значений корреляционной матрицы  $R_{xx}$ , характеризующему  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ . Результаты сходимости для каждого алгоритма представлены зависимостями выходного ОСШ от числа итераций и показаны на рис. 10.1—10.5, где также даны соответствующие параметры алгоритмов. Приведенные на рисунках данные получены в результате усреднения 10 реализаций выходного ОСШ для каждого алгоритма адаптации.

Результаты, представленные на рис. 10.1—10.5, показывают, что для достижения уровня на 3 дБ ниже оптимального ОСШ потребуется: для алгоритма МСКО около 1750 выборочных отсчетов; для алгоритма УГП — 110 итераций (990 выборочных отсчетов); для алгоритмов НОМ и РА — 8 выборочных отсчетов и для алгоритма ПГШ — 40 итераций (120 выборочных отсчетов). Параметры алгоритмов МСКО, УГП и ПГШ выбирались так, чтобы степени рассогласования в установившемся режиме были примерно одинаковыми. Рассогласование для алгоритмов НОМ и РА уменьшается с ростом числа итераций и не может быть изменено за счет подбора параметров алгоритмов. Эти данные показывают, что алгоритмы НОМ и РА обеспечивают наилучшее сочетание уровня рассогласования и скорости адаптации, за ними следуют алгоритмы ПГШ, УГП и МСКО при не слишком большом отношении  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2440$ .

Сводка основных характеристик алгоритмов адаптации, рассмотренных во второй части книги, приведена в табл. 10.1.

Алгоритмы, пригодные для наиболее простой технической реализации (когда применяется прямое измерение выбранного критерия эффективности), как правило, требуют большего времени для достижения заданного рассогласования в установившемся режиме. Если предположить, что при аппаратной реализации допускается использование

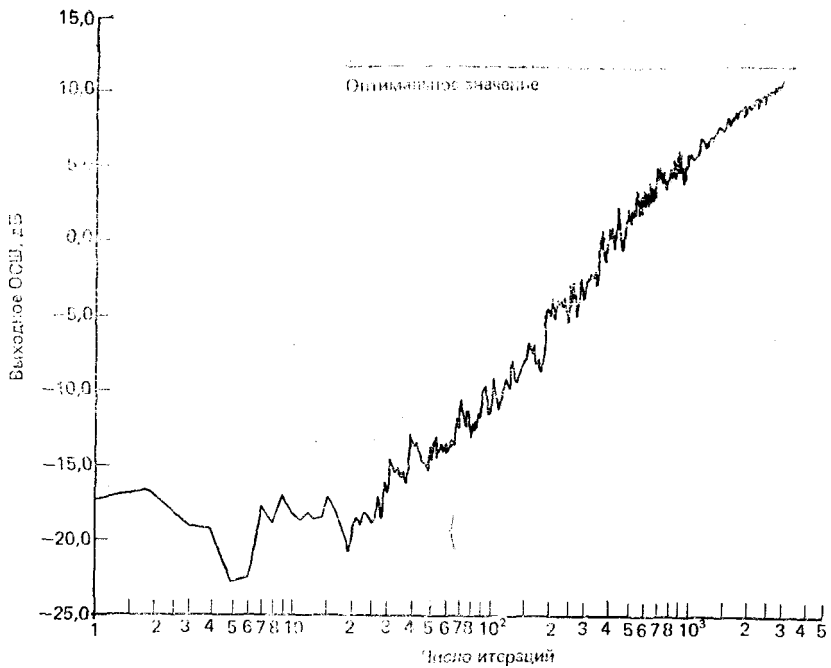


Рис 10.1. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма МСКО при  $\alpha_L=0,1$

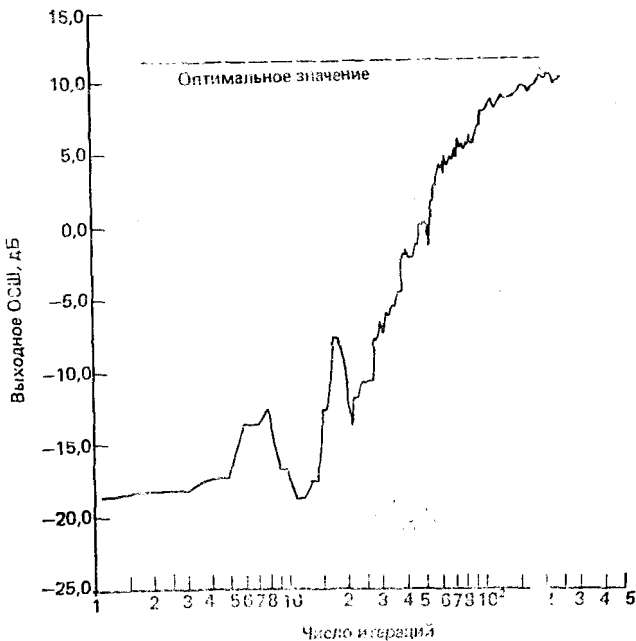


Рис. 10.2. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма УГП при  $K=9$

Алгоритм	МСКО	МСШ	УСП	ДНС
Метод, лежащий в основе алгоритма	Наискорейшего спуска	Аналогичный МСКО	Сопряженных градиентов	Возмущений
Характеристики переходного процесса	Сочетание степени рассогласования и скорости адаптации приемлемо для многих приложений	Примерно такие, как у МСКО	Более благоприятное сочетание степени рассогласования и скорости адаптации, чем у МСКО	Менее благоприятное сочетание уровня рассогласования и скорости адаптации, чем у МСКО
Достоинства	Простота реализации, при которой требуется $N$ корреляторов и интеграторов. Устойчив к погрешностям аппаратуры	Те же, что и у МСКО	Меньшая, чем у МСКО, зависимость скорости адаптации от распределения собственных значений матрицы $R_{xx}$ . Быстрая адаптация при небольшом числе степеней свободы	Простота реализации, связанная с непосредственным измерением критерия эффективности
Недостатки	Скорость адаптации зависит от распределения собственных значений матрицы $R_{xx}$	Те же, что и у МСКО	Относительная сложность реализации. Требуются параллельно работающие процессоры. Скорость адаптации зависит от числа степеней свободы	Скорость адаптации зависит от распределения собственных значений матрицы $R_{xx}$ . Скорость адаптации сравнима со скоростью УСП
Рассмотрены в главах	4	5	4	4



НОМ	РА	ПГШ	СП
<p>Прямой оценки ковариационной матрицы (без ОС)</p> <p>Достигается наибольшая скорость адаптации и наиболее благоприятное сочетание степени рассогласования и скорости адаптации</p> <p>Очень высокая скорость адаптации <b>независимо</b> от распределения собственных значений матрицы <math>R_{xx}</math></p> <p>При реализации требуется <math>N(N+1)/2</math> корреляторов. Обращение матрицы требует выполнения <math>N^3/2 + N^2</math> комплексных умножений</p> <p style="text-align: center;">6</p>	<p>Аналогичный калмановской фильтрации (с ОС)</p> <p>Такие же, как у НОМ</p> <p>Те же, что и у НОМ. Возможность применения различных способов обработки</p> <p>При реализации требуется <math>N(N+1)/2</math> корреляторов и большой объем вычислений</p> <p style="text-align: center;">7</p>	<p>Ортогонализации входных сигналов</p> <p>Более благоприятное сочетание степени рассогласования и скорости адаптации, чем у УГП. Скорость адаптации приближается к скорости НОМ</p> <p>Меньшая, чем у МСКО, зависимость скорости адаптации от распределения собственных значений матрицы <math>R_{xx}</math>. Устойчив к погрешностям аппаратуры</p> <p>При реализации требуется большое количество аппаратуры: <math>N(N+1)/2</math> адаптивных цепей управления</p> <p style="text-align: center;">8</p>	<p>Проб и ошибок</p> <p>Менее благоприятное сочетание степени рассогласования и скорости адаптации, чем у МСКО. Использование УСП увеличивает скорость адаптации</p> <p>Применим при любом непосредственно измеряемом критерии эффективности. Простота аппаратурной реализации при невысоких требованиях к точности вычислений</p> <p>Скорость адаптации зависит от распределения собственных значений матрицы <math>R_{xx}</math> и является самой низкой по сравнению со скоростью других алгоритмов</p> <p style="text-align: center;">9</p>

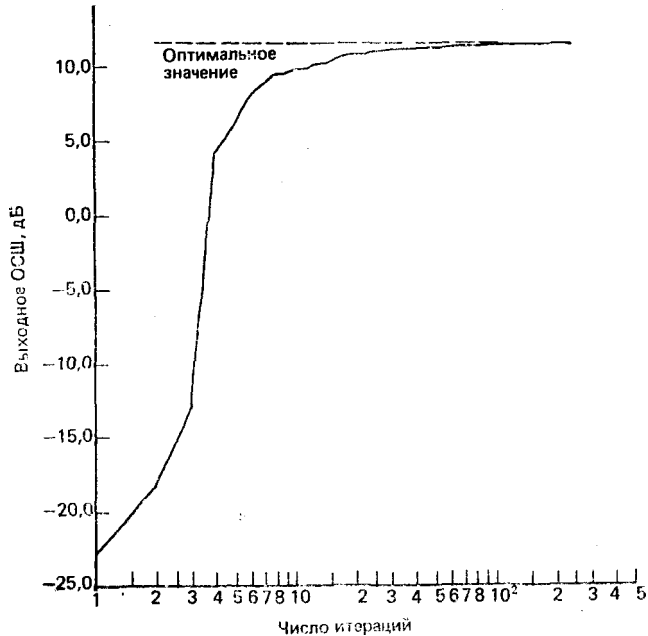


Рис. 10.3. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма НОМ

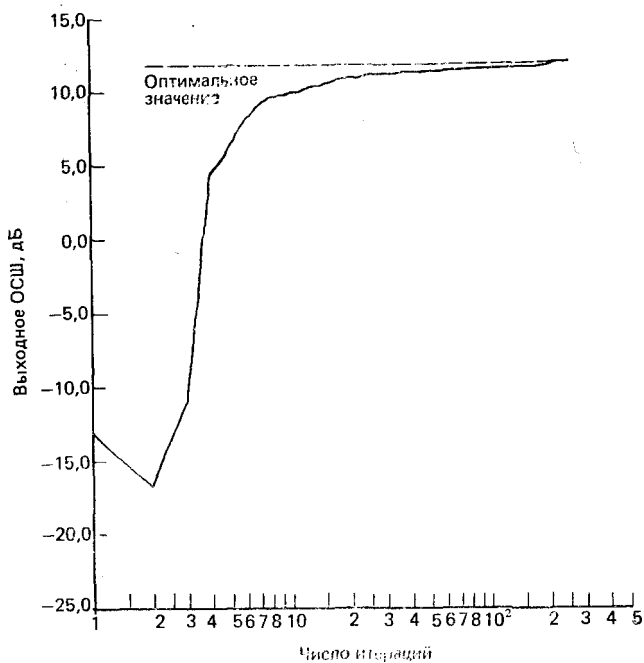


Рис. 10.4. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для рекуррентного алгоритма при  $\alpha=1$  и  $P(0)=1$

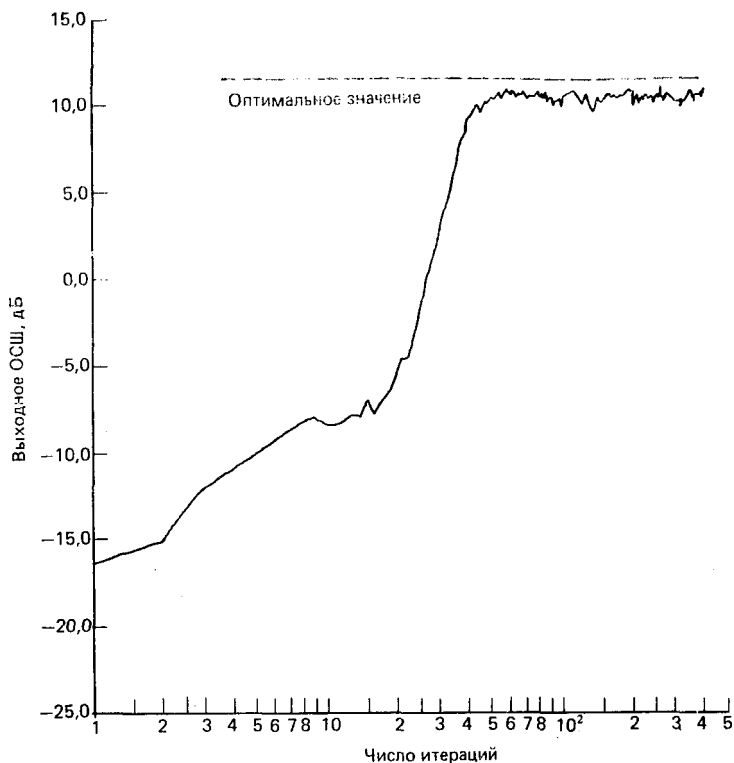


Рис. 10.5. Зависимость выходного ОСШ от числа итераций для алгоритма ПГШ при  $\alpha_L = 0,1$  и  $K = 3$

коррелятора в цепи управления каждым элементом антенной решетки, то можно достичь более благоприятного сочетания степени рассогласования и скорости сходимости при использовании алгоритмов МСКО и Хауэлса — Аппельбаума. Дальнейшее улучшение сочетания указанных характеристик может быть получено только при дополнительном усложнении аппаратуры и (или) увеличении производительности вычислительной системы. (Такое усложнение обычно требуется при больших отношениях  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ .) С развитием цифровой техники появляется возможность реализации более сложных алгоритмов, требующих большого объема вычислений. При этом может быть достигнута более высокая эффективность систем обработки сигналов, а в отдельных случаях могут быть улучшены даже экономические показатели.

## Часть III

# КОМПЕНСАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК. НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

## Глава 11. КОМПЕНСАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

Для обработки узкополосных сигналов в каждом канале адаптивной антенной решетки достаточно лишь одного подстраиваемого комплексного весового коэффициента. Однако обработка широкополосных сигналов потребует применения многоотводных линий задержки (трансверсальных фильтров) в каждом канале для выполнения частотно-зависимой подстройки амплитуды и фазы. До сих пор при анализе предполагалось, что каждый канал содержит одинаковые устройства с одинаковыми характеристиками. На практике характеристики отдельных каналов несколько отличаются, что приводит к «межканальному рассогласованию». При этом из-за существенного различия частотных характеристик каналов, если не принять специальных мер для их компенсации, может значительно ухудшиться эффективность антенной решетки. В этой главе рассматриваются методы компенсации рассогласования частотных характеристик при обработке сигналов на основе многоотводных линий задержки (ЛЗ). Такая компенсация имеет важное значение при обработке широкополосных сигналов.

При разработке процессора широкополосных сигналов на базе многоотводной ЛЗ для компенсации межканального рассогласования, а также эффектов многолучевого распространения и задержки распространения по раскрытию решетки необходимо определять требуемое число отводов ЛЗ. Поскольку каждый дополнительный отвод ЛЗ (и связанный с ним элемент подстройки весового коэффициента) увеличивает стоимость и сложность системы, то вопрос выбора необходимого числа отводов линии имеет важное практическое значение.

### 11.1. СООБРАЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ШИРОКОПОЛОСНОЙ ОБРАБОТКОЙ СИГНАЛОВ

Поскольку имеется возможность управления частотными характеристиками фильтров на базе многоотводных ЛЗ, то при их использовании в принципе можно добиться более эффективной обработки широкополосных сигналов в адаптивных антенных решетках, чем при других методах. Анализируя зависимость эффективности адаптивной антен-

ной решетки от числа отводов ЛЗ, задержки сигнала между отводами и общей задержки сигнала в каждом канале, можно определить минимальное число отводов, необходимое для получения удовлетворительной эффективности в заданной полосе частот.

Приводимые здесь соображения относительно широкополосной обработки сигналов основываются на исследованиях, представленных в работах [1—3]. В данной главе определяются идеальные (неискажающие) частотные характеристики канала, анализируется эффективность адаптивных процессоров при использовании обработки сигналов с разложением на квадратурные составляющие и обработки на базе ЛЗ с двумя, тремя и пятью отводами и обсуждаются полученные результаты.

### 11.1.1. Идеальные частотные характеристики канала

Рассмотрим двухэлементную антенную решетку, показанную на рис. 11.1, на вход которой поступают полезный сигнал и помеха. Приемные каналы антенной решетки характеризуются частотными характеристиками  $H_1(\omega)$  и  $H_2(\omega)$ . Пусть полезный сигнал поступает на антенную решетку под углом  $\theta_s$  относительно нормали к ее раскрытию. Кроме того, предположим, что элементы решетки являются ненаправленными и расположены на расстоянии  $d = \lambda_0/2 = \pi v/\omega_0$ , где  $\omega_0$  — частота несущей и  $v$  — скорость распространения волнового фронта.

Результирующая частотная характеристика антенной решетки для полезного сигнала будет определяться выражением

$$H_d(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) \exp\left(-j \frac{\omega d}{v} \sin \theta_s\right), \quad (11.1)$$

аналогично для помехи

$$H_I(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) \exp\left(-j \frac{\omega d}{v} \sin \theta_i\right). \quad (11.2)$$

Потребуем теперь, чтобы

$$H_d(\omega) = \exp(-j\omega T_1), \quad (11.3)$$

$$H_I(\omega) = 0. \quad (11.4)$$

При выборе  $H_d(\omega)$  в соответствии с (11.3) прохождение полезного сигнала через антенную решетку обусловит его запаздывание на время  $T_1$ , однако в других отношениях сигнал останется неискаженным. Обеспечение

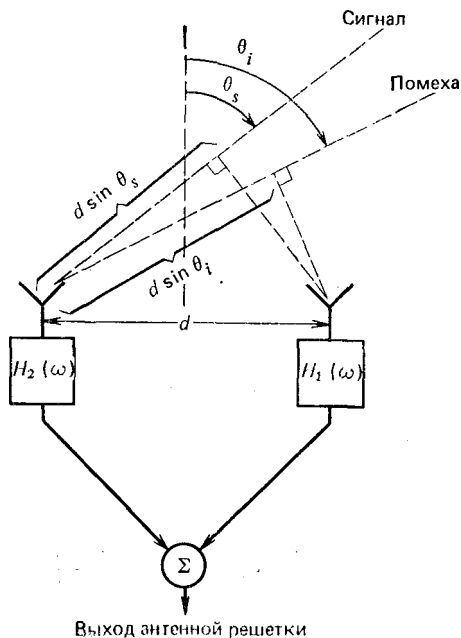


Рис. 11.1. Двухэлементная антенная решетка

$H_I(\omega) = 0$  приведет к полному подавлению помехи на выходе решетки. Для определения условий, при которых  $H_1(\omega)$  и  $H_2(\omega)$  удовлетворяют (11.3) и (11.4), решим эти уравнения относительно  $H_1(\omega)$  и  $H_2(\omega)$ . Положив

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= |H_1(\omega)| \exp [j\alpha_1(\omega)], \\ H_2(\omega) &= |H_2(\omega)| \exp [j\alpha_2(\omega)], \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} |H_1(\omega)| \exp [j\alpha_1(\omega)] + |H_2(\omega)| \exp \left\{ j \left[ \alpha_2(\omega) - \frac{\pi\omega}{\omega_0} \sin \theta_s \right] \right\} = \\ = \exp (-j\omega T_1), \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$|H_1(\omega)| \exp [j\alpha_1(\omega)] + |H_2(\omega)| \exp \left\{ j \left[ \alpha_2(\omega) - \frac{\pi\omega}{\omega_0} \sin \theta_i \right] \right\} = 0. \quad (11.6)$$

Из (11.5) и (11.6) следует (как показано в разд. «Задачи» в конце главы), что соотношения (11.3) и (11.4) будут выполняться при условиях

$$H_1(\omega) = H_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \left( 1 - \cos \left[ \frac{\pi\omega}{\omega_0} (\sin \theta_i - \sin \theta_s) \right] \right)}}, \quad (11.7)$$

$$\alpha_2(\omega) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) [\sin \theta_s + \sin \theta_i] \mp n \frac{\pi}{2} - \omega T_1; \quad (11.8)$$

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) [\sin \theta_s - \sin \theta_i] \pm n \frac{\pi}{2} - \omega T_1, \quad (11.9)$$

где  $n$  — любое нечетное целое число.

Из анализа (11.7) следует, что идеальные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) должны быть одинаковыми и частотно-зависимыми. Согласно (11.8) и (11.9) фазочастотные характеристики (ФЧХ) каждого канала должны быть линейными функциями частоты, угол наклона которых относительно оси частот зависит от направления прихода (или, что эквивалентно, от времени задержки) полезного сигнала.

Целесообразно АЧХ, определяемые (11.7), изобразить графически для различных углов прихода полезного сигнала и помехи. На рис. 11.2 приведены АЧХ для двух углов прихода полезного сигнала  $\theta_s = 0$  и  $80^\circ$  (угол прихода помехи в обоих случаях  $\theta_i = 90^\circ$ ). Из рис. 11.2 видно, что при  $\theta_s = 0$  и  $\theta_i = 90^\circ$  модуль идеальной АЧХ имеет практически постоянное значение в пределах относительной ширины полосы, равной 40%. Анализ выражения (11.7) показывает, что при  $-1 < (\sin \theta_i - \sin \theta_s) < 1$  АЧХ будет фактически плоской в пределах указанной относительной полосы частот. Однако если источники как полезного сигнала, так и помехи располагаются под значительным углом ( $\theta_s = 80^\circ$  и  $\theta_i = 90^\circ$ ) относительно нормали к раскрытию антенной решетки, то форма АЧХ отличается от плоской.

Степень отличия формы АЧХ от плоской зависит от углового положения источника сигнала относительно диаграммы направленности решетки. В общем случае, когда фазы  $H_1(\omega)$  и  $H_2(\omega)$  установлены так,

чтобы обеспечивалось максимальное значение неискаженного полезного сигнала на выходе, в результирующей диаграмме направленности антенной решетки будут появляться нули. Идеальная АЧХ будет максимально приближаться к плоской тогда, когда помеха попадает в один из этих нулей диаграммы.

Из выражения (11.7), кроме того, видно, что при

$$(\omega/\omega_0) \pi (\sin \theta_i - \sin \theta_s) = n2\pi,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

амплитуда идеальных АЧХ становится бесконечной. Случай  $n = 0$  соответствует поступлению полезного сигнала и помехи точно с одного и того же направления, поэтому неудивительно, что оказывается «трудно» обеспечить прием одного сигнала при одновременном подавлении другого. Другие случаи, соответствующие  $n = 1, 2, \dots$ , имеют место при поступлении полезного сигнала и помехи с различных направлений, когда фазовые сдвиги принимаемых сигналов между элементами решетки отличаются на величину, кратную  $2\pi$  на некоторой частоте  $\omega$ .

Как отмечалось, ФЧХ  $\alpha_1(\omega)$  и  $\alpha_2(\omega)$ , определяемые (11.8) и (11.9), имеют линейную зависимость от частоты. При  $T_1 = 0$  угол наклона фазовой характеристики  $\alpha_1(\omega)$  относительно оси частот для фильтра с  $H_1(\omega)$  пропорционален  $(\sin \theta_s - \sin \theta_i)$ , тогда как для фильтра с  $H_2(\omega)$  угол наклона характеристики  $\alpha_2(\omega)$  будет пропорционален  $\sin \theta_i + \sin \theta_s$ . Следовательно, при  $\theta_s = 0$   $\alpha_1(\omega) = -\alpha_2(\omega)$ . Кроме того, разность между  $\alpha_1(\omega)$  и  $\alpha_2(\omega)$  также оказывается линейной функцией частоты, что и следовало ожидать, поскольку такая зависимость позволяет скомпенсировать межэлементный фазовый сдвиг (который также линейно зависит от частоты).

### 11.1.2. Использование многоотводных ЛЗ и разложение сигналов на квадратурные составляющие

Рассмотрим двухэлементную адаптивную антенную решетку, в которой для подстройки весовых коэффициентов используется алгоритм МСКО. Если  $\mathbf{w}$  — вектор-столбец весовых коэффициентов,  $\mathbf{R}_{xx}$  — корреляционная матрица входных сигналов и  $\mathbf{r}_{xd}$  — вектор взаимной корреляции принятого сигнального вектора  $\mathbf{x}(t)$  и опорного сигнала  $d(t)$ , то, как показано в гл. 3, оптимальный весовой вектор, минимизи-

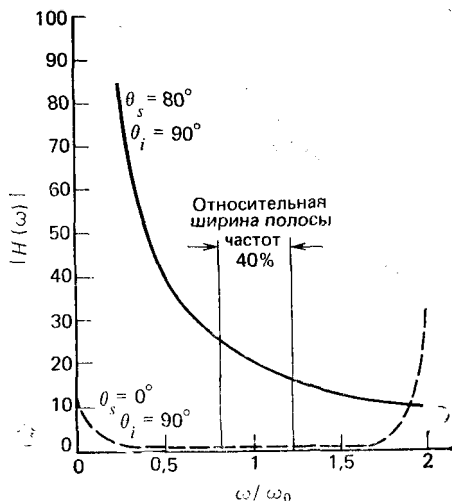


Рис. 11.2. Идеальная АЧХ при  $d = \lambda_0/2$  [2]

рующий  $E\{\varepsilon^2(t)\}$  (где  $\varepsilon(t) = a(t)$  — выходной сигнал решетки), определяется выражением

$$w_{\text{онт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}. \quad (11.10)$$

Если сигнал на выходе каждого элемента решетки состоит из взаимно независимых составляющих полезного сигнала, помехи и собственного шума приемника (все с нулевым средним), то матрица  $\mathbf{R}_{xx}$  представляется собой сумму корреляционных матриц указанных составляющих.

Рассмотрим адаптивный процессор на основе многоотводной ЛЗ с использованием действительных (а не комплексных) весовых коэффициентов, показанный на рис. 11.3. Поскольку каждый из сигналов  $x_i(t)$  представляет собой просто задержанный вариант сигнала  $x_1(t)$ , то можно записать, что

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t - \Delta), \\ x_3(t) &= x_1(t - 2\Delta), \\ &\vdots \\ x_L(t) &= x_1[t - (L - 1)\Delta]. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Поскольку элементы матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$  по определению равны

$$r_{x_i x_j} \triangleq E\{x_i(t) x_j(t)\}, \quad (11.12)$$

то из (11.11) следует, что

$$r_{x_i x_j} = r_{x_1 x_1}(\tau_{ij}), \quad (11.13)$$

где  $r_{x_1 x_1}(\tau_{ij})$  — корреляционная функция сигнала  $x_1(t)$ , а  $\tau_{ij}$  — время задержки  $x_i(t)$  относительно  $x_j(t)$ . Кроме того,  $r_{x_1 x_1}(\tau_{ij})$  представляет собой сумму трех корреляционных функций: полезного сигнала, помехи и собственного шума приемника, т. е.

$$r_{x_1 x_1}(\tau_{ij}) = r_{dd}(\tau_{ij}) + r_{ll}(\tau_{ij}) + r_{nn}(\tau_{ij}). \quad (11.14)$$

Для тех элементов матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$ , которые соответствуют сигналам  $x_i(t)$  и  $x_j(t)$  на выходе различных элементов решетки,  $r_{x_i x_j}$  состоит из суммы корреляционных функций только полезного сигнала и помехи (с соответствующими временами задержки), так как собственный шум приемника различных элементов решетки не коррелирован. Поэтому

$$r_{x_i x_j}(\tau_{ij}) = r_{dd}(\tau_{d_{ij}}) + r_{ll}(\tau_{l_{ij}}), \quad (11.15)$$

где  $\tau_{d_{ij}}$  — время задержки  $x_i(t)$  относительно  $x_j(t)$  для полезного сигнала;  $\tau_{l_{ij}}$  — время запаздывания  $x_i(t)$  относительно  $x_j(t)$  для помехи (указанные времена в общем случае будут отличаться вследствие различий в угловых координатах этих двух источников). Только в том случае, когда  $x_i(t)$  и  $x_j(t)$  формируются одним и тем же элементом антенной решетки, имеем равенство  $\tau_{d_{ij}} = \tau_{l_{ij}}$  (это время можно обозначить как  $\tau_{ij}$ ).

Рассмотрим теперь процессор антенной решетки с разложением сигналов ее элементов на квадратурные составляющие, показанный на



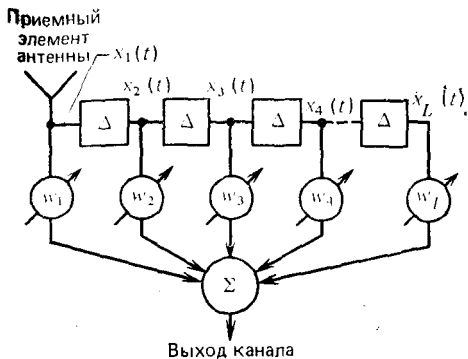


Рис. 11.3. Структурная схема процессора на основе многоотводной ЛЗ с действительными весовыми коэффициентами

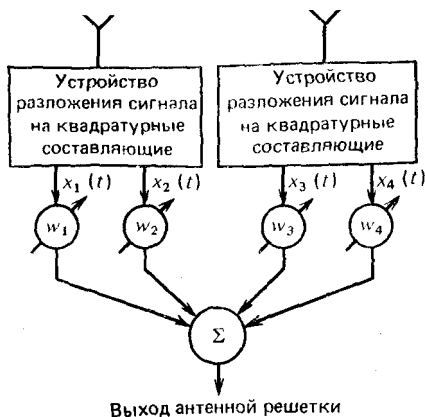


Рис. 11.4. Структурная схема устройства обработки сигналов двухэлементной антенной решеткой с использованием разложения на квадратурные составляющие

рис. 11.4. Пусть через  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$  обозначены синфазные, а через  $x_2(t)$  и  $x_4(t)$  — квадратурные составляющие сигналов на выходах соответствующих элементов решетки. Тогда эти синфазные и квадратурные составляющие будут связаны между собой следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \check{x}_1(t), \\ x_4(t) &= \check{x}_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

Символ  $\check{\phantom{x}}$  обозначает преобразование Гильберта:

$$\check{x}(t) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (11.17)$$

а интеграл в правой части понимается как главное значение в смысле Коши. Элементы корреляционной матрицы

$$r_{x_i x_j} = E \{x_i(t) x_j(t)\} \quad (11.18)$$

могут быть получены с помощью преобразования Гильберта [4, 7]:

$$E \{\check{x}(t) \check{y}(s)\} = E \{x(t) y(s)\}, \quad (11.19)$$

$$E \{\check{x}(t) y(s)\} = -E \{x(t) \check{y}(s)\}, \quad (11.20)$$

так что

$$E \{\check{x}(t) x(t)\} = 0, \quad (11.21)$$

$$E \{x(t) \check{y}(s)\} = \check{E} \{x(t) y(s)\}, \quad (11.22)$$

где  $\check{E} \{x(t) y(s)\}$  — преобразование Гильберта функции  $r_{xy}(\tau)$ ,  $\tau = s - t$ . С учетом приведенных соотношений и (11.16) получим

$$r_{x_1 x_1} = E \{x_1(t) x_1(t)\} = r_{x_1 x_1}(0), \quad (11.23)$$

$$r_{x_1 x_2} = E \{x_1(t) x_2(t)\} = E \{x_1(t) \check{x}_1(t)\} = 0, \quad (11.24)$$

$$r_{x_2 x_2} = E \{x_2(t) x_2(t)\} = E \{\check{x}_1(t) \check{x}_1(t)\} = E \{x_1(t) x_1(t)\} = r_{x_1 x_1}(0), \quad (11.25)$$

где  $r_{x_1 x_1}(\tau)$  — корреляционная функция сигнала  $x_1(t)$ , определяемая выражением (11.14).

Когда рассматриваются сигналы двух различных элементов антенной решетки (как, например,  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$ ), то

$$E \{x_1(t) x_3(t)\} = r_{dd}(\tau_{d_{13}}) + r_{II}(\tau_{I_{13}}), \quad (11.26)$$

где  $\tau_{d_{13}}$  и  $\tau_{I_{13}}$  — времена, обусловленные пространственным разнесением элементов решетки, схема которой изображена на рис. 11.4, для полезного сигнала и помехи соответственно. Аналогичным образом

$$\begin{aligned} E \{x_1(t) x_4(t)\} &= E \{x_1(t) \check{x}_3(t)\} = \check{E} \{x_1(t) x_3(t)\} = \\ &= \check{r}_{dd}(\tau_{d_{13}}) + \check{r}_{II}(\tau_{I_{13}}), \end{aligned} \quad (11.27)$$

$$\begin{aligned} E \{x_2(t) x_3(t)\} &= E \{\check{x}_1(t) x_3(t)\} = -E \{\check{x}_1(t) x_3(t)\} = \\ &= -\check{E} \{x_1(t) x_3(t)\} = -\check{r}_{dd}(\tau_{d_{13}}) - \check{r}_{II}(\tau_{I_{13}}), \end{aligned} \quad (11.28)$$

$$\begin{aligned} E \{x_2(t) x_4(t)\} &= E \{\check{x}_1(t) \check{x}_3(t)\} = E \{x_1(t) x_3(t)\} = \\ &= r_{dd}(\tau_{d_{13}}) + r_{II}(\tau_{I_{13}}). \end{aligned} \quad (11.29)$$

Рассмотрим вектор взаимной корреляции  $\mathbf{r}_{xd}$ , определяемый как

$$\mathbf{r}_{xd} \triangleq E \begin{bmatrix} x_1(t) d(t) \\ x_2(t) d(t) \\ \vdots \\ x_{2N}(t) d(t) \end{bmatrix}, \quad (11.30)$$

где  $N$  — число элементов решетки. Каждый элемент вектора  $\mathbf{r}_{xd}$  обозначается через  $r_{x_i d}$  и определяет взаимную корреляцию опорного сигнала  $d(t)$  и сигнала  $x_i(t)$ . Поскольку опорный сигнал представляет собой копию полезного сигнала и статистически не зависит от помехи и собственного шума приемника, то элементы  $\mathbf{r}_{xd}$  определяются только корреляционной функцией полезного сигнала, так что

$$r_{x_i d} = E \{x_i(t) d(t)\} = r_{dd}(\tau_{d_i}), \quad (11.31)$$

где  $\tau_{d_i}$  — время задержки опорного сигнала относительно составляющей  $x_i(t)$  полезного сигнала. При обработке сигналов антенной решетки на базе многоотводной ЛЗ каждый элемент вектора  $\mathbf{r}_{xd}$  представляет собой корреляционную функцию полезного сигнала при значении  $\tau$ , учитывающем задержку, обусловленную как пространственным разнесением элементов решетки, так и свойствами самой линии. В процессе антенной решетки с разложением на квадратурные составляющие

компоненты вектора  $\mathbf{r}_{xd}$ , соответствующие синфазным составляющим, определяются корреляционной функцией полезного сигнала

$$r_{x_id} \text{ (синфазные)} = E\{x_i(t) d(t)\} = r_{dd}(\tau_{d_i}), \quad (11.32)$$

где  $\tau_{d_i}$  — время задержки, обусловленной пространственным разнесением элементов решетки. Компоненты  $\mathbf{r}_{xd}$ , соответствующие квадратурным составляющим, могут быть представлены с помощью выражений (11.21) и (11.22) в следующем виде:

$$\begin{aligned} r_{x_{i+1}d} \text{ (квадратурные)} &= E\{x_{i+1}(t) d(t)\} = E\{\check{x}_i(t) d(t)\} = \\ &= -E\{x_i(t) \check{d}(t)\} = -\check{E}\{x_i(t) d(t)\} = -\check{r}_{x_id}(\tau_{d_i}). \end{aligned} \quad (11.33)$$

Определив для заданных условий приема матрицу  $\mathbf{R}_{xx}$  и вектор  $\mathbf{r}_{xd}$ , по формуле (11.10) можно вычислить оптимальные по критерию МСКО весовые коэффициенты и найти характеристики решетки в установившемся режиме.

Устройство обработки сигналов одного элемента антенны, показанное на рис. 11.3, можно рассматривать как одноканальный процессор с частотной характеристикой

$$H_1(\omega) = \omega_1 + \omega_2 e^{-j\omega\Delta} + \omega_3 e^{-j2\omega\Delta} + \dots + \omega_L e^{-j(L-1)\omega\Delta}. \quad (11.34)$$

Аналогично процессор с разложением сигналов на квадратурные составляющие (рис. 11.4) имеет частотную характеристику

$$H_1(\omega) = \omega_1 - j\omega_2. \quad (11.35)$$

Результирующая частотная характеристика для полезного сигнала и помехи может быть найдена с учетом задержки распространения между элементами решетки. В двухэлементной решетке с частотными характеристиками каналов  $H_1(\omega)$  и  $H_2(\omega)$  результирующая частотная характеристика для полезного сигнала имеет вид

$$H_d(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) e^{-j\omega\tau_d}, \quad (11.36)$$

а для помехи

$$H_I(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) e^{-j\omega\tau_I}, \quad (11.37)$$

где  $\tau_d$  и  $\tau_I$  — времена задержки, обусловленные распространением полезного сигнала и помехи соответственно между элементами 1 и 2. Если в двухэлементной антенной решетке межэлементное расстояние, как на рис. 11.1, равно  $d$ , то

$$\tau_d = (d/v) \sin \theta_s, \quad (11.38)$$

$$\tau_I = (d/v) \sin \theta_I. \quad (11.39)$$

Целесообразно сравнить эффективность обработки с использованием многоотводной ЛЗ (при действительных весовых коэффициентах) и эффективность обработки с разложением на квадратурные составляющие, принимая за критерий выходное отношение сигнал-шум:

$$\text{ОСШ} \triangleq P_d / (P_I + P_n), \quad (11.40)$$

где  $P_d$ ,  $P_I$ ,  $P_n$  — выходные мощности полезного сигнала, помехи и собственного шума приемника соответственно.

Определим мощности указанных составляющих на выходе антенной решетки. Пусть  $\varphi_{dd}(\omega)$  и  $\varphi_{II}(\omega)$  — спектральные плотности полезного сигнала и помехи соответственно. Тогда выходная мощность полезного сигнала будет равна

$$P_d = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{dd}(\omega) |H_d(\omega)|^2 d\omega, \quad (11.41)$$

где  $H_d(\omega)$  — результирующая частотная характеристика для полезного сигнала. Выходная мощность помехи будет определяться выражением

$$P_I = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{II}(\omega) |H_I(\omega)|^2 d\omega, \quad (11.42)$$

где  $H_I(\omega)$  — результирующая частотная характеристика для помехи. Составляющие собственного шума приемника присутствуют на выходах каждого элемента решетки и являются статистически независимыми. Пусть  $\varphi_{nn}(\omega)$  — спектральная плотность собственного шума приемника, тогда мощность шума, создаваемая на выходе решетки первым элементом, будет

$$P_{n_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{nn}(\omega) |H_1(\omega)|^2 d\omega, \quad (11.43)$$

а мощность шума, создаваемая на выходе решетки ее вторым элементом,

$$P_{n_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{nn}(\omega) |H_2(\omega)|^2 d\omega. \quad (11.44)$$

Тогда общая выходная мощность собственного шума, создаваемая двумя элементами, будет

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{nn}(\omega) [|H_1(\omega)|^2 + |H_2(\omega)|^2] d\omega. \quad (11.45)$$

Полученные выражения можно теперь использовать при вычислении выходного ОСШ по формуле (11.40).

### 11.1.3. Сравнение эффективности четырех процессоров антенной решетки

В этом разделе приводится сравнение эффективности четырех адаптивных процессоров: одного с разложением сигналов на квадратурные составляющие и трех, основанных на использовании многоотводных ЛЗ. Сравнение осуществляется для относительных полос сигнала, равных 4; 10; 20 и 40%. Целью такого сравнения при приеме широкополосных сигналов является определение предпочтительности обработки на

базе многоотводных ЛЗ перед обработкой, основанной на разложении сигналов на квадратурные составляющие. Использование действительных весовых коэффициентов в процессоре с многоотводной ЛЗ обеспечивает наибольшую простоту аппаратуры, хотя при этом одновременно ограничивается число степеней свободы и ухудшается эффективность обработки по сравнению со случаем использования комплексных весовых коэффициентов. Несмотря на это, полученные результаты могут служить мерой сравнительной эффективности двух рассматриваемых методов обработки широкополосных сигналов.

Функциональные схемы четырех адаптивных процессоров антенных решеток, подлежащих сравнению, показаны на рис. 11.5. Каждая решетка содержит два элемента, расположенных на расстоянии половины длины волны  $\lambda_0$ , соответствующей центральной частоте  $f_0$  спектра полезного сигнала. На рис. 11.5, *a* представлена решетка с разложением сигналов на квадратурные составляющие. Схемы обработки сигналов на базе ЛЗ показаны последовательно на рис. 11.5, *б* — *г*. Процессор, схема которого показана на рис. 11.5, *б*, в каждом канале содержит ЛЗ с двумя отводами, состоящую из одного элемента с временем задержки, соответствующим  $\lambda_0/4$ . Процессор, схема которого приведена на рис. 11.5, *в*, в каждом канале содержит по два элемента задержки (аналогичных рассмотренным в процессоре со схемой на рис. 11.5, *б*) и использует для обработки сигналы с трех отводов ЛЗ. Процессор рис. 11.5, *г* в каждом канале имеет ЛЗ с пятью отводами, состоящую из четырех элементов с временем задержки, соответствующим  $\lambda_0/8$ . Заметим, что суммарные длительности задержки в процессорах рис. 11.5, *г* и *в* одинаковые, поэтому процессор со схемой на рис. 11.5, *г* может рассматриваться как процессор со схемой на рис. 11.5, *в*, но с меньшим интервалом дискретизации.

Предположим, что в качестве полезного используется фазоманипулированный сигнал вида

$$s_d(t) = A \cos [\omega_0 t + \varphi(t) + \theta], \quad (11.46)$$

где  $\varphi(t)$  — фазовый угол, принимающий значения 0 или  $\pi$  в каждом импульсе;  $\theta$  — произвольный фазовый угол. Как показано на рис. 11.6, *n*-й импульс такого сигнала длится в течение времени  $T_0 + (n - 1) T \leq t \leq T_0 + nT$ , где  $n$  — целое число;  $T$  — длительность импульса;  $T_0$  — постоянная, определяющая начало импульса.

Предположим, что значения  $\varphi(t)$  статистически независимы для различных импульсов и с равной вероятностью равны 0 или  $\pi$ , а величина  $T_0$  имеет равномерное распределение на протяжении длительности одного импульса. Тогда полезный сигнал  $s_d(t)$  будет представлять собой стационарный случайный процесс со спектральной плотностью, определяемый выражением

$$\Psi_{dd}(\omega) = \frac{A^2 T}{2} \left[ \frac{\sin(T/2)(\omega - \omega_0)}{(T/2)(\omega - \omega_0)} \right]^2. \quad (11.47)$$

Вид этой зависимости показан на рис. 11.7.

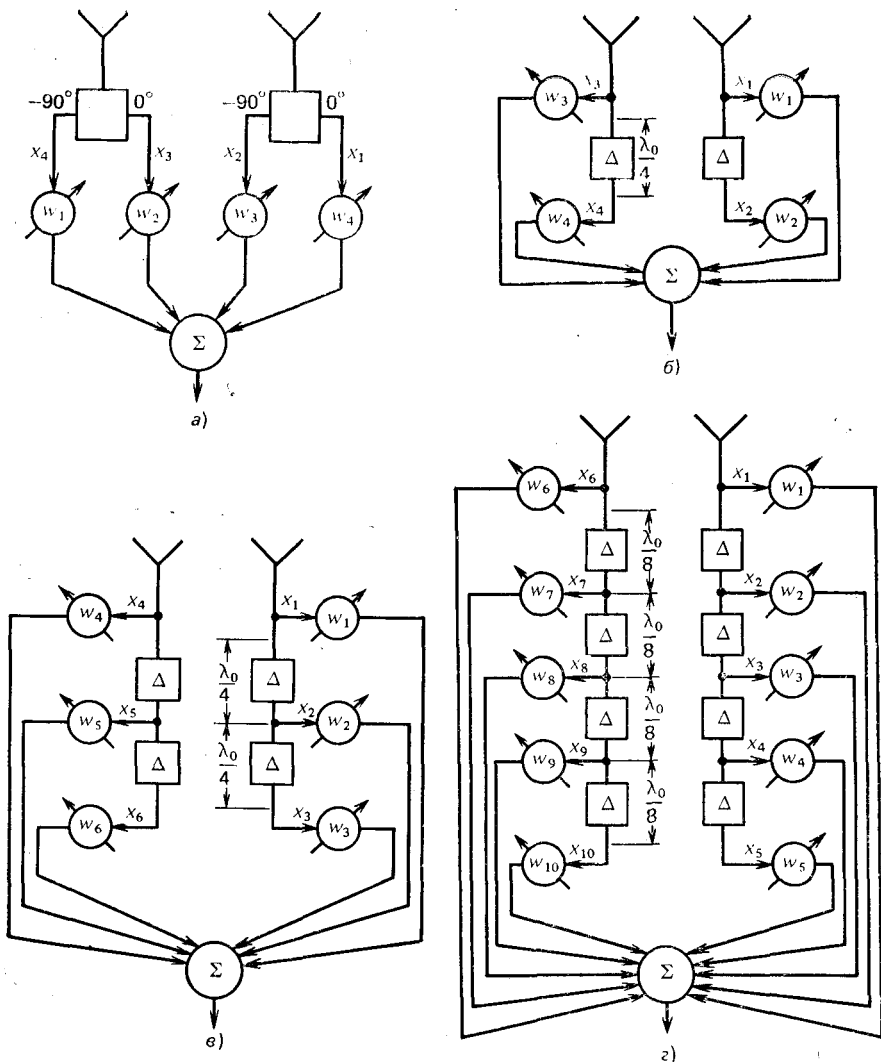


Рис. 11.5. Функциональные схемы процессоров адаптивных антенных решеток [3]:

а — с разложением на квадратурные составляющие; б — с ЛЗ с двумя отводами; в — с ЛЗ с тремя отводами; г — с ЛЗ с пятью отводами

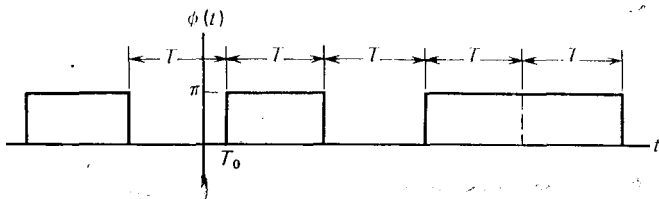


Рис. 11.6. Закон фазовой модуляции полезного сигнала

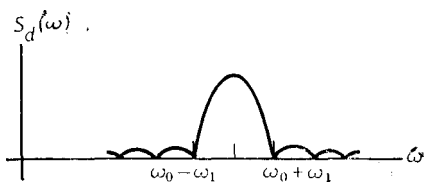


Рис. 11.7. Спектральная плотность полезного сигнала

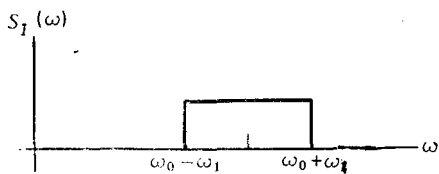


Рис. 11.8. Спектральная плотность помехи

Опорный сигнал полагается равным составляющей полезного сигнала  $x_1(t)$  (и согласованным во времени с составляющей полезного сигнала  $x_2(t)$ ). «Ширина полосы частот» полезного сигнала определяется по первым нулям спектра (11.47). С учетом такого определения полосы ширина полосы полезного сигнала

$$\Pi = 2\omega_1/\omega_0, \quad (11.48)$$

где  $\omega_1$  — интервал между центральной частотой  $\omega_0$  спектра и первым нулем:

$$\omega_1 = 2\pi/T. \quad (11.49)$$

Предположим, что помеха представляет собой гауссовский случайный процесс с равномерной в диапазоне частот  $\omega_0 - \omega_1 < \omega < \omega_0 + \omega_1$  спектральной плотностью (рис. 11.8). Будем считать, наконец, что собственный шум каждого элемента решетки является статистически независимым гауссовским случайным процессом и обладает точно такими же спектральными свойствами, как и помеха.

С учетом принятых обозначений по формулам (11.42) и (11.45) можно вычислить выходные мощности помехи и собственного шума приемника в диапазоне частот  $\omega_0 - \omega_1 < \omega < \omega_0 + \omega_1$ . Выходная мощность полезного сигнала при вычислении ОСШ определяется также только для этого же диапазона частот. Поэтому интеграл в (11.41) вычисляется в пределах от  $\omega_0 - \omega_1$  до  $\omega_0 + \omega_1$ .

Для сравнения эффективности рассматриваемых процессоров адаптивных антенных решеток (рис. 11.5) рассчитывались выходные ОСШ при указанных далее условиях. Предполагалось, что на выходе каждого элемента решетки мощность собственного шума приемника  $p_n$  на 10 дБ ниже мощности полезного сигнала  $p_s$ , т. е.  $p_s/p_n = 10$  дБ. Считалось также, что для каждого элемента решетки выходная мощность помехи  $p_i$  на 20 дБ превышала мощность полезного сигнала  $p_s$ , т. е.  $p_s/p_i = -20$  дБ. Предполагалось, что направление прихода полезного сигнала совпадает с направлением нормали к раскрыву решетки. Значение выходного ОСШ определяется формулой (11.40) и может быть найдено с учетом (11.41) — (11.43) в предположении, что весовые коэффициенты каждого из четырех рассматриваемых процессоров удовлетворяют соотношению (11.10). Результаты расчетов для всех типов процессоров показаны на рис. 11.9—11.12 и представляют собой зависимости выходного ОСШ, определяемого (11.40), от угла прихода помехи при

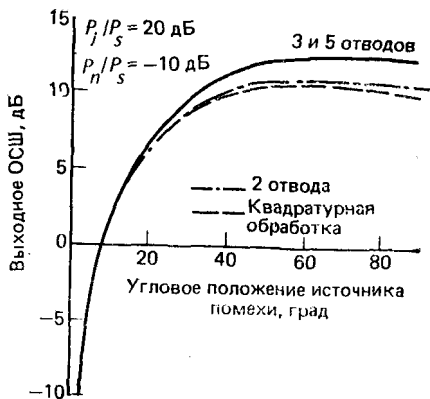


Рис. 11.9. Зависимость выходного ОСШ от угла источника помехи для четырех адаптивных процессоров при относительной ширине полосы частот сигнала 4% [3]

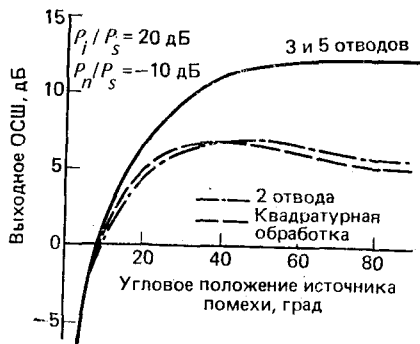


Рис. 11.10. Зависимость выходного ОСШ от углового положения источника помехи для четырех адаптивных процессоров при относительной ширине полосы частот сигнала 10% [3]

относительных полосах полезного сигнала, равных 4, 10, 20 и 40% соответственно.

Можно заметить, что независимо от относительной ширины полосы во всех случаях, когда направление прихода помехи приближается к направлению нормали к раскрытию антенной решетки (по которому принимается полезный сигнал), ОСШ быстро уменьшается и эффектив-

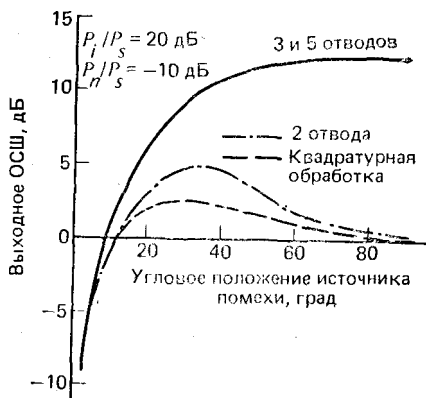


Рис. 11.11. Зависимость выходного ОСШ от углового положения источника помехи для четырех адаптивных процессоров при относительной ширине полосы частот сигнала 20% [3]

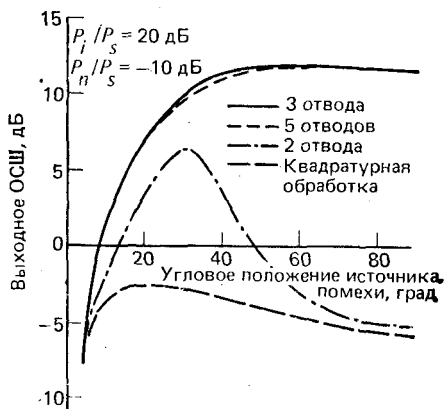


Рис. 11.12. Зависимость выходного ОСШ от углового положения источника помехи для четырех адаптивных процессоров при относительной ширине полосы частот сигнала 40% [3]



ность всех четырех процессоров становится одинаковой. Такое ухудшение ОСШ не является неожиданным, поскольку при совпадении угловых координат источников помехи и полезного сигнала последний попадает в нуль диаграммы, предназначенной для подавления помехи, и выходное ОСШ уменьшается. Кроме того, по мере приближения угла визирования помехи к нулевому значению межэлементный фазовый сдвиг для помехи приближается к нулевому. В связи с этим необходимость введения частотно-зависимого фазового сдвига после каждого элемента антенной решетки отпадает и эффективность всех четырех процессоров становится одинаковой.

Когда источник помехи значительно удален от источника сигнала, выходное ОСШ четырех рассматриваемых процессоров будет различным, и это различие становится более значительным с увеличением относительной ширины полосы частот сигнала. Так, например, для сигналов с относительной шириной полосы 20 и 40% невозможно получить высокую эффективность обработки при использовании процессоров как с разложением на квадратурные составляющие, так и с ЛЗ с двумя отводами, если источник помехи значительно удален по углу от нормали к раскрытию решетки. Эффективность процессоров на базе ЛЗ с тремя и пятью отводами при таких рассогласованиях остается достаточно высокой. Поэтому для обработки сигналов с относительной шириной полосы 20% и более необходимо применять процессоры на базе многоотводных ЛЗ. Из рис. 11.12 видно, что эффективность процессоров при использовании ЛЗ с тремя и пятью отводами практически одинакова, поэтому для двухэлементной решетки и сигнала с относительной полосой до 40% процессора на базе ЛЗ с тремя отводами будет вполне достаточно.

Из графиков на рис. 11.11 и 11.12 следует, что выходное ОСШ процессоров на базе ЛЗ с двумя отводами достигает наибольшего значения, когда угловое положение источника помехи соответствует  $30^\circ$ . Это объясняется тем, что межэлементное время задержки соответствует постоянно  $\lambda/4$  (так как элементы решетки разнесены на  $\lambda/2$ ). В этом случае один элемент ЛЗ с временем задержки, соответствующим  $\lambda/4$ , обеспечивает точную компенсацию межэлементного времени запаздывания и тем самым увеличение выходного ОСШ. Максимальное значение выходного ОСШ, обеспечиваемое процессорами на базе ЛЗ с тремя и пятью отводами при угловых положениях источника помехи, соответствующих  $70^\circ$  и больше, составляет около 12,5 дБ. При обработке сигналов в идеальных каналах помеха компенсируется, полезный же сигнал в каждом канале суммируется когерентно, так что  $P_d = 4p_s$ , а собственный шум приемника суммируется некогерентно, при этом  $P_N = 2p_n$ . Поэтому в двухэлементной антенной решетке при отсутствии помехи и уровне собственного шума приемника на 10 дБ ниже уровня полезного сигнала теоретически наилучшее выходное ОСШ = 13 дБ. Таким образом, процессоры на основе ЛЗ с тремя и пятью отводами обеспечивают эффективную компенсацию помех при большом угловом разнесении источников полезного сигнала и помехи.

#### 11.1.4. Частотные характеристики процессоров

Целесообразно рассмотреть частотные характеристики антенной решетки для полезного сигнала и помехи каждого из четырех процессоров, рассмотренных в предыдущем разделе. Для того чтобы не было искажений, частотная характеристика решетки должна быть постоянной в полосе частот полезного сигнала. Для помехи желательно, чтобы частотная характеристика имела достаточно малую амплитуду в полосе частот помехи.

Частотные характеристики четырех процессоров двухэлементной антенной решетки могут быть определены по формулам (1.34) — (11.39). При тех же условиях, что и в предыдущем разделе, были рассчитаны частотные характеристики для полезного сигнала  $|H_d(\omega)|$  и помехи  $|H_I(\omega)|$  четырех процессоров (рис. 11.5) при относительной полосе 4% и различных угловых положениях источника помехи. Результаты расчетов представлены на рис. 11.13—11.16. Полученные данные свидетельствуют о том, что для всех процессоров при всех угловых положениях источника помехи частотная характеристика для полезного сигнала в его полосе частот имеет плоскую форму. Однако по мере того, как угловое положение источника помехи приближается к угловому положению источника полезного сигнала, значение коэффициента передачи (постоянное) для полезного сигнала уменьшается, так как последний попадает в область нуля диаграммы направленности.

Результаты расчетов для процессора с разложением сигналов на квадратурные составляющие, представленные на рис. 11.13, показывают, что частотная характеристика для помехи имеет глубокий провал на центральной частоте, когда источник помехи достаточно удален по угловой координате ( $\theta_i > 20^\circ$ ) от источника полезного сигнала. При уменьшении углового разнесения источников полезного сигнала и помехи ( $\theta_i < 20^\circ$ ) провал в частотной характеристике смещается от центральной частоты, так как весовые коэффициенты процессора должны устанавливаться с учетом компромисса между требованиями компенсации помехи и увеличения уровня полезного сигнала. Смещение провала в частотной характеристике улучшает условие приема полезного сигнала (поскольку наибольшее значение спектральной плотности полезного сигнала соответствует именно центральной частоте), тогда как компенсация помехи уменьшается лишь незначительно (поскольку спектральная плотность помехи равномерна во всем диапазоне частот).

Нетрудно заметить, что частотные характеристики процессора на базе ЛЗ с двумя отводами (рис. 11.14) очень похожи на соответствующие характеристики процессора с разложением сигналов на квадратурные составляющие. Единственным заметным отличием является меньший уровень и более плавное изменение провала частотной характеристики для помехи в процессоре с ЛЗ.

Частотные характеристики процессора на основе ЛЗ с тремя отводами показаны на рис. 11.15. По сравнению с предыдущими случаями наиболее существенным отличием является значительное уменьшение коэффициента передачи для помехи; при этом минимальное значение компенсации помехи составляет примерно 45 дБ. Когда источники по-

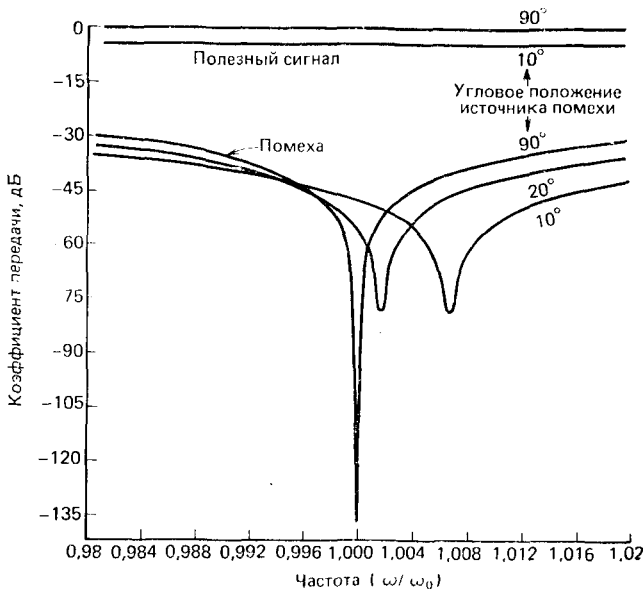


Рис. 11.13. Амплитудно-частотная характеристика процессора с разложением сигналов на квадратурные составляющие [2]

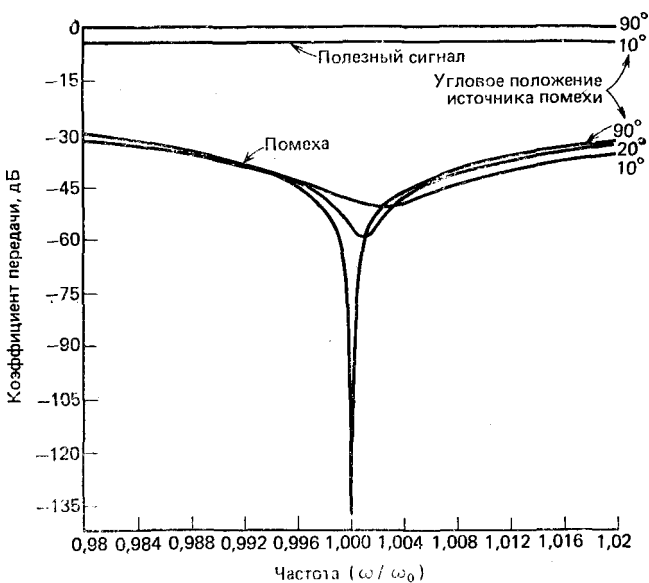


Рис. 11.14. Амплитудно-частотная характеристика процессора на основе ЛЗ с двумя отводами [2]

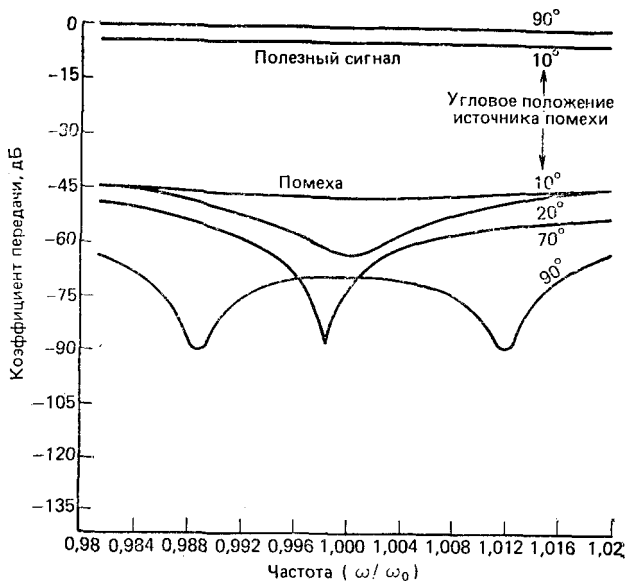


Рис. 11.15. Амплитудно-частотная характеристика процессора на основе ЛЗ с тремя отводами [2]

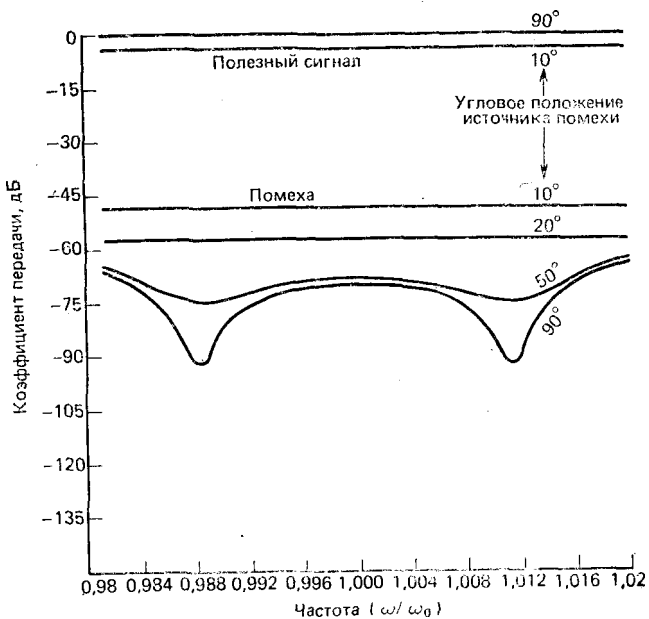


Рис. 11.16. Амплитудно-частотная характеристика процессора на основе ЛЗ с пятью отводами

межи и полезного сигнала расположены достаточно близко, частотная характеристика имеет только один достаточно плавный провал. С увеличением углового разнесения этих источников наблюдается увеличение глубины провала и, наконец, при значительном различии по угловым координатам единственный провал в частотной характеристике преобразуется в два провала. Такая форма частотной характеристики (с двумя провалами) не имеет большого значения, так как это свойство проявляется при очень низком уровне коэффициента передачи (затухание превышает 75 дБ).

Частотные характеристики процессора на основе ЛЗ с пятью отводами (рис. 11.16) очень похожи на соответствующие характеристики процессора на основе ЛЗ с тремя отводами. Наиболее существенное отличие состоит в том, что при использовании такого процессора достигается некоторое увеличение компенсации помехи.

С увеличением относительной полосы частот форма частотных характеристик процессоров остается такой же, как на рис. 11.13—11.16. Однако следует учитывать, что:

1) с увеличением относительной полосы частот помехи становится труднее обеспечить ее компенсацию во всем заданном частотном диапазоне;

2) значения частотной характеристики для полезного сигнала уменьшаются, поскольку контур обратной связи уменьшает все весовые коэффициенты для компенсации более значительных составляющих помехи на выходе решетке, тем самым приводя и к большему ослаблению полезного сигнала.

В целом с увеличением относительной полосы частот сигналов выходное ОСШ уменьшается; этот факт подтверждается результатами расчетов, представленных на рис. 11.9—11.12.

## 11.2. КОМПЕНСАЦИЯ ЭФФЕКТОВ МНОГОЛУЧЕВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Во многих случаях условия приема характеризуются тем, что к раскрыву антенной решетки наряду с волновым фронтом сигнала при его прямом распространении поступают с некоторым запаздыванием волновые фронты сигналов, обусловленные многолучевым распространением энергии. Присутствие таких сигналов многолучевого распространения, если не принять специальных мер к их компенсации, приводит к искажению помехи, тем самым значительно ограничивая возможности ее подавления в адаптивной решетке. В процессоре с многоотводной ЛЗ при формировании выходного сигнала производится совместная обработка задержанных и взвешенных копий входных сигналов. Поскольку при многолучевом распространении сигналы также состоят из задержанных и взвешенных копий «прямого» сигнала, то такой процессор обладает потенциальной возможностью компенсации эффектов многолучевого распространения.

### 11.2.1. Модель двухканального компенсатора помехи

Рассмотрим идеальную адаптивную систему на основе двухэлементной антенной решетке. При этом желательно, чтобы характеристики «вспомогательного» канала были подстроены так, чтобы любая помеха, поступающая по направлениям, соответствующим боковым лепесткам «основного» канала, компенсировалась на выходе системы. Система, реализующая указанный принцип действия и предназначенная для подавления помех, действующих по направлениям, соответствующим боковым лепесткам диаграммы, называется когерентным компенсатором помех, действующих по боковым лепесткам (КБЛ). На рис. 11.17 показана

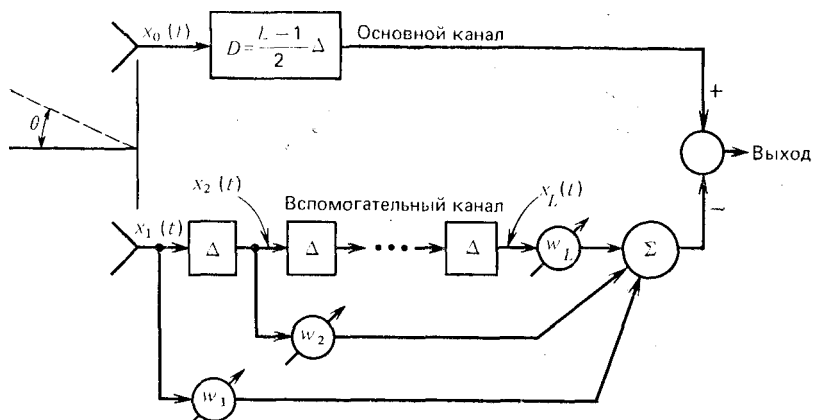


Рис. 11.17. Модель идеального двухканального КБЛ. Вспомогательный компенсационный канал имеет  $L$  весовых коэффициентов и  $L-1$  элементов задержки

функциональная схема двухканального КБЛ, в котором вспомогательный компенсационный канал построен на базе ЛЗ с  $L$  отводами, каждый элемент которой осуществляет задержку на  $\Delta$ . В основном канале включена ЛЗ с задержкой на  $D = (L - 1) \Delta/2$ , чтобы центральный отвод ЛЗ вспомогательного канала имел задержку, равную  $D$ , тем самым обеспечивая возможность компенсации запаздывания как для положительных, так и для отрицательных углов  $\theta$ . Представленная идеальная модель двухканального КБЛ обладает всеми основными свойствами сложных систем с несколькими вспомогательными каналами и поэтому может быть удобной для оценки эффективности компенсации эффектов многолучевого распространения [5].

В данном случае эффективность системы будет характеризоваться способностью двухканального КБЛ подавлять нежелательный сигнал помехи с помощью соответствующего выбора основных параметров ЛЗ. На практике весовые коэффициенты подстраиваются с помощью соответствующего алгоритма адаптации. Для того чтобы исключить из анализа влияние выбора того или иного алгоритма подстройки, рассмотрим эффективность системы в установившемся режиме. Поскольку решение в установившемся режиме можно найти аналитически, то необ-

ходимо определить лишь мощность нескомпенсированных остатков помехи на выходе системы, которая и будет мерой подавления помехи в КБЛ.

Пусть  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$  и  $e(t)$  — комплексные огибающие сигналов на выходах основного канала, вспомогательного канала и системы в целом соответственно. Определим комплексный сигнальный вектор в виде

$$\mathbf{x}^T \triangleq [x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)], \quad (11.50)$$

где

$$\begin{aligned} x_2(t) &\triangleq x_1(t - \Delta), \\ &\vdots \\ x_L(t) &\triangleq x_1[t - (L - 1)\Delta]. \end{aligned}$$

Определим также комплексный весовой вектор

$$\mathbf{w}^T \triangleq [w_1, w_2, \dots, w_L]. \quad (11.51)$$

Тогда выходной сигнал фильтра на ЛЗ можно выразить как

$$\text{Выходной сигнал фильтра} = \sum_{i=1}^L x_i [t - (i - 1)\Delta] w_i^* = \mathbf{w}^\dagger \mathbf{x}(t). \quad (11.52)$$

Тогда выходной сигнал системы (комплексная огибающая) будет

$$e(t) = x_0(t - D) + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{x}(t). \quad (11.53)$$

Желательно так выбрать весовой вектор  $\mathbf{w}$ , чтобы выходной сигнал системы имел минимальную СКО. В случае стационарных случайных процессов это условие эквивалентно минимизации выражения

$$R_{ee}(0) = E \{e(t) e^*(t)\}. \quad (11.54)$$

Из (11.53) с учетом того, что

$$E \{x_0(t - D) x_0^*(t - D)\} = r_{x_0 x_0}(0), \quad (11.55)$$

$$E \{x(t) x_0^*(t - D)\} = r_{x_0 x_0}(-D), \quad (11.56)$$

$$E \{\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^\dagger(t)\} = \mathbf{R}_{xx}(0), \quad (11.57)$$

следует

$$\begin{aligned} R_{ee}(0) &= r_{x_0 x_0}(0) - \mathbf{r}_{xx_0}^\dagger(-D) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0) \mathbf{r}_{x_0 x_0}(-D) + \\ &+ [\mathbf{r}_{xx_0}^\dagger(-D) + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_{xx}(0)] \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0) [\mathbf{r}_{x_0 x_0}(-D) + \mathbf{R}_{xx}(0) \mathbf{w}]. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Желательно минимизировать (11.58), выбирая соответствующим образом комплексный весовой вектор  $\mathbf{w}$ . Предположим, что матрица  $\mathbf{R}_{xx}(0)$  является невырожденной, тогда значение  $\mathbf{w}$ , обеспечивающее минимизацию (11.58), будет определяться формулой

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0) \mathbf{r}_{x_0 x_0}(-D). \quad (11.59)$$

Тогда минимальная мощность нескомпенсированных остатков помехи на выходе системы будет определяться соотношением

$$R_{ee}(0)_{\text{min}} = r_{x_0 x_0}(0) - \mathbf{r}_{xx_0}^\dagger(-D) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0) \mathbf{r}_{x_0 x_0}(-D). \quad (11.60)$$

Для оценки эффективности подавления помехи с помощью КБЛ, схема которого показана на рис. 11.17, можно воспользоваться выражением (11.60) при заданных характеристиках принимаемых сигналов.

### 11.2.2. Характеристики принимаемых сигналов при многолучевом распространении

Пусть функция  $s_1(t, \theta_1)$  характеризует прямой сигнал помехи, поступающий с направления  $\theta_1$ , а функция  $s_m(t, \rho_m, D_m, \theta_m)$  при  $m = 2, \dots, M$  — сигналы, обусловленные многолучевым распространением помехи и представляемые совокупностью  $M - 1$  коррелированных сигналов с плоским волновым фронтом, имеющих ту же частоту, что и прямой сигнал, но поступающих с других направлений, т. е.  $\theta_m \neq \theta_1$  и  $\theta_k \neq \theta_l$  при  $k \neq l$ . Каждый из дополнительных лучей при многолучевом распространении характеризуется соответствующим коэффициентом отражения  $\rho_m$ , а также временем задержки  $D_m$  относительно прямого луча. Ковариационная матрица сигналов при многолучевом распространении может быть записана как [6]

$$\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{V}_s \mathbf{A} \mathbf{V}_s^\dagger. \quad (11.61)$$

Здесь матрица сигнала  $\mathbf{V}_s$  размером  $N \times M$  может быть записана в блочном виде

$$\mathbf{V}_s = [\mathbf{v}_{s_1} : \mathbf{v}_{s_2} : \dots : \mathbf{v}_{s_M}], \quad (11.62)$$

где

$$\mathbf{v}_{s_m} = \sqrt{P_{s_m}} \begin{bmatrix} 1 \\ \exp [j2\pi (d/\lambda_0) \sin \theta_m] \\ \exp [j2\pi (d/\lambda_0) 2 \sin \theta_m] \\ \vdots \\ \exp [j2\pi (d/\lambda_0) (N-1) \sin \theta_m] \end{bmatrix}, \quad (11.63)$$

$P_{s_m} = \rho_m^2$  — мощность, соответствующая сигналу  $s_m$ ;  $\mathbf{A}$  — корреляционная матрица, характеризующая многолучевое распространение. Если  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , то различные составляющие сигналов не коррелированы. Если же все элементы матрицы  $\mathbf{A}$  равны единице, то различные составляющие сигнала полностью коррелированы. Для числовых расчетов в качестве корреляционной матрицы  $\mathbf{A}$  можно выбрать матрицу вида [6]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{M-1} \\ \alpha & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{M-1} \\ \vdots & & & & \\ \alpha^{M-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (11.64)$$

Отметим, что с помощью этой упрощенной модели нельзя учесть изменения параметров  $\theta_m$ ,  $D_m$  и  $\rho_m$ . Поэтому для учета таких изменений, которые проявляются при существенных эффектах рассеяния в ближней зоне, необходимо обращаться к более общей модели матрицы  $\mathbf{A}$ .

Корреляционная матрица входного сигнала может быть записана в виде

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{nn} + \mathbf{V}_s \mathbf{A} \mathbf{V}_s^\dagger, \quad (11.65)$$

где  $\mathbf{R}_{nn}$  — ковариационная матрица шума.



Для простоты можно предположить, что многолучевое распространение представлено только одним дополнительным лучом. Пусть в этом случае  $s(t, \theta_1)$  — сигнал помехи, соответствующий прямому лучу, а  $s_m(t, \rho_m, D_m, \theta_2)$  — дополнительному лучу. Тогда сигнал в основном канале будет определяться выражением

$$x_0(t) = s(t, \theta_1) + s_m(t, \rho_m, D_m, \theta_2). \quad (11.66)$$

Обозначим  $s(t, \theta_1)$  через  $s(t)$ , тогда  $s_m(t, \rho_m, D_m, \theta_2)$  можно записать как  $\rho_m s(t - D_m) \exp(-j\omega_0 D_m)$  и

$$x_0(t) = s(t) + \rho_m s(t - D_m) \exp(-j\omega_0 D_m), \quad (11.67)$$

где  $\omega_0$  — центральная частота помехи. Отсюда следует, что

$$x_1(t) = s(t - \tau_{12}) \exp(-j\omega_0 \tau_{12}) + \rho_m s(t - D_m - \tau_{22}) \exp[-j\omega_0 \times (D_m + \tau_{22})], \quad (11.68)$$

где  $\tau_{12}$  и  $\tau_{22}$  — задержки сигналов  $s(t, \theta_1)$  и  $s_m(t, \rho_m, D_m, \theta_2)$  при распространении между антенными элементами основного и вспомогательного каналов соответственно.

Предположим, что сигналы  $s(t, \theta_1)$  и  $s_m(t, \rho_m, D_m, \theta_2)$  имеют равномерную спектральную плотность в полосе частот  $B$ , как показано на

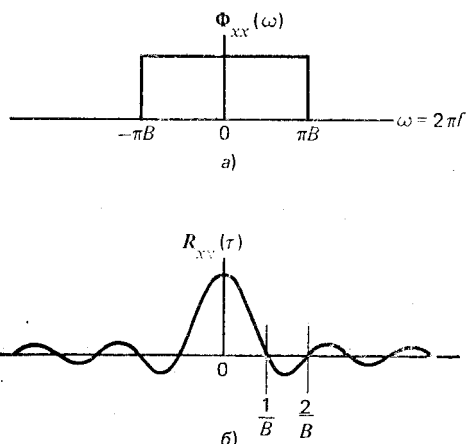


Рис. 11.18. Спектральная плотность (а) и соответствующая ей корреляционная функция (б) помехи

рис. 11.18, а. При этом соответствующие корреляционную и взаимную корреляционную функции сигналов  $x_0(t)$  и  $x_1(t)$  можно вычислить, учитывая, что

$$R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Phi_{xx}(\omega)\}, \quad (11.69)$$

где  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  — обратное преобразование Фурье, а  $\Phi_{xx}(\omega)$  — матрица взаимных спектральных плотностей  $x(t)$ .

Из выражений (11.66), (11.68) и (11.69) следует, что

$$r_{x_0 x_0}(0) = 1 + |\rho_m|^2 + \frac{\sin \pi B D_m}{\pi B D_m} (\rho_m e^{-j\omega_0 D_m} + \rho_m^* e^{j\omega_0 D_m}). \quad (11.70)$$

Введя определения

$$f[\psi, \text{sgn } 1, \text{sgn } 2] \triangleq \frac{\sin \pi B [\psi + \text{sgn } 1 \cdot (i-1) \Delta + \text{sgn } 2 \cdot D]}{\pi B [\psi + \text{sgn } 1 \cdot (i-1) \Delta + \text{sgn } 2 \cdot D]},$$

$$g[\psi, \text{sgn}] \triangleq \frac{\sin \pi B [\psi + \text{sgn} \cdot (i-k) \Delta]}{\pi B [\psi + \text{sgn} \cdot (i-k) \Delta]},$$

получаем

$$r_{x_i x_0}(-D) = f[\tau_{12}, +, -] \exp\{-j\omega_0 [\tau_{12} + (i-1)\Delta]\} +$$

$$+ f[D_m + \tau_{22}, +, -] \rho_m \exp\{-j\omega_0 [\tau_{22} + (i-1)\Delta + D_m]\} +$$

$$+ f[D_m - \tau_{12}, -, +] \rho_m^* \exp\{-j\omega_0 [\tau_{12} + (i-1)\Delta - D_m]\} +$$

$$+ f[\tau_{22}, +, -] |\rho_m|^2 \exp\{-j\omega_0 [\tau_{22} + (i-1)\Delta]\}, \quad (11.71)$$

$$r_{x_i x_k}(0) = g[0, +] \{1 + |\rho_m|^2\} \exp[-j\omega_0 (i-k)\Delta] +$$

$$+ g[\tau_{12} - \tau_{22} - D_m, -] \rho_m \exp\{-j\omega_0 [\tau_{12} - \tau_{22} - D_m - (i-k)\Delta]\} +$$

$$+ g[\tau_{12} - \tau_{22} - D_m, +] \rho_m^* \exp\{-j\omega_0 [\tau_{12} - \tau_{22} - D_m + (i-k)\Delta]\}. \quad (11.72)$$

Тогда вектор  $\mathbf{r}_{x x_0}(-D)$  будет определяться выражением

$$\mathbf{r}_{x x_0}(-D) = \begin{bmatrix} r_{x_1 x_0}(-D) \\ r_{x_2 x_0}(-D) \\ \vdots \\ r_{x_N x_0}(-D) \end{bmatrix}, \quad (11.73)$$

а матрица  $\mathbf{R}_{xx}(0)$  как

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = \begin{bmatrix} r_{x_1 x_1}(0) & r_{x_1 x_2}(0) & \dots & r_{x_1 x_N}(0) \\ \vdots & r_{x_2 x_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ r_{x_1 x_N}(0) & \dots & & r_{x_N x_N}(0) \end{bmatrix}. \quad (11.74)$$

Для того чтобы определить минимальную выходную мощность нескомпенсированных остатков помех (11.60), необходимо [согласно соотношениям (11.70) — (11.72)] задать следующие параметры:

$N$  — число отводов ЛЗ в трансверсальном фильтре;  $\rho_m$  — коэффициент отражения при многолучевом распространении;  $\omega_0$  — центральную частоту помехи;  $D_m$  — время задержки дополнительных лучей относительно прямого луча при многолучевом распространении;  $\tau_{12}$  — задержку прямого луча при распространении между основным и вспомогательным элементами решетки;  $\tau_{22}$  — задержку дополнительного луча при распространении между основным и вспомогательным элементами решетки;  $\Delta$  — время задержки, соответствующее расстоянию между отводами в трансверсальном фильтре;  $B$  — ширину спектра частот (полосу) помехи;  $D$  — время задержки в приемнике основного канала.

Величины  $\tau_{12}$  и  $\tau_{22}$  определяются геометрией антенны:

$$\tau_{12} = (d/v) \sin \theta_1, \quad \tau_{22} = (d/v) \sin \theta_2, \quad (11.75)$$

где  $d$  — межэлементное расстояние;  $v$  — скорость распространения волнового фронта;  $\theta_1, \theta_2$  — углы падения прямого и дополнительного лучей соответственно.

### 11.2.3. Пример. Результаты компенсации эффектов многолучевого распространения

Рассмотрим сигнал помехи, поступающий в антенную решетку с межэлементным расстоянием  $d = 2,25\lambda_0$ ; при этом угол падения прямого луча  $\theta_1 = 30^\circ$ , а угол падения дополнительного луча  $\theta_2 = -30^\circ$ . Чтобы определить параметры, указанные в предыдущем разделе, необходимо указать также следующие данные: центральную частоту помехи  $f_0 = 237$  МГц; ширину спектра сигнала  $B = 3$  МГц; коэффициент отражения для дополнительного луча

$$\rho_m = 0,5. \quad (11.76)$$

Из выражений (11.70)—(11.72) видно, что параметры  $\omega_0, \tau_{12}, \tau_{22}, D_m$  и  $\Delta$  входят в формулу для выходной мощности в виде произведений  $\omega_0\tau_{12}, \omega_0\tau_{22}, \omega_0D_m$  и  $\omega_0\Delta$ . Эти произведения характеризуют четыре фазовых сдвига сигналов на частоте  $\omega_0$ , обусловленные соответствующими задержками. Можно заметить также, что параметры  $B, D, D_m, \tau_{12}, \tau_{22}$  и  $\Delta$  входят в выражение для выходной мощности в виде произведений  $BD, BD_m, B\tau_{12}, B\tau_{22}$  и  $B\Delta$ . Эти произведения, в свою очередь, могут рассматриваться в качестве фазовых сдвигов высших гармоник комплексной огибающей помехи, обусловленных соответствующими задержками. Параметры  $\Delta$  и  $D_m$ , входящие в указанные произведения, существенно влияют на эффективность системы КБЛ. Поэтому результаты расчетов эффективности приводятся здесь в зависимости от произведения  $B\Delta$ .

Поскольку в этом примере  $\theta_1 = -\theta_2$ , то при

$$\omega_0\tau_{12} = \pi/4 \text{ произведение } \omega_0\tau_{22} = -\pi/4. \quad (11.77)$$

Кроме того, пусть произведения  $\omega_0D_m$  и  $\omega_0\Delta$  определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 D_m &= 0 \pm 2k\pi, & k &\text{—любое целое число,} \\ \omega_0 \Delta &= 0 \pm 2l\pi, & l &\text{—любое целое число.} \end{aligned} \right\} \quad (11.78)$$

Для межэлементного расстояния  $d = 2,25\lambda_0$  и  $\theta_1 = 30^\circ$  получим

$$B\tau_{21} = -B\tau_{22} = 1/P; \quad P = 78. \quad (11.79)$$

Наконец, задавшись временем задержки для дополнительного луча, соответствующим расстоянию 46 м, получим

$$BD_m = 0,45. \quad (11.80)$$

Поскольку

$$D = (N - 1)\Delta/2, \quad (11.81)$$

то для вычисления выходной мощности по формуле (11.60) остается задать только параметры  $N$  и  $B\Delta$ .

Для определения выходной мощности системы в соответствии с (11.60) с учетом геометрических соотношений и условий многолучевого распространения, характеризуемых (11.76)—(11.81), требуется, чтобы вектор взаимной корреляции  $r_{x_0 x_0}(-D)$ , корреляционная матрица  $R_{xx}(0)$  размером  $N \times N$  и корреляционная функция  $r_{x_0 x_0}(0)$  вычислялись согласно (11.70)—(11.72). Программа для вычисления величины (11.60) на ЭВМ была составлена с учетом выполнения арифметических операций над комплексными числами с удвоенной точностью.

Результаты расчетов выходной мощности системы показаны в обобщенном виде на рис. 11.19. Здесь представлены зависимости подавления помехи на выходе системы как функции произведения  $B\Delta$  при заданных величинах  $N$ . Из рис. 11.19 видно, что при  $N = 1$  подавление системы не зависит от  $B\Delta$ , так как очевидно, что при единственном отводе нет межотводной задержки. Как следует из приложения А, частотная характеристика трансверсального фильтра на основе многоотводной ЛЗ имеет периодическую структуру с периодом  $2\lambda B_f$ . Следует отметить, что полоса пропускания трансверсального фильтра не обязательно

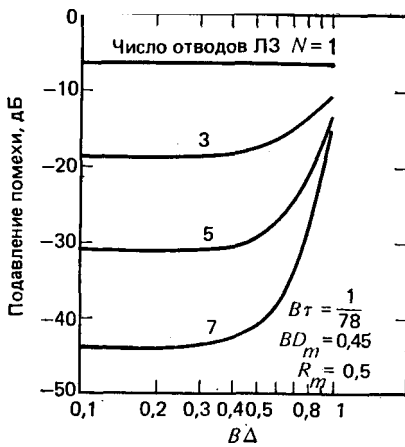


Рис. 11.19. Зависимость подавления помехи от  $B\Delta$  при многолучевом распространении

должна совпадать с полосой частот  $B$  сигнала. Частотная характеристика трансверсального фильтра с основной полосой частот ( $|f - f_0| < B_f/2$ ) может быть представлена в виде

$$F(f) = \sum_{k=1}^N [A_k e^{j\varphi_k}] \times \exp[-j2\pi(k-1)\delta f\Delta], \quad (11.82)$$

где  $A_k e^{j\varphi_k}$  —  $k$ -й комплексный весовой коэффициент;  $\delta f = f - f_0$ ;  $f_0$  — центральная частота. Ширина полосы частот трансверсального фильтра

$$B_f = 1/\Delta. \quad (11.83)$$

Поскольку трансверсальный фильтр должен обеспечивать подстройку комплексных весовых коэффициентов во всей полосе частот  $B$  сигнала, то это значит, что

$$B_f \geq B. \quad (11.84)$$

Поэтому максимальное время задержки, обусловленное расстоянием между отводами ЛЗ, должно составлять

$$\Delta_{\max} = 1/B. \quad (11.85)$$

Отсюда следует, что на практике должно выполняться условие  $0 < B\Delta < 1$ .

Из рис. 11.19 видно, что при  $N > 1$  с уменьшением величины  $B\Delta$ , начиная от единицы, эффективность подавления помехи быстро повышается (уменьшается мощность нескомпенсированных остатков помехи на выходе системы) до значения  $B\Delta = BD_m$  (в данном примере 0,45), после чего эффективность практически не изменяется. В случае  $B\Delta \ll BD_m$ , т. е. при  $B\Delta$ , близком к нулю, эффективность подавления будет ухудшаться, так как полное время задержки ЛЗ будет меньше требуемого. Этот случай не моделировался, поскольку при  $B\Delta$ , близком к нулю, матрица  $R_{xx}(0)$  становится плохо обусловленной и ее обращение оказывается невозможным. Подавление помехи на 30 дБ обеспечивается, когда трансверсальный фильтр содержит по крайней мере пять отводов и значение  $\Delta$  выбрано так, что  $\Delta = D_m$ .

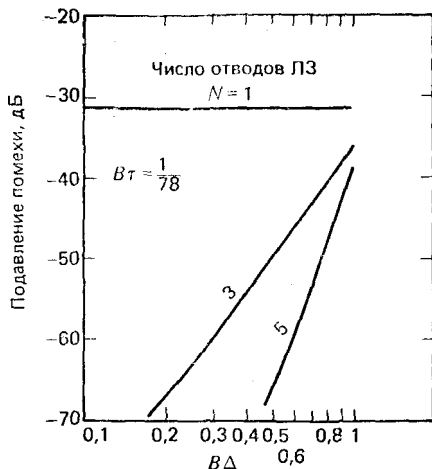
Предположим, например, что трансверсальный фильтр построен так, что  $B\Delta = 0,45$ . Определим, какие изменения эффективности будут иметь место, если действительное время задержки, обусловленное многолучевым распространением, будет таким, что произведение  $B\Delta$  будет отличаться от заданной величины  $BD_m = 0,45$ , а все остальные параметры будут такими же, как и в предыдущем примере. С учетом уже полученных результатов, представленных на рис. 11.19, можно ожидать, что при  $BD_m > B\Delta$  эффективность подавления должна ухудшаться. С другой стороны, при  $BD_m \ll B\Delta$  эффективность подавления помехи должна улучшаться, так как в пределе при  $D_m \rightarrow 0$  можно считать, что в системе отсутствуют эффекты многолучевого распространения.

#### 11.2.4. Результаты компенсации задержки, обусловленной распространением по раскрытию антенной решетки

Для учета эффектов, связанных с задержкой распространения по раскрытию, можно воспользоваться расчетными соотношениями предыдущего раздела. При  $\rho_m = 0$  и  $\tau_{12} = \tau$  (где  $\tau$  — межэлементная задержка распространения) соотношение (11.60) с учетом (11.70)—(11.72) мо-

Рис. 11.20. Зависимость подавления помехи от  $В\Delta$  при учете задержки распространения по раскрыву

жет быть использовано для анализа влияния задержки распространения на эффективность подавления помехи на выходе системы. Из анализа эффектов многолучевого распространения можно ожидать, что при  $В\Delta = В\tau$  будет достигаться максимальное подавление, тогда как при  $В\Delta > В\tau$  оно должно ухудшаться. Зависимости результирующей эффективности подавления помехи от параметра  $В\Delta$  для различного числа отводов ЛЗ и остальных параметров системы, таких, как и в примере разд. 11.2.3, показаны на рис. 11.20. Нетрудно видеть, что приведенные результаты согласуются с ожидаемой эффективностью подавления помехи в системе, о котором говорилось выше.



### 11.3. АНАЛИЗ ЭФФЕКТОВ МЕЖКАНАЛЬНОГО РАССОГЛАСОВАНИЯ

Любой процессор адаптивной антенной решетки чувствителен к неизбежным частотно-зависимым вариациям характеристик каналов. Для компенсации таких эффектов «межканального рассогласования» можно воспользоваться наличием дополнительных степеней свободы, обеспечиваемых многоотводной ЛЗ. Для оценки эффективности компенсации межканального рассогласования снова рассмотрим в качестве примера простую двухэлементную систему КБЛ.

Упрощенная модель системы КБЛ с одним вспомогательным каналом, в которой используется один весовой усилитель с частотно-зависимым комплексным коэффициентом передачи, показана на рис. 11.21. Функция  $T_0(\omega, \theta)$  определяет частотную характеристику основного канала для сигнала, поступающего под углом  $\theta$ . Аналогично частотная характеристика вспомогательного канала может быть обозначена

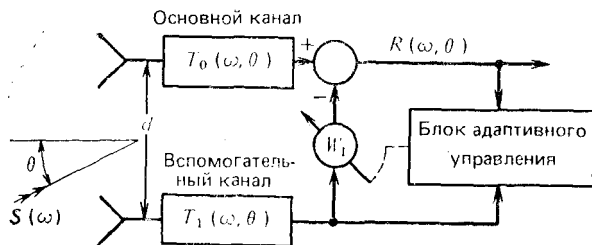


Рис. 11.21. Упрощенная модель КБЛ с одним вспомогательным каналом

через  $T_1(\omega, \theta)$ . Обозначим спектральную плотность широкополосной помехи как  $\varphi_{JJ}(\omega)$ , а спектральную плотность «нескомпенсированных» остатков помехи на выходе системы как  $\varphi_{rr}(\omega, \theta)$ . В соответствии со схемой на рис. 11.21 сигнал вспомогательного канала «умножается» на комплексный весовой коэффициент  $w_1 = \alpha \exp(j\varphi)$ .

В системе КБЛ выходная мощность помехи в заданной полосе частот минимизируется с помощью соответствующей подстройки весового

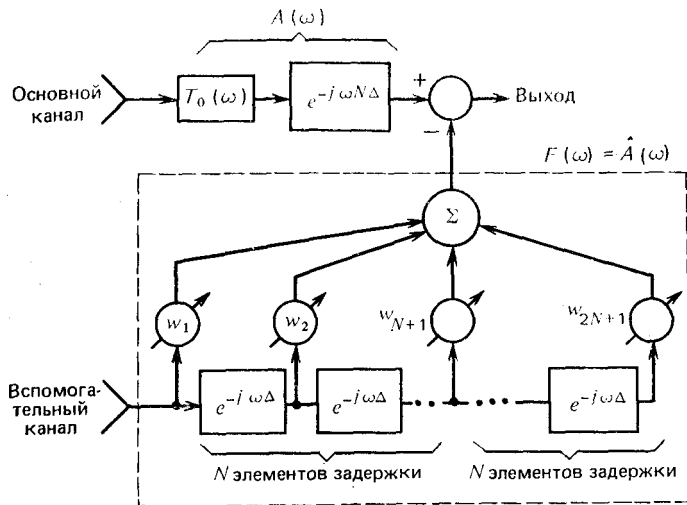


Рис. 11.22. Модель КБЛ с одним вспомогательным каналом, построенным на основе многоотводной ЛЗ

коэффициента. Поскольку мощность определяется как интеграл от спектральной плотности, то требование минимизации выходной мощности может быть сформулировано в виде

$$\min_{w_1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{rr}(\omega, \theta) d\omega, \quad (11.86)$$

где

$$\varphi_{rr}(\omega, \theta) = |T_0(\omega, \theta) - w_1 T_1(\omega, \theta)|^2 \varphi_{JJ}(\omega). \quad (11.87)$$

Заменим схему подстройки комплексного весового коэффициента  $w_1$ , приведенную на рис. 11.21, схемой, содержащей ЛЗ и  $2N + 1$  адаптивно подстраиваемых весовых усилителей (рис. 11.22). В основном канале включена ЛЗ с задержкой  $N\Delta$  (как и в предыдущем разделе), позволяющая осуществлять компенсацию как для положительных, так и для отрицательных углов прихода сигналов. Будет удобно записать частотные характеристики основного и вспомогательного каналов по отношению к выходному сигналу основного канала. Тогда сквозная частотная характеристика основного канала  $A(\omega)$  не будет содержать сомножителей, характеризующих задержку. Анало-

гично для удобства анализа предположим, что все искажения системы сосредоточены в основном канале и что  $T_1(\omega, 0) = 1$ . Обозначим частотную характеристику трансверсального фильтра через  $F(\omega)$ ; тогда

$$F(\omega) = \sum_{k=-N}^N w_{N+1+k} e^{-j\omega k \Delta}, \quad (11.88)$$

где  $w_{N+1+k}$  — комплексные весовые коэффициенты, не зависящие от частоты.

Как отмечалось, желательно минимизировать выходную мощность в полосе частот сигнала с помощью соответствующего подбора весового вектора  $w$ . Полагая, что спектральная плотность помехи в рассматриваемом диапазоне частот постоянная, задачу минимизации выходной мощности можно свести к нахождению «наилучшей» оценки  $\hat{A}(\omega)$  частотной характеристики основного канала в этом же диапазоне частот. Если такая оценка  $\hat{A}(\omega)$  будет обеспечивать минимальную СКО, то ошибка этой оценки  $e(\omega) = A(\omega) - \hat{A}(\omega)$  должна быть ортогональна  $\hat{A}(\omega) = F(\omega)$ , т. е.

$$E \{ [A(\omega) - F(\omega)] F^*(\omega) \} = 0, \quad (11.89)$$

где математическое ожидание  $E \{ \cdot \}$  вычисляется по частоте и поэтому эквивалентно выражению

$$E \{ \cdot \} = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} \{ \cdot \} d\omega. \quad (11.90)$$

Обозначая  $A(\omega) = A_0(\omega) \exp[-j\varphi_0(\omega)]$ , подставляя (11.88) в (11.89) и налагая требование ортогональности ошибки всем выходным сигналам с отводов ЛЗ, получаем следующие условия:

$$E \{ [A_0(\omega) \exp[-j\varphi_0(\omega)] - F(\omega)] \exp(j\omega k \Delta) \} = 0 \quad (11.91)$$

при  $k = -N, \dots, 0, \dots, N$ .

Выражение (11.91) можно переписать в виде

$$E \{ A_0(\omega) \exp[j(\omega k \Delta - \varphi_0(\omega))] - E \left\{ \left[ \sum_{l=-N}^N W_{N+1+l} \exp(-j\omega l \Delta) \right] \exp(j\omega k \Delta) \right\} \} = 0 \quad (11.92)$$

при  $k = -N, \dots, 0, \dots, N$ .

Заметим, что

$$E \{ \exp[-j\omega(l-k)\Delta] \} = \frac{\sin[\pi B \Delta(l-k)]}{\pi B \Delta(l-k)}, \quad (11.93)$$

откуда следует

$$E \left\{ \left[ \sum_{l=-N}^N W_{N+1+l} \exp(j\omega l) \right] \exp(j\omega l \Delta) \right\} = \sum_{l=-N}^N W_{N+1+l} \frac{\sin[\pi B \Delta(l-k)]}{\pi B \Delta(l-k)}, \quad (11.94)$$

и (11.92) можно переписать в матричной форме:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{w}, \quad (11.95)$$

где

$$v_k = E \{A_0(\omega) \exp [j(\omega k \Delta - \varphi_0(\omega))]\}, \quad (11.96)$$

$$C_{h,l} = \frac{\sin [\pi B \Delta (l-k)]}{\pi B \Delta (l-k)}. \quad (11.97)$$

Таким образом, комплексный весовой вектор должен удовлетворять соотношению

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}. \quad (11.98)$$

Используя (11.98) для определения оптимального комплексного весового вектора, можно найти выходную мощность нескомпенсированных остатков помехи по формуле

$$R_{ee}(0) = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} |A(\omega) - F(\omega)|^2 \varphi_{JJ}(\omega) d\omega, \quad (11.99)$$

где  $\varphi_{JJ}(\omega)$  — постоянная спектральная плотность помехи. Предположим, что спектральная плотность помехи в требуемой полосе частот равна единице, тогда составляющая выходной мощности, обусловленная вариациями амплитудной характеристики основного канала, будет

$$R_{ee_A} = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} |A_0(\omega) - F(\omega)|^2 d\omega. \quad (11.100)$$

Поскольку  $A(\omega) - F(\omega)$  ортогональна  $F(\omega)$ , то согласно [7]

$$E \{|A(\omega) - F(\omega)|^2\} = E \{|A(\omega)|^2\} - E \{|F(\omega)|^2\}, \quad (11.101)$$

и поэтому

$$R_{ee_A} = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} [A_0^2(\omega) - |F(\omega)|^2] d\omega. \quad (11.102)$$

Аналогично из (11.99) следует, что составляющая выходной мощности, обусловленная вариациями фазовой характеристики основного канала, будет определяться выражением

$$R_{ee_p} = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} |e^{-i\varphi_0(\omega)} - F(\omega)|^2 \varphi_{JJ}(\omega) d\omega, \quad (11.103)$$



где  $\varphi_0(\omega)$  — вариации фазы сигнала в основном канале. Снова считая, что спектральная плотность сигнала помехи в интересующей полосе частот равна единице, а также что  $\{\exp[-j\varphi_0(\omega)] - F(\omega)\}$  ортогональна  $F(\omega)$ , получаем

$$R_{ee\rho} = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} [1 - |F(\omega)|^2] d\omega =$$

$$= 1 - \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \omega_k \omega_j^* \frac{\sin[\pi B \Delta(k-j)]}{\pi B \Delta(k-j)}, \quad (11.104)$$

где составляющие комплексного весового вектора должны удовлетворять соотношениям (11.95)–(11.98).

Если необходимо оценить эффекты межканального рассогласования по амплитуде и по фазе одновременно, то можно воспользоваться соотношением (11.99), которое (с учетом ортогональности) может быть переписано в виде

$$R_{ee}(0) = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} \{|A(\omega)|^2 - |F(\omega)|^2\} \varphi_{JJ}(\omega) d\omega, \quad (11.105)$$

где комплексные весовые коэффициенты должны снова удовлетворять соотношениям (11.95)–(11.98), в которых в данном случае учитывается как амплитуда, так и фаза и предполагается, что  $\varphi_{JJ}(\omega)$  постоянна.

### 11.3.1. Пример. Эффекты межканального амплитудного рассогласования

Для оценки (11.102) необходимо выбрать модель АЧХ канала, соответствующую  $A(\omega)$ . Одна из возможных моделей показана на рис. 11.23, для которой

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 + R \cos \omega T_0 & \text{при } |\omega| \leq \pi B, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (11.106)$$

где  $T_0 = (2n + 1)/(2B)$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Целое число  $n$  соответствует  $(2n + 1)/2$  периодам пульсаций  $A(\omega)$  в полосе частот  $B$ . Полагая фазовую погрешность  $\varphi_0(\omega) = 0$ , из (11.96) получаем

$$v_k = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} [1 + R \cos \omega T_0] e^{j\omega k \Delta} d\omega \quad (11.107)$$

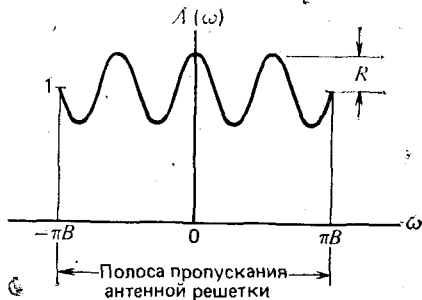


Рис. 11.23. Модель АЧХ с 3,5 периодами пульсаций в полосе пропускания  $B$

или

$$v_k = \frac{\sin(\pi B k \Delta)}{\pi B k \Delta} + \frac{R}{2} \left[ \frac{\sin(\pi B [T_0 + k \Delta])}{\pi B [T_0 + k \Delta]} + \frac{\sin(\pi B [T_0 - k \Delta])}{\pi B [T_0 - k \Delta]} \right] \quad (11.108)$$

при  $k = -N, \dots, 0, \dots, N$ .

Используя (11.108), можно получить комплексный весовой вектор, а с его помощью по формуле (11.102) определить выходную мощность.

Пусть

$$|F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega) = \mathbf{w}^\dagger \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^\dagger \mathbf{w}, \quad (11.109)$$

где

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} e^{j\omega N \Delta} \\ e^{j\omega(N-1)\Delta} \\ \vdots \\ e^{-j\omega N \Delta} \end{bmatrix}. \quad (11.110)$$

Выполняя умножение в (11.109), получаем

$$|F(\omega)|^2 = \sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{k=1}^{2N+1} w_i w_k^* e^{j\omega(k-i)\Delta}. \quad (11.111)$$

Тогда выходная мощность, определяемая (11.102), будет

$$R_{eeA} = \int_{-\pi B}^{\pi B} [1 + R \cos \omega T_0]^2 d\omega - \int_{-\pi B}^{\pi B} \sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{k=1}^{2N+1} w_i w_k^* e^{j\omega(k-i)\Delta} d\omega. \quad (11.112)$$

При вычислении (11.112) следует использовать выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} [1 + R \cos \omega T_0]^2 d\omega &= \left(1 + \frac{R^2}{2}\right) + 2R \frac{\sin \pi [(2n+1)/2]}{\pi [(2n+1)/2]} + \\ &+ \frac{R^2}{2} \frac{\sin \pi (2n+1)}{\pi (2n+1)}, \end{aligned} \quad (11.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} \sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{k=1}^{2N+1} w_i w_k^* e^{j\omega(k-i)\Delta} d\omega &= \\ = \sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{k=1}^{2N+1} w_i w_k^* \frac{\sin \pi (k-i) B \Delta}{\pi (k-i) B \Delta}. \end{aligned} \quad (11.114)$$

### 11.3.2. Результаты подавления помехи для выбранной модели межканального амплитудного рассогласования

Для вычисления выходной мощности (11.112) необходимо задать: амплитуду пульсации  $R$ , число периодов пульсации АЧХ в полосе пропускания  $B$  и произведение  $B\Delta$  (где  $\Delta$  — задержка, обусловленная расстоянием между отводами ЛЗ). Результаты расчетов выходной мощности на ЭВМ показаны в виде графиков на рис. 11.24 — 11.27 при  $R = 0,09$  и  $B\Delta = 0,25; 0,5; 0,75$  и 1. Каждый из рисунков иллюстрирует зависимости уровня подавления помехи на выходе системы от числа отводов ЛЗ трансверсального фильтра при определенном числе перио-

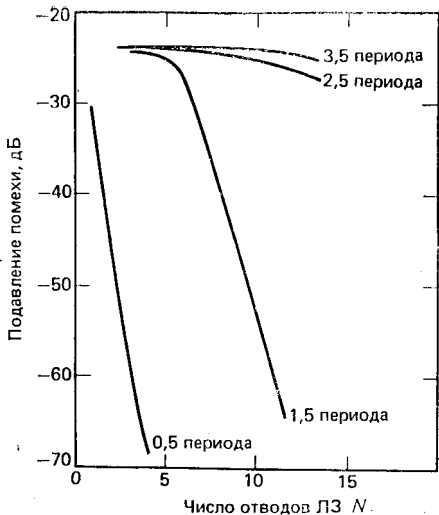


Рис. 11.24. Зависимость подавления помехи от числа отводов ЛЗ при  $VA=0,25$  для модели амплитудного рассогласования

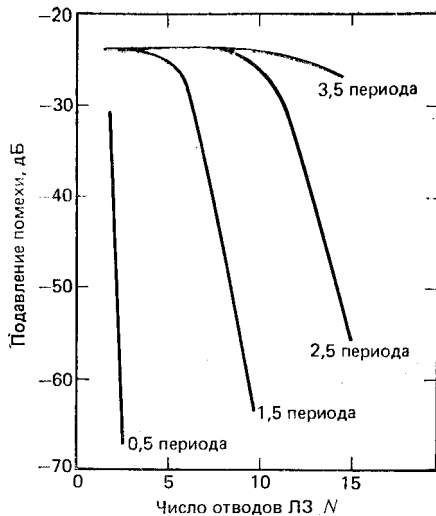


Рис. 11.25. Зависимость подавления помехи от числа отводов ЛЗ при  $VA=0,5$  для модели амплитудного рассогласования

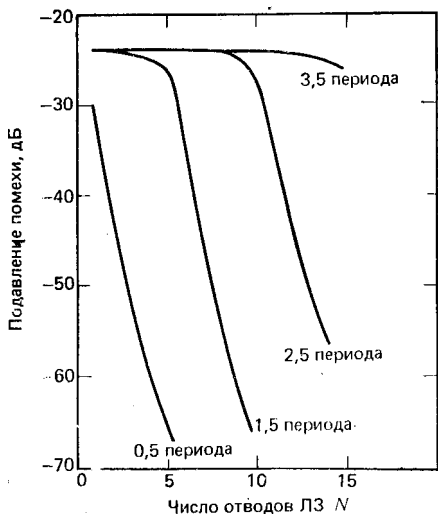


Рис. 11.26. Зависимость подавления помехи от числа отводов ЛЗ при  $VA=0,75$  для модели амплитудного рассогласования

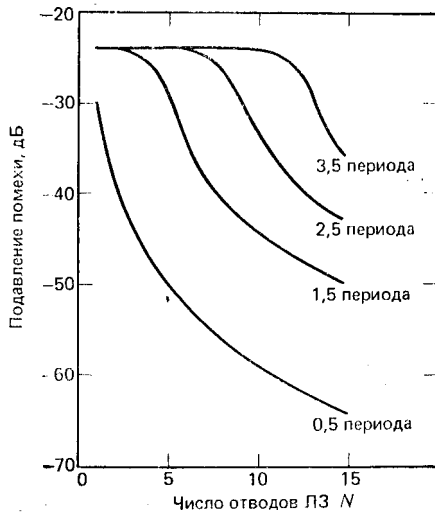


Рис. 11.27. Зависимость подавления помехи от числа отводов ЛЗ при  $VA=1,0$  для модели амплитудного рассогласования

дов пульсации АЧХ в полосе пропускания. Подавление в системе улучшается до тех пор, пока в трансверсальном фильтре не используется определенное число отводов, обеспечивающее необходимую для выбранной модели разрешающую способность фильтра. Это число отводов ЛЗ можно определить эмпирической формулой

$$N \approx \left( \frac{N_r - 1}{2} \right) [7 - 4(B\Delta)] + 1, \quad (11.115)$$

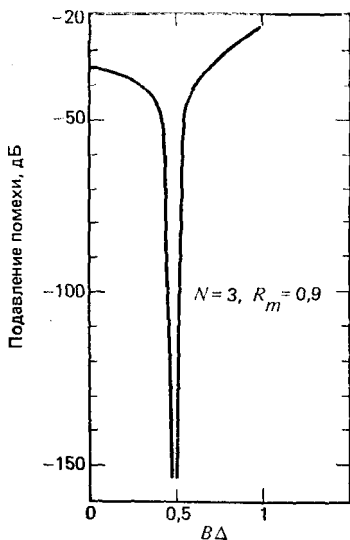


Рис. 11.28. Зависимость подавления помехи от  $B\Delta$  для модели амплитудного рассогласования с одним полупериодом пульсаций

где  $N_r$  — число полупериодов пульсаций АЧХ в рассматриваемой модели амплитудного рассогласования. При  $N > 1$  улучшение эффективности подавления помехи за счет использования дополнительных отводов ЛЗ будет зависеть от того, насколько хорошо в результирующей частотной характеристике трансверсального фильтра учитываются изменения амплитуды и фазы принятой модели межканального рассогласования. Поскольку разрешающая способность трансверсального фильтра зависит от параметра  $B\Delta$ , то при обоснованном выборе последнего можно быть уверенным в том, что увеличение числа отводов ЛЗ будет обеспечивать более точное согласование (и, следовательно, значительное улучшение эффективности

подавления помехи). В то же время неудачный выбор параметра  $B\Delta$  приведет к очень плохому согласованию даже при использовании дополнительного числа отводов ЛЗ.

Вычисляя обратное преобразование Фурье  $\mathcal{F}^{-1}\{A(\omega)\}$  для АЧХ (11.106), получаем функцию вида

$$f(t) = s(t) + Ks(t + T_0) + Ks(t - T_0). \quad (11.116)$$

Из выражения (11.116) и результатов разд. 11.2.3 видно, что желательно выбирать  $\Delta = T_0$ , при котором  $B\Delta$  равно числу периодов пульсаций АЧХ. Это обстоятельство иллюстрируется на рис. 11.28, где показана зависимость подавления помехи от параметра  $B\Delta$  для модели амплитудного рассогласования с одним полупериодом пульсаций. Резко выраженный минимум наблюдается при  $B\Delta = 0,5$ ,  $N = 3$  и  $R_m = 0,9$ .

Если число периодов пульсаций превышает единицу, то указанное правило может привести к ложному заключению о том, что  $B\Delta$  должно превосходить единицу. Предположим, например, что в модели рассогласования имеются два периода пульсаций. Положив  $B\Delta = 2$  (соответственно  $B_f = 0,5 B$ ), в полосе пропускания получим два периода частотной характеристики трансверсального фильтра. В этом случае отсутствует возможность независимой подстройки частотной характе-

ристики фильтра во всей полосе частот  $B$ , что ограничивает возможности широкополосной обработки сигналов. Поэтому, если число периодов пульсаций превышает единицу, то лучше всего положить  $B\Delta = 1$  и примириться с получаемой при этом эффективностью подавления помехи, либо увеличить число отводов ЛЗ.

### 11.3.3. Пример. Эффекты межканального фазового рассогласования

Будем определять фазовую погрешность функцией вида

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} A \cos \omega T_0 & \text{при } |\omega| \leq \pi B, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (11.117)$$

где  $A$  — амплитуда фазовых пульсаций в градусах. Эта модель аналогична модели амплитудных пульсаций (11.106).

Поскольку

$$v_k = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} \exp(j\{A \cos \omega T_0 + \omega k \Delta\}) d\omega \quad \text{при } k = -N, \dots, 0, \dots, N, \quad (11.118)$$

введя обозначения

$$f(K, \text{sgn}) \triangleq \frac{\sin \pi [K + \text{sgn} \cdot (i - (N+1)) B\Delta]}{\pi [K + \text{sgn} \cdot (i - (N+1)) B\Delta]},$$

$$g(K) \triangleq f(K, +) + f(K, -)$$

и выполнив интегрирование, можно показать, что

$$v_i = J_0(A) f(0, +) + j J_1(A) g\left[\frac{2n+1}{2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ J_{2k}(A) g[k(2n+1)] + j J_{2k+1}(A) g\left[(2k+1)\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right] \right\}, \quad (11.119)$$

где  $J_n(\cdot)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка при  $i = 1, 2, \dots, 2N+1$ .

### 11.3.4. Результаты подавления помехи для выбранной модели межканального фазового рассогласования

Здесь приводятся результаты расчетов на ЭВМ эффективности подавления помехи для модели межканального фазового рассогласования, рассмотренной в предыдущем разделе. Эти результаты представлены в виде графиков на рис. 11.29—11.31 при  $A = 5^\circ$  и  $B\Delta = 0,2; 0,45$  и 1. Каждый рисунок иллюстрирует зависимость уровня подавления помехи от числа отводов ЛЗ трансверсального фильтра при определенном числе периодов пульсаций ФЧХ в полосе пропускания. Можно заметить, что общий характер кривых на рис. 11.29—11.31 совпадает с характером кривых на рис. 11.24—11.27, полученных ранее для межканального амплитудного рассогласования. Как и в случае амплитуд-

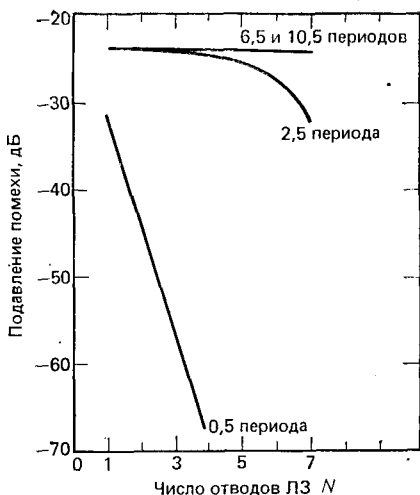


Рис. 11.29

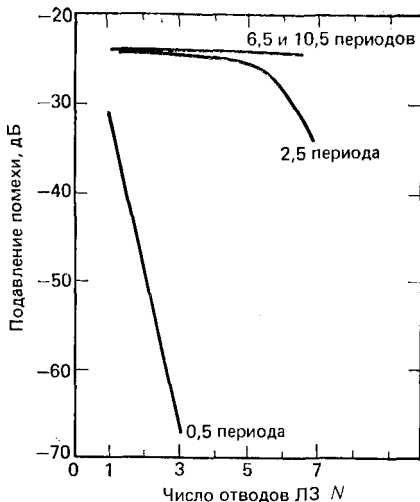


Рис. 11.30

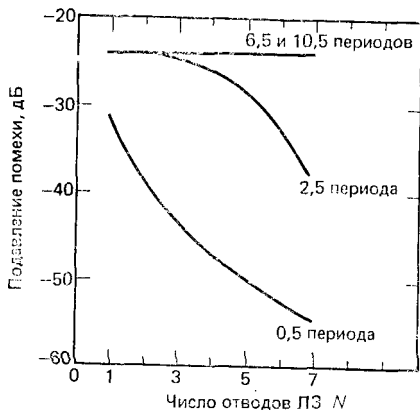


Рис. 11.31

Рис. 11.29. Зависимость подавления помехи от числа отводов ЛЗ при  $B\Delta=0,2$  для модели фазового рассогласования

Рис. 11.30. Зависимость подавления помехи от числа отводов ЛЗ при  $B\Delta=0,45$  для модели фазового рассогласования

Рис. 11.31. Зависимость подавления помехи от числа отводов ЛЗ при  $B\Delta=1,0$  для модели фазового рассогласования

ного рассогласования, наилучшие результаты можно получить, когда число периодов пульсаций характеристики, определяющей рассогласование, наименьшее.

#### 11.4. ВЫВОДЫ

Трансверсальный фильтр на базе многоотводной ЛЗ можно рассматривать в качестве практического средства получения изменяемых частотных характеристик, необходимых при обработке широкополосных сигналов в адаптивных антенных решетках. В данной главе найдены идеальные характеристики каналов двухэлементной антенной решетки. Показано, что для обработки широкополосных сигналов без искажений необходима линейность ФЧХ каналов и практически плос-

кая форма АЧХ в относительной полосе частот 40%. Установлено, что обработка с использованием разложения на квадратурные составляющие может обеспечить достаточную эффективность для сигналов с относительной шириной полосы частот до 20%. При необходимости обработки сигналов с относительной шириной полосы, превышающей 20%, следует использовать трансверсальный фильтр на базе многоотводной ЛЗ. Этот фильтр обеспечивает возможность компенсации таких нежелательных эффектов, как:

- 1) многолучевое распространение;
- 2) межканальное рассогласование;
- 3) задержка при распространении по раскрыву решетки.

При многолучевом распространении помехи желательно, чтобы время межотводной задержки в ЛЗ было примерно равно времени запаздывания дополнительного луча. Если время межотводной задержки в ЛЗ превышает время задержки для дополнительного луча более чем на 30% и если к тому же время задержки для такого луча значительно, то будет существенно ухудшаться эффективность подавления помехи. Если время межотводной задержки слишком мало, то для эффективного подавления помехи потребуются дополнительные отводы ЛЗ. Поскольку при малых временах задержки дополнительного луча не происходит существенного ухудшения эффективности системы, то для конкретного применения целесообразно определить наиболее вероятные значения такой задержки и использовать эти значения для компенсации помехи (в предположении, что  $BD \leq 1$ ). При коэффициенте отражения дополнительного луча  $\rho_m = 0,5$ ,  $BD_m = 0,45$  и использовании пяти отводов ЛЗ можно обеспечить подавление помехи 30 дБ.

Результаты расчетов, представленные на рис. 11.19 и 11.20, свидетельствуют о том, что эффекты, связанные с задержкой распространения по раскрыву, могут быть скомпенсированы более просто, чем эффекты многолучевого распространения. Это объясняется тем, что при многолучевом распространении в каждом канале присутствуют два (или более) сигнала (практически не коррелированных, если  $BD_m \gg 1$ ), в связи с чем для удовлетворительной компенсации требуется дополнительное число степеней свободы.

Решение задачи межканального рассогласования сводится к получению характеристик трансверсального фильтра, учитывающих амплитудные и фазовые рассогласования каналов системы. Можно ожидать, что чем значительнее межканальное рассогласование, тем труднее добиться требуемой эффективности компенсации. В частности, крайне нежелательно, чтобы в полосе пропускания было больше 2,5 периодов пульсаций, поскольку при этом приемлемый уровень компенсации может быть обеспечен при использовании семи отводов ЛЗ. Может оказаться, что время межотводной задержки  $\Delta$  в ЛЗ, выбранное наилучшим образом для компенсации эффектов межканального рассогласования, будет существенно отличаться от значения  $\Delta$  для компенсации эффектов многолучевого распространения. Если это случится, то для получения требуемого уровня компенсации эффектов как многолучевого распространения, так и межканального рассогласования значение  $\Delta$  следует выбирать из компромиссных соображений.

## ЗАДАЧИ

### Идеальные неискажающие АЧХ

1. Из выражений (11.5) и (11.6) следует, что  $|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)|$ , откуда можно получить уравнения

$$f_1 \{|H_1|, \alpha_1, \alpha_2, \theta_s\} = \exp(-j\omega T_1),$$

$$f_2 \{|H_1|, \alpha_1, \alpha_2, \theta_i\} = 0.$$

А. Покажите, что  $\alpha_1(\omega)$  и  $\alpha_2(\omega)$  должны удовлетворять условиям

$$\alpha_2(\omega) - \alpha_1(\omega) = \frac{\pi\omega}{\omega_0} \sin \theta_i \pm n\pi,$$

где  $n$  — нечетное целое число.

Б. Покажите, что при  $f_1 \{\cdot\} = \exp(-j\omega T_1)$  справедливо (11.7).

В. Покажите, что при угловом положении источника, соответствующем  $f_1 \{\cdot\} = \exp(-j\omega T_1)$ , справедливо (11.8).

Г. Покажите, что из (11.8) и результатов п. А вытекает (11.9).

2. Для трехэлементной линейной антенной решетки частотная характеристика для полезного сигнала имеет вид

$$H_d(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) \exp\left(-j \frac{\omega d}{c} \sin \theta_s\right) + H_3(\omega) \exp\left(-j \frac{\omega 2d}{c} \sin \theta_s\right).$$

Аналогично частотная характеристика для помехи имеет вид

$$H_I(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) \exp\left(-j \frac{\omega d}{c} \sin \theta_i\right) + H_3(\omega) \exp\left(-j \frac{\omega 2d}{c} \sin \theta_i\right).$$

Определите, какими должны быть требования к частотным характеристикам трехэлементной решетки, чтобы выполнялись условия (11.3) и (11.4).

3. Соотношения для преобразования Гильберта. Докажите справедливость соотношений (11.19)—(11.22).

4. Используя выражения (11.53), (11.54) и результаты (11.55)—(11.57), покажите, что  $R_{ee}$  определяется формулой (11.58).

5. Получите выражения для корреляционных функций (11.70)—(11.72), когда условия приема сигнала определяются (11.67) и (11.68).

6. Покажите, что если значение произведения  $B\Delta$  приближается к нулю, то корреляционная матрица  $\mathbf{R}_{xx}(0)$  [элементы которой определяются (11.72)] стремится к вырожденной, так что оказывается невозможным получить обратную матрицу.

7. Для фазовой погрешности  $\varphi(\omega)$ , определяемой (11.117), покажите, что выражение (11.119) для  $v_k$  следует из (11.118).

### Компенсация фазовых погрешностей каналов

8. Пусть фазовая погрешность определяется соотношением

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} A \left[ 1 - \cos \frac{2\omega}{B} \right] & \text{при } |\omega| \leq \pi B, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажите, что  $v_k$  из (11.118) определяется выражением

$$v_k = \int_{-\pi B}^{\pi B} \left[ \cos \left\{ A \left( 1 - \cos \omega \frac{2}{B} \right) \right\} + j \sin \left\{ A \left( 1 - \cos \omega \frac{2}{B} \right) \right\} \right] \exp(j\omega k\Delta) d\omega.$$



Используя тригонометрические соотношения

$$\begin{aligned}\cos \left[ A - A \cos \omega \frac{2}{B} \right] &= \cos A \cos \left[ A \cos \omega \frac{2}{B} \right] + \sin A \sin \left[ A \cos \omega \frac{2}{B} \right], \\ \sin \left[ A - A \cos \omega \frac{2}{B} \right] &= \sin A \cos \left[ A \cos \omega \frac{2}{B} \right] - \cos A \sin \left[ A \cos \omega \frac{2}{B} \right]\end{aligned}$$

и тот факт, что

$$\begin{aligned}\cos (A \cos \omega T_0) &= J_0(A) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(A) \cos [(2k) \omega T_0], \\ \sin (A \cos \omega T_0) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(A) \cos [(2k+1) \omega T_0],\end{aligned}$$

где  $J_n(\cdot)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка,

$$\begin{aligned}f(n, \text{sgn}) &\triangleq \frac{\sin \pi [n + \text{sgn} \cdot (i - (N+1)) B \Delta]}{\pi [n + \text{sgn} \cdot (i - (N+1)) B \Delta]}, \\ g(n) &\triangleq f(n, +) + f(n, -),\end{aligned}$$

покажите, что

$$\begin{aligned}v_i &= J_0(A) f(0, +) [\cos A + j \sin A] + J_1(A) \cdot g(2) [\sin A - j \cos A] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \{ J_{2k}(A) \cdot g(4k) [\cos A + j \sin A] + J_{2k+1}(A) \cdot g[(2k+1) 2] \times \\ &\times [\sin A - j \cos A] \} \text{ при } i = 1, 2, \dots, 2N+1.\end{aligned}$$

9. Пусть фазовая погрешность определяется соотношением

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} b\omega^2 (\pi B - |\omega|) & \text{при } |\omega| \leq \pi B, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как и ранее,

$$v_i = \frac{1}{2\pi B} \int_{-\pi B}^{\pi B} \exp \{ j [b\omega^2 (\pi B - |\omega|) + \omega i \Delta] \} d\omega.$$

Обозначая  $u = \omega / (\pi B)$ , применяя формулу Эйлера и пренебрегая всеми нечетными компонентами результирующего выражения, покажите, что

$$v_i = \int_0^1 \exp \left\{ j \left[ \frac{27A}{4} u^2 (1-u) \right] \right\} \cos \pi [u (i - (N+1)) B \Delta] du,$$

где  $A = 4b (\pi B/3)^3$  при  $i = 1, 2, \dots, 2N+1$ . Значение  $v_i$  можно определить численным интегрированием.

## Глава 12. НОВЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

Ввиду того что отразить результаты всех значительных работ в области адаптивных антенных решеток невозможно, в этой главе ограничимся обзором лишь нескольких новых многообещающих направлений исследований. Два раздела этой главы посвящены не рассмотрен-

ным ранее алгоритмам адаптации, имеющим ряд полезных свойств в некоторых практических случаях. Одним из таких алгоритмов является алгоритм получения спектральных оценок методом максимума энтропии (ММЭ), второй связан с рекурсивным байесовским подходом к обнаружению и оценке. Третий раздел главы посвящен частично адаптивным антенным решеткам. Частично адаптивные решетки представляют интерес потому, что в них управляется только часть элементов, в силу чего для получения приемлемой эффективности требуется меньшее число процессоров.

## 12.1. ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРА МЕТОДОМ МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ

В гл. 3 было показано, что широкополосная оптимальная обработка сигналов антенной решетки может быть определена через взаимную спектральную плотность. Поэтому операцию оценивания спектра можно считать существенной частью процедуры управления антенной решеткой. Для оценивания спектра можно применить алгоритм ММЭ [1—4], хорошо известный геофизикам и получивший распространение в последние годы при обработке радиолокационных, гидролокационных и речевых сигналов [5—8]. Кроме того, алгоритм ММЭ применяется также при оценке угловых координат с помощью антенных решеток [9—10].

Процедура оценивания спектра мощности, основанная на алгоритме ММЭ, дает более высокую разрешающую способность, чем та, которая может быть получена обычными методами при ограниченной априорной информации о сигнале. Эта информация может быть представлена в виде нескольких известных значений либо корреляционной функции, либо рассматриваемого процесса. Высокая разрешающая способность достигается продолжением корреляционной функции за пределы интервала, на котором она известна, так чтобы максимизировалась энтропия соответствующего спектра на каждом шаге экстраполяции [1, 11]. Если корреляционная функция неизвестна, то спектр можно оценить непосредственно по принятым данным, используя метод, предложенный в [12]. Как сообщается в [13], этот подход дает хорошую оценку спектра при сравнительно небольшом объеме исходных данных и обеспечивает быструю сходимость.

В наиболее простой формулировке принцип максимума энтропии при оценке спектра скалярного стационарного случайного процесса сводится к задаче нахождения спектральной плотности  $\varphi_{xx}(f)$ , максимизирующей энтропию:

$$\Theta = \int_{-W}^W \ln \varphi_{xx}(f) df, \quad (12.1)$$

при условии, что  $\varphi_{xx}(f)$  удовлетворяет системе  $N$  линейных уравнений вида

$$\int_{-W}^W \varphi_{xx}(f) G_n(f) df = g_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12.2)$$

Предполагается, что выборочные значения случайного процесса поступают с периодом  $\Delta t$ , соответствующим частоте Найквиста  $W = 1/(2\Delta t)$ , настолько высокой, что спектр процесса сосредоточен в интервале  $[-W, W]$ . Функции  $G_n(f)$  считаются известными, а  $g_n$  получаются в результате измерений.

Далее будут рассмотрены два случая оценивания спектра: при частично известной и при неизвестной корреляционных функциях.

### 12.1.1. Частично известная корреляционная функция

Пусть  $x(t)$  — стационарная случайная последовательность с корреляционной функцией,  $N$  значений  $\{r(0), r(1), \dots, r(N-1)\}$  которой известны. Необходимо оценить значение  $r(N)$ . Из основных свойств корреляционной функции следует, что  $r(N)$  должно быть таким, чтобы матрица размером  $(N+1) \times (N+1)$

$$\mathbf{R}_N \triangleq \begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \dots & r(-N) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(1-N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(N) & r(N-1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

была положительно полуопределенной (т. е. все главные миноры  $\mathbf{R}_N$  неотрицательны). Так как  $\det(\mathbf{R}_N)$  является квадратичной функцией от  $r(N)$ , то имеется лишь два значения  $r(N)$ , при которых определитель матрицы  $\mathbf{R}_N$  равен нулю. Эти два значения и являются границами интервала, в котором должна находиться оценка  $r(N)$ . При использовании процедуры ММЭ выбирается такое значение  $r(N)$ , которое максимизирует  $\det(\mathbf{R}_N)$ . При гауссовских случайных процессах эта процедура эквивалентна максимизации (12.1) при ограничениях вида [12]

$$r(n) = \int_{-W}^W \varphi_{xx}(f) \exp(j2\pi fn\Delta t) df, \quad -N \leq n \leq N. \quad (12.4)$$

Задача максимизации  $\det(\mathbf{R}_N)$  эквивалентна задаче нахождения параметров прогнозирующего фильтра, а эти параметры играют важную роль в спектральной оценке ММЭ. Рассмотрим их влияние на спектральную оценку ММЭ при частично известной корреляционной функции. Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  представляют собой  $N$  выборочных значений процесса  $x(t)$ , полученных через промежутки времени  $\Delta t$ . Линейная оценка (прогноз по предыдущим выборочным значениям)  $x_N$  может быть записана в виде

$$\hat{x}_N = - \sum_{i=1}^N a(N, i) x_{N-i}. \quad (12.5)$$

Ошибка этой оценки равна

$$\varepsilon_N = x_N - \hat{x}_N = x_N + \sum_{i=1}^N a(N, i) x_{N-i}. \quad (12.6)$$

Выражение (12.6) можно переписать в матричном виде как

$$\varepsilon_N = \mathbf{a}_N^T \mathbf{x}^T, \quad (12.7)$$

где  $\mathbf{x}^T = [x_N, x_{N-1}, \dots, x_0]$ ;  $\mathbf{a}_N^T = [1, a(N, 1), \dots, a(N, N)]$ .

Коэффициент  $a(N, N) = C_N$  называется коэффициентом отражения порядка  $N$ . Таким образом, ошибка прогноза  $\varepsilon_N$  может рассматриваться как выходной сигнал нерекурсивного фильтра  $N$ -го порядка, коэффициенты которого даются вектором  $\mathbf{a}_N$ . Мощность выходного сигнала фильтра определяется соотношением

$$P_N = E \{ \varepsilon_N^2 \}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим задачу минимизации (12.8) посредством выбора подходящего значения вектора  $\mathbf{a}_N$ . Для получения оценки  $\widehat{x}_N$  с минимальной СКО необходимо сделать так, чтобы ошибка была ортогональна прошлым значениям

$$E \{ x_i \varepsilon_N \} = 0 \quad \text{при } i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (12.9)$$

а значит, и прошлым значениям ошибки

$$E \{ \varepsilon_N \varepsilon_{N-k} \} = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (12.10)$$

Из выражений (12.8) и (12.10) следует, что ошибка прогноза является дискретным белым шумом с мощностью  $P_N$  [или спектральной плотностью  $P_N/(2W)$ , где  $W = 1/(2\Delta t)$ ]. Таким образом, фильтр, на выходе которого получается  $\varepsilon_N$ , можно рассматривать как выбеливающий

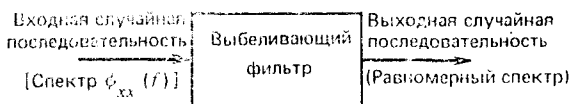


Рис. 12.1. Выбеливающий фильтр

фильтр, превращающий дискретные входные значения  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$  в белый шум со спектральной плотностью мощности  $P_N/(2W)$  (рис. 12.1). Отсюда следует, что оценка  $\widehat{\varphi}_{xx}(f)$  входного спектра  $\varphi_{xx}(f)$  дается соотношением

$$\widehat{\varphi}_{xx}(f) = \frac{P_N/(2W)}{\left| 1 + \sum_{n=1}^N a(N, n) \exp(-j2\pi f n \Delta t) \right|^2}, \quad (12.11)$$

где знаменатель — квадрат частотной характеристики указанного выбеливающего фильтра. Выражение (12.11) определяет оценку ММЭ  $\widehat{\varphi}_{xx}(f)$  при известных коэффициентах  $a(N, n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  и известной мощности  $P_N$ .

Соотношение между коэффициентами  $a(N, n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , мощностью  $P_N$  и значениями корреляционной функции  $r(-N)$ ,  $r(-N+1)$ ,  $\dots$ ,  $r(0)$ ,  $\dots$ ,  $r(N-1)$ ,  $r(N)$  определяется известным матричным

уравнением, которое можно получить, максимизируя энтропию (12.1) при ограничениях (12.4) [12]:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \dots & r(-N) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(-N+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(N) & r(N-1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(N, 1) \\ \vdots \\ a(N, N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.12)$$

Зная значения корреляционной функции  $r(-N)$ ,  $r(-N+1)$ , ...,  $r(0)$ , ...,  $r(N-1)$ ,  $r(N)$  из (12.12) можно определить коэффициенты  $a(N, n)$  и мощность  $P_N$ . Уравнение (12.12) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}_N \mathbf{a}_N = \begin{bmatrix} P_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{a}_N = \mathbf{R}_N^{-1} \begin{bmatrix} P_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.13)$$

Пусть

$$\mathbf{R}_N^{-1} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix}. \quad (12.14)$$

Тогда

$$\mathbf{a}_N^T = \left[ 1, \frac{z_{21}}{z_{11}}, \frac{z_{31}}{z_{11}}, \dots, \frac{z_{N1}}{z_{11}} \right]. \quad (12.15)$$

В работе [2] приводится также удобная рекуррентная процедура определения составляющих вектора  $\mathbf{a}_N$ .

Рассмотрим теперь вопрос о продолжении корреляционной функции. Сначала предположим, что известны значения  $r(0)$  и  $r(1)$  и требуется экстраполировать корреляционную функцию и получить неизвестное значение  $r(2)$ . Матричное уравнение (12.12) при известных  $r(0)$  и  $r(1)$  можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(-1) \\ r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12.16)$$

где  $r(-1) = r^*(1)$ . Для того чтобы определить  $\widehat{r}(2)$ , добавим к (12.16) еще одно уравнение, содержащее  $\widehat{r}(2)$ , получая в результате [2].

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \widehat{r}(-2) \\ r(1) & r(0) & r(-1) \\ \widehat{r}(2) & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1, 1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.17)$$

Решая (12.17) относительно  $\widehat{r}(2)$ , получаем  $\widehat{r}(2) + a(1, 1)r(1) = 0$ , откуда

$$\widehat{r}(2) = -a(1, 1)r(1) = C_1 r(1). \quad (12.18)$$

Распространение этой процедуры экстраполяции на последующие неизвестные значения корреляционной функции сводится просто к увеличению размеров корреляционной матрицы  $R_{xx}$  и добавлению нулевых составляющих к векторам, входящим в уравнение (12.12). Так как к вектору  $a_N$  добавляются только нулевые составляющие, из (12.11) следует, что при такой экстраполяции спектральная оценка не меняется.

### 12.1.2. Неизвестная корреляционная функция

В предыдущем разделе предполагалось, что первые  $N$  значений корреляционной функции известны точно. Однако очень часто известны лишь отсчеты исходного процесса и поэтому значения корреляционной функции приходится оценивать по принятым данным. Эти оценки очень часто получают по формуле

$$\hat{r}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-\tau} x_i x_{i+\tau}^* \quad (12.19)$$

В формуле (12.19), которая определяет оценку корреляционной функции по конечному множеству выборочных значений на интервале  $[1, M]$ , неявно предполагается, что значения, взятые вне этого интервала, равны нулю. При применении методов преобразования Фурье к таким данным предполагается, что вне указанного интервала выборочные значения периодически повторяются. Эти необоснованные предположения относительно неизвестных данных приводят к так называемым «краевым эффектам», которые можно избежать при использовании метода максимума энтропии, не основанного на каких-либо предположениях относительно неизмеренных данных.

В том случае, когда корреляционная функция неизвестна, подход к оцениванию спектра, основанный на ММЭ, состоит в оценивании коэффициентов фильтра, прогнозирующего неизвестные значения процесса. Затем полученные коэффициенты используют для оценивания спектра. Этот подход основан на теореме, согласно которой существует взаимно однозначное соответствие между корреляционной функцией и последовательностью чисел  $\{r(0), C_1, C_2, \dots, C_N\}$  [12].

Для того чтобы получить  $\{r(0), C_1, C_2, \dots, C_N\}$ , сначала рассмотрим задачу оценки  $r(0)$ . В качестве оценки  $\hat{r}(0)$  берется просто средний квадрат выборочных значений

$$\hat{r}(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \quad (12.20)$$

Найдем теперь оценку параметра  $a(1,1)$  фильтра, осуществляющего прогноз последующего значения по одному отсчету. Задача сводится к определению нерекурсивного фильтра второго порядка (с первым коэффициентом, равным 1), дающего минимальную среднюю мощность выходного сигнала при поступлении на его вход исходных выборочных значений. Для «прямого» фильтра второго порядка, схематически

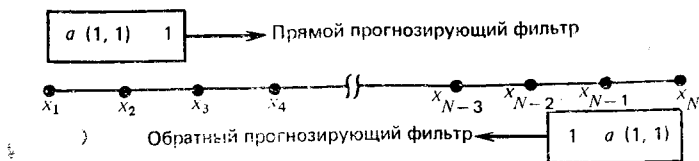


Рис. 12.2. Схематическое представление операций, осуществляемых прямым и обратным прогнозирующими фильтрами второго порядка

изображенного на рис. 12.2, средняя выходная мощность определяется формулой

$$P_i^f = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} |x_{i+1} + a(1, 1) x_i|^2. \quad (12.21)$$

Изменяя порядок поступления исходных данных на обратный, получаем «обратный» прогнозирующий фильтр, средняя мощность ошибки для которого

$$P_i^b = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} |x_i + a^*(1, 1) x_{i+1}|^2. \quad (12.22)$$

Поскольку нет никаких оснований предпочитать прямой фильтр обратному и так как (12.21) и (12.22) являются различными оценками одной и той же величины, то, усредняя эти оценки, можно получить новую оценку (которой к тому же гарантируется, что коэффициент  $a(1,1)$  по модулю не превышает единицу):

$$P_1 = \frac{1}{2} (P_i^f + P_i^b) = \frac{1}{2(N-1)} \times \left[ \sum_{i=1}^{N-1} |x_{i+1} + a(1, 1) x_i|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} |x_i + a^*(1, 1) x_{i+1}|^2 \right]. \quad (12.23)$$

Подбирая соответствующим образом коэффициент  $a(1,1)$ , можно получить минимальное значение  $P_1$ . Приравнявая нулю производную  $P_1$  по  $a(1, 1)$ , можно показать, что минимизирующее значение  $a(1,1)$  определяется как [14]

$$a(1, 1) = \frac{-2 \sum_{i=1}^{N-1} x_i^* x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{N-1} (|x_i|^2 + |x_{i+1}|^2)}. \quad (12.24)$$

Зная  $\hat{r}(0)$  и  $a(1, 1)$ , получаем  $\hat{r}(1)$  из уравнения (12.12), которое в данном случае примет вид

$$\begin{bmatrix} \hat{r}(0) & \hat{r}(-1) \\ \hat{r}(1) & \hat{r}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12.25)$$

откуда

$$\hat{r}(1) = -a(1, 1)\hat{r}(0), \quad (12.26)$$

а мощность  $P_1$  составляет

$$P_1 = \hat{r}(0) [1 - |a(1, 1)|^2]. \quad (12.27)$$

Из (12.27) следует неравенство  $|a(1, 1)| \leq 1$ , которое является необходимым условием для прогнозирующего фильтра.

Используя полученные выражения для фильтра второго порядка, рассмотрим теперь способ нахождения коэффициентов фильтра третьего порядка. Матричное уравнение (12.12) в этом случае примет вид

$$\begin{bmatrix} \hat{r}(0) & \hat{r}(-1) & \hat{r}(-2) \\ \hat{r}(1) & \hat{r}(0) & \hat{r}(-1) \\ \hat{r}(2) & \hat{r}(1) & \hat{r}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(2, 1) \\ a(2, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.28)$$

Из (12.28) следует, что

$$\hat{r}(1) + a(2, 1)\hat{r}(0) + a(2, 2)\hat{r}^*(1) = 0. \quad (12.29)$$

Подставляя (12.26) в (12.29), получаем

$$a(2, 1) = a(1, 1) + a(2, 2)a^*(1, 1). \quad (12.30)$$

Соответствующее значение выходной мощности есть

$$P_2 = P_1 (1 - |a(2, 2)|^2). \quad (12.31)$$

Следовательно, вектор коэффициентов фильтра третьего порядка примет вид

$$\mathbf{a}_2^T = [1, a(1, 1) + a(2, 2)a^*(1, 1), a(2, 2)]. \quad (12.32)$$

Выражение для мощности на выходе фильтра третьего порядка можно записать в виде (12.23), т. е.  $P_2 = \frac{1}{2} (P_2^f + P_2^b)$ , где теперь

$$P_2^f = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} |x_{i+2} + a(2, 1)x_{i+1} + a(2, 2)x_i|^2, \quad (12.33)$$

$$P_2^b = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} |x_i + a^*(2, 1)x_{i+1} + a^*(2, 2)x_{i+2}|^2. \quad (12.34)$$

Так как  $a(2, 1)$  определяется соотношением (12.30) и  $a(1, 1)$  уже определено, то минимизация  $P_2$  может быть достигнута только изменением  $a(2, 2) = C_2$ . Как и в случае фильтра второго порядка, величина  $a(2, 2)$  по модулю не превышает единицы, что необходимо для того, чтобы выражение (12.5) определяло прогнозирующий фильтр. Соответствующая корреляционная матрица в этом случае будет неотрицательной.

Аналогично может быть получен фильтр четвертого порядка с помощью изменения только  $a(3, 3)$  с целью минимизации  $P_3$ . Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будут определены все коэффициенты  $a(N, n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  и получена оценка ММЭ спектра по



(12.11). Общая формула для коэффициентов  $C_N = a(N, N)$  приведена в работе [14]. Выражения (12.30), (12.31) в общем случае можно записать в виде

$$a(N, k) = a(N-1, k) + a(N, N) a^*(N-1, N-k), \quad (12.35)$$

$$P_N = P_{N-1} [1 - |a(N, N)|^2]. \quad (12.36)$$

Поскольку  $|a(N, N)| \leq 1$ , то  $0 \leq P_N \leq P_{N-1}$ , поэтому ошибка уменьшается с увеличением порядка фильтра  $N$ . Выбор  $N$  определяется требуемой разрешающей способностью по частоте.

В работе [4] показано, как с помощью коэффициентов  $a(m, k)$  и соответствующих значений  $P_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ , где  $L \leq N-1$  — порядок фильтра, найти матрицу, обратную корреляционной матрице  $R_{xx}$ . Такая оценка ММЭ матрицы  $R_{xx}^{-1}$  отличается от обратной выборочной корреляционной матрицы, рассмотренной в гл. 6, и есть оснований считать, что оценка ММЭ  $\widehat{R}_{xx}^{-1}$  сходится к  $R_{xx}^{-1}$  быстрее, чем оценка НОМ. Эта быстрая сходимость делает этот алгоритм особенно привлекательным при малом числе независимых выборочных значений.

### 12.1.3. Распространение полученных результатов на многоканальное оценивание спектра

Так как на выходе антенной решетки появляются многоканальные комплексные сигналы, важной задачей является обобщение одноканального метода, рассмотренного в разд. 12.1.2, для многоканальной обработки с целью использования этого метода в адаптивных антенных решетках. Имеется несколько вариантов применения метода максимума энтропии для многоканальных сигналов [16—22]. Здесь будет рассмотрен вариант, приведенный в работах [23, 24].

Предположим, что имеется  $N$  отсчетов  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$   $p$ -канального векторного процесса  $x(t)$ . Линейный прогноз значения  $x_N$ , основанный на предыдущих отсчетах, можно представить в виде

$$\widehat{x}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}^\dagger(N, i) x_{N-i}, \quad (12.37)$$

где  $\mathbf{A}(N, i)$  — матричные коэффициенты прямого прогнозирующего фильтра  $N$ -го порядка. Ошибка прогноза определяется формулой

$$\epsilon_N = x_N - \widehat{x}_N = x_N - \sum_{i=1}^N \mathbf{A}^\dagger(N, i) x_{N-i} = \mathbf{A}_N^\dagger x_f, \quad (12.38)$$

где

$$\mathbf{A}_N^\dagger = [\mathbf{I}, \mathbf{A}^\dagger(N, 1), \mathbf{A}^\dagger(N, 2), \dots, \mathbf{A}^\dagger(N, N)],$$

$$x_f^T = [x_N^T, x_{N-1}^T, \dots, x_0^T].$$

Для обратного прогнозирующего фильтра матричные коэффициенты будут другими, и поэтому ошибка будет записываться в виде

$$b_N = x_0 - \widehat{x}_0 = x_0 - \sum_{i=1}^N \mathbf{B}^\dagger(N, i) x_i = \mathbf{B}_N^\dagger x_b. \quad (12.39)$$

Неравенство  $\mathbf{A}(N, i) \neq \mathbf{B}_N^\dagger(N, i)$  показывает отличие многоканальной обработки от одноканальной, при которой коэффициенты обратного фильтра были комплексно сопряжены с соответствующими коэффициентами прямого фильтра.

Матричное обобщение уравнения (12.12) примет вид

$$\mathbf{R}^f \mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}(-1) \dots \mathbf{R}(-N) \\ \mathbf{R}(1) & \mathbf{R}(0) \dots \mathbf{R}(-N+1) \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{R}(N) & \mathbf{R}(N-1) \dots \mathbf{R}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(N, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(N, N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_N^f \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (12.40)$$

где подматрицы  $\mathbf{R}(k)$  размером  $p \times p$  определяются соотношениями

$$\mathbf{R}(k) = E\{\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^\dagger(t - k\Delta t)\}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (12.41)$$

так что

$$\mathbf{R}(-k) = \mathbf{R}^\dagger(k). \quad (12.42)$$

Матрица  $\mathbf{P}_N^f$  для прямого прогнозирующего фильтра, удовлетворяющая (12.40), записывается как

$$\mathbf{P}_N^f = E\{\mathbf{e}_N \mathbf{e}_N^\dagger\} = \mathbf{A}_N^\dagger \mathbf{R}^f \mathbf{A}_N. \quad (12.43)$$

Уравнение для обратного фильтра имеет вид

$$\mathbf{R}^b \mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}(1) & \mathbf{R}(N) \\ \mathbf{R}(-1) & \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}(-N) & \mathbf{R}(-N+1) & \mathbf{R}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{B}(N-1) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(N, N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_N^b \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (12.44)$$

а матрица  $\mathbf{P}_N^b$ , удовлетворяющая соотношению (12.44), определяется формулой

$$\mathbf{P}_N^b = E\{\mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^\dagger\} = \mathbf{B}_N^\dagger \mathbf{R}^b \mathbf{B}_N. \quad (12.45)$$

Матричные коэффициенты  $\mathbf{A}(N, N)$  и  $\mathbf{B}(N, N)$ , называемые матричными прямыми и обратными коэффициентами отражения, будут обозначаться как

$$\mathbf{C}_N^f = \mathbf{A}(N, N), \quad \mathbf{C}_N^b = \mathbf{B}(N, N). \quad (12.46)$$

Оценка по методу максимума энтропии матрицы спектральных плотностей мощности может быть вычислена как через коэффициенты прямого фильтра:

$$\Phi_{xx}(f) = \Delta t \left[ \mathbf{A}^{-1} \left( \frac{1}{z} \right) \right]^\dagger \mathbf{P}_N^f \left[ \mathbf{A}^{-1} \left( \frac{1}{z} \right) \right], \quad (12.47)$$

где

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{I} + \mathbf{A}(N, 1)z + \dots + \mathbf{A}(N, N)z^N \quad (12.48)$$

и  $z \triangleq e^{-j2\pi f \Delta t}$ , так и через коэффициенты обратного фильтра:

$$\Phi_{xx}(f) = \Delta t [\mathbf{B}^{-1}(z)]^\dagger \mathbf{P}_N^b [\mathbf{B}^{-1}(z)], \quad (12.49)$$

где

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{I} + \mathbf{B}(N, 1)z + \dots + \mathbf{B}(N, N)z^N. \quad (12.50)$$

Прямой и обратный коэффициенты отражения связаны между собой соотношением

$$\mathbf{C}_N^f = (\mathbf{P}_{N-1}^b)^{-1} (\mathbf{C}_N^b)^\dagger \mathbf{P}_{N-1}^f \quad \text{или} \quad \mathbf{C}_N^b = (\mathbf{P}_{N-1}^f)^{-1} (\mathbf{C}_N^f)^\dagger \mathbf{P}_{N-1}^b. \quad (12.51)$$

Если имеется  $N_d$  выборочных значений  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_d}\}$  наблюдаемого процесса, то для нерекурсивного фильтра порядка  $N$  существует  $M = N_d - N$  последовательных наборов исходных данных, определяющих его выходные сигналы. Эти наборы данных удобно представлять в виде векторов

$$\mathbf{x}_m^N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{m+N} \\ \mathbf{x}_{m+N-1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{m+1} \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \quad N=0, 1, \dots, N_d-1, \quad m=1, 2, \dots, M=N_d-N. \quad (12.52)$$

Выходные сигналы  $\mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v}_m$  прямого и обратного фильтров можно тогда записать в виде

$$\mathbf{u}_m = [\mathbf{A}_{N-1}^\dagger \mid \mathbf{0}] \mathbf{x}_m^N + (\mathbf{C}_N^f)^\dagger [\mathbf{0} \mid \mathbf{B}_{N-1}^\dagger] \mathbf{x}_m^N = \boldsymbol{\varepsilon}_m^N + (\mathbf{C}_N^f)^\dagger \mathbf{b}_m^N, \quad (12.53)$$

$$\mathbf{v}_m = (\mathbf{C}_N^b)^\dagger [\mathbf{A}_{N-1}^\dagger \mid \mathbf{0}] \mathbf{x}_m^N + [\mathbf{0} \mid \mathbf{B}_{N-1}^\dagger] \mathbf{x}_m^N = (\mathbf{C}_N^b)^\dagger \boldsymbol{\varepsilon}_m^N + \mathbf{b}_m^N. \quad (12.54)$$

Используя (12.51), можно переписать (12.54) в виде

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{P}_{N-1}^b \mathbf{C}_N^f \mathbf{P}_{N-1}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_m^N + \mathbf{b}_m^N. \quad (12.55)$$

Выражения (12.53) и (12.55) показывают, что выходные сигналы прямого и обратного фильтров  $N$ -го порядка зависят только от прямого коэффициента отражения  $\mathbf{C}_N^f$ . Поэтому именно этот коэффициент следует выбирать так, чтобы обеспечивался минимум выражения

$$SS(\mathbf{C}_N^f) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M K_m [\mathbf{u}_m^\dagger (\mathbf{P}_{N-1}^f)^{-1} \mathbf{u}_m + \mathbf{v}_m^\dagger (\mathbf{P}_{N-1}^b)^{-1} \mathbf{v}_m], \quad (12.56)$$

где  $K_m = 1/M$ . Уравнение для нахождения оптимального значения  $\mathbf{C}_N^f$  имеет вид

$$\mathbf{B} \mathbf{C}_N^f + \mathbf{P}_{N-1}^b \mathbf{C}_N^f (\mathbf{P}_{N-1}^b)^{-1} \mathbf{E} = -\mathbf{2G}, \quad (12.57)$$

где

$$\mathbf{B} \triangleq \sum_{m=1}^M K_m \mathbf{b}_m^N (\mathbf{b}_m^N)^\dagger, \quad (12.58)$$

$$\mathbf{E} \triangleq \sum_{m=1}^M K_m \boldsymbol{\varepsilon}_m^N (\boldsymbol{\varepsilon}_m^N)^\dagger, \quad (12.59)$$

$$\mathbf{G} \triangleq \sum_{m=1}^M K_m \mathbf{b}_m^N (\boldsymbol{\varepsilon}_m^N)^\dagger. \quad (12.60)$$

После нахождения  $C_N^f$  из уравнения (12.57) (которое имеет вид  $AX + XB = C$ ) можно вычислить коэффициент  $C_N^f$  по формуле (12.51), а требуемая оценка спектральной матрицы может быть получена из соотношения (12.47) или (12.49).

## 12.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БАЙЕСОВСКОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

В гл. 3 отмечалось, что в том случае, когда требуется полная оптимизация приема сигналов, наилучшими в смысле минимума среднего риска являются процессоры, основанные на вычислении отношения правдоподобия. Если обнаруживаемый сигнал имеет один или несколько неизвестных параметров (связанных, например, с неопределенным местоположением источника сигнала), достаточной статистикой является отношение условных плотностей распределения вероятностей, получаемое следующим образом.

Пусть вектор  $x$  представляет процессы на выходе элементов антенной решетки их выборочными отсчетами или коэффициентами Фурье. Неизвестные параметры  $\theta$  (если они имеются) будут считаться случайными величинами и все предварительные сведения о них будут задаваться априорной плотностью распределения вероятностей  $p(\theta)$ . Тогда отношение правдоподобия можно записать в виде отношения следующих условных плотностей распределения вероятностей:

$$\Lambda(x) = \frac{\int_{\Theta} p(x/\theta, \text{ при наличии сигнала}) p(\theta) d\theta}{p(x/\text{при отсутствии сигнала})} \quad (12.61)$$

где  $\theta \in \Theta$ . Вычисления по формуле (12.61) можно осуществить с помощью подоптимального процессора, описанного в [25], структурная схема которого изображена на рис. 12.3.

### 12.2.1. Обработка сигналов с одновременным оцениванием неизвестных параметров

При обнаружении сигналов с неизвестными параметрами разумным является подход, основанный на оценивании неизвестных параметров и подстановке полученных оценок в условное отношение правдоподобия. Структурная схема процессора антенной решетки, работающего по такому принципу, представлена на рис. 12.4. Очевидно, достоинства такого процессора зависят от точности получаемых оценок, и поэтому определенное внимание было уделено чувствительности этих процессоров к погрешностям оценок параметров [26,27].

Наиболее распространены два метода оценки параметров: максимального правдоподобия (МП) и байесовский. Оценки максимального правдоподобия неизвестных параметров получаются в результате решения уравнения

$$\left. \frac{\partial p(x/\theta, \text{ при наличии сигнала})}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{МП}}} = 0. \quad (12.62)$$

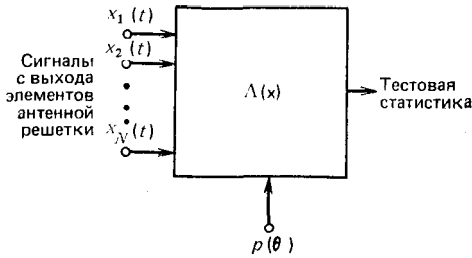


Рис. 12.3. Структурная схема процессора антенной решетки

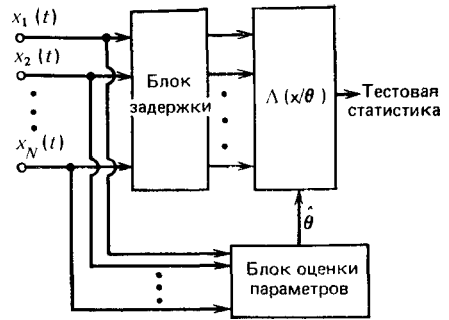


Рис. 12.4. Структурная схема процессора, осуществляющего обработку с одновременным оцениванием неизвестных параметров

В байесовском методе оценки используются априорные данные о параметрах сигнала в виде плотности распределения вероятностей  $p(\theta)$  (сигнал присутствует). Для того чтобы получить оценку параметра, заметим, что

$$\frac{\Lambda(\mathbf{x})}{\Lambda(\mathbf{x}/\hat{\theta})} = \frac{\int_{\Theta} p(\mathbf{x}/\theta, \text{при наличии сигнала}) p(\theta/\text{при наличии сигнала}) d\theta}{p(\mathbf{x}/\hat{\theta}, \text{при наличии сигнала})} \quad (12.63)$$

Как видно из (12.63), априорные данные о неизвестных параметрах явным образом входят в выражение для  $\Lambda(\mathbf{x})$  через усреднение по  $\theta$  в числителе правой части формулы. Оценка  $\hat{\theta}$ , используемая в рассматриваемом процессоре (рис. 12.4), находится из уравнения

$$\frac{\Lambda(\mathbf{x})}{\Lambda(\mathbf{x}/\hat{\theta})} = 1 \quad (12.64)$$

и называется «псевдооценкой» [28]. В работе [29] рассматривался байесовский оптимальный процессор, а в [30] была проанализирована работа подоптимального процессора (рис. 12.4) при использовании оценок МП и байесовских псевдооценок для неизвестных угловых координат источника сигнала. Сравнение результатов показало, что обнаружитель с оценкой МП эквивалентен обнаружителю с байесовской псевдооценкой при равномерном распределении параметров. При неравномерном распределении эффективность обнаружителя с байесовской псевдооценкой повышается в отличие от эффективности обнаружителя с оценкой МП и эти различия становятся более явными с увеличением размера антенной решетки.

### 12.2.2. Последовательный оптимальный процессор антенной решетки

Оптимальный байесовский процессор антенной решетки, схема которого приведена на рис. 12.4, обрабатывает параллельно все принятые данные. При реализации той же обработки последовательно у процессора, как и следовало ожидать, появляется способность к обучению (адаптивные свойства).

Обозначим через  $\mathbf{x}^i$  вектор сигналов на выходе элементов решетки, появляющийся в  $i$ -й момент времени. Совместную плотность вероятности последовательности  $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^L\}$  из  $L$  отсчетов можно записать в виде <sup>1</sup>

$$p(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^L) = \prod_{i=1}^L p(\mathbf{x}^i / \mathbf{x}^{i-1}, \dots, \mathbf{x}^1). \quad (12.65)$$

При наличии неизвестных параметров  $\theta$  усреднение (12.65) с весом  $p(\theta)$  дает

$$P(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^L) = \int_{\Theta} \prod_{i=1}^L p(\mathbf{x}^i / \mathbf{x}^{i-1}, \dots, \mathbf{x}^1, \theta) p(\theta) d\theta. \quad (12.66)$$

Предположим, что  $\mathbf{x}^i$  при фиксированном  $\theta$  независимы, т. е.

$$p(\mathbf{x}^i / \mathbf{x}^{i-1}, \dots, \mathbf{x}^1, \theta) = p(\mathbf{x}^i / \theta). \quad (12.67)$$

Тогда (12.66) можно переписать в виде

$$P(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^L) = \int_{\Theta} \prod_{i=1}^L p(\mathbf{x}^i / \theta) p(\theta) d\theta. \quad (12.68)$$

Применив формулу Байеса, с учетом (12.67) получим:

$$p(\theta / \mathbf{x}^1) = \frac{p(\mathbf{x}^1 / \theta) p(\theta)}{p(\mathbf{x}^1)}, \quad (12.69)$$

$$p(\theta / \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \frac{p(\mathbf{x}^2 / \theta) p(\theta / \mathbf{x}^1)}{p(\mathbf{x}^2 / \mathbf{x}^1)}, \quad (12.70)$$

$$p(\theta / \mathbf{x}^{i-1}, \dots, \mathbf{x}^1) = \frac{p(\mathbf{x}^{i-1} / \theta) p(\theta / \mathbf{x}^{i-2}, \dots, \mathbf{x}^1)}{p(\mathbf{x}^{i-1} / \mathbf{x}^{i-2}, \dots, \mathbf{x}^1)}, \quad (12.71)$$

и, следовательно,

$$p(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^L) = \prod_{i=1}^L \int_{\Theta} p(\mathbf{x}^i / \theta) p(\theta / \mathbf{x}^{i-1}, \dots, \mathbf{x}^1) d\theta, \quad (12.72)$$

где  $p(\theta / \mathbf{x}^{i-1}, \dots, \mathbf{x}^1)$  можно считать обновленной априорной информацией о параметре  $p(\theta)$ .

<sup>1</sup> В формуле сомножитель, соответствующий  $i=1$ , равен  $p(\mathbf{x}^1)$ . (Прим. ред.)

Последовательный процессор, реализующий вычисление отношения правдоподобия

$$\Lambda(x^1, \dots, x^L) = \frac{p(x^1, \dots, x^L / \text{при наличии сигнала})}{p(x^1, \dots, x^L / \text{при отсутствии сигнала})} \quad (12.73)$$

с учетом (12.71), (12.72), представлен структурной схемой на рис. 12.5. Последовательное обновление априорной информации в соответствии с формулой (12.72) придает процессору адаптивные свойства.

Результаты, относящиеся к эффективности оптимального последовательного процессора антенной решетки при обнаружении полностью известного сигнала в аддитивной смеси с гауссовским шумом и помехой

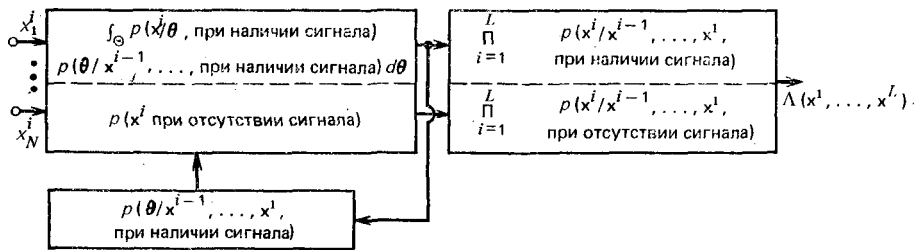


Рис. 12.5. Структурная схема оптимального байесовского процессора, осуществляющего последовательную обработку

с неизвестного направления, приведены в [25]. Адаптивный процессор в этой задаче должен обнаруживать полезный сигнал, одновременно определяя в процессе обучения направление на источник помех. Полученные результаты показывают, что даже при небольшом отношении помеха-тепловой шум приемника оптимальный последовательный процессор определяет угловые координаты источника помех.

### 12.3. ЧАСТИЧНО АДАПТИВНЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ

Рассмотрим структурную схему адаптивной системы подавления помех на базе антенной решетки, изображенную на рис. 12.6. В этой системе основной выходной сигнал решетки получается простым суммированием выходных сигналов ее  $N$  элементов. Адаптивный процессор объединяет только  $M$  элементов ( $M \leq N$ ) для того, чтобы сформировался сигнал, который затем вычитается из основного выходного сигнала решетки. При  $M = 1$  получается простейшая система компенсации помехи от одного источника, поступающей по боковому лепестку. В другом крайнем случае, когда  $M = N$ , получится полностью адаптивная антенная решетка. В промежуточном случае, когда  $1 < M < N$ , результирующая система называется частично адаптивной.

Очевидно, что более предпочтительной является полностью адаптивная антенная решетка, так как в ней в полной мере реализуются возможности управления диаграммой направленности. Однако в боль-

ших решетках, содержащих тысячи элементов, регулирование каждого элемента является непопустительной роскошью. Кроме того, при большом числе регулируемых каналов возрастают сложность и стоимость сигнального процессора. Поэтому важной задачей становится уменьшение числа каналов антенного процессора при одновременном поддержании возможности управления диаграммой направленности антенной решетки. Этого можно достичь следующими способами:

1) преобразуя исходную  $N$ -элементную решетку в  $M$ -элементную решетку подрешеток с помощью диаграммообразующего преобразова-

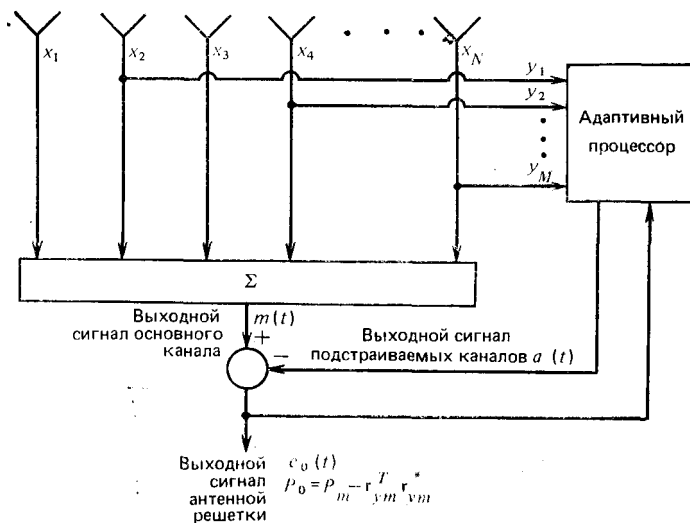


Рис. 12.6. Структурная схема адаптивной системы подавления помех на основе антенной решетки

ния  $Q$  и подвергая в дальнейшем адаптивной обработке сигналы подрешеток [33, 37];

2) используя для целей адаптации только часть элементов антенной решетки [31, 32].

Рассмотрим основные характеристики частично адаптивных решеток, построенных в соответствии с этими принципами.

### 12.3.1. Адаптация с предварительным формированием лучей

Основой метода с предварительным формированием лучей [33] является линейное преобразование вектора  $x$  сигналов с выходов элементов антенной решетки

$$y = Q^T x, \quad (12.74)$$

такое, что размерность  $M$  выходного вектора  $y$  меньше размерности  $N$  входного вектора. Схематически преобразование (12.74) представлено на рис. 12.7. Полученные после этого преобразования сигналы подвергаются адаптивной обработке.



Ковариационная матрица вектора  $y$  определяется соотношением

$$R_{yy} = Q^+ R_{xx} Q. \quad (12.75)$$

Если адаптивный процессор основан на алгоритме максимизации ОСШ Хауэлса-Аппельбаума, то оптимальный весовой вектор будет определяться соотношением

$$w_{y \text{ опт}} = \alpha R_{yy}^{-1} v_y^*, \quad (12.76)$$

где вектор настройки  $v_y$  подрешеток связан с вектором настройки решетки  $v_x$  соотношением

$$v_y = Q^T v_x. \quad (12.77)$$

Результирующая диаграмма направленности будет определяться весовым вектором

$$w_x = Q w_{y \text{ опт}}. \quad (12.78)$$

Отметим, что вектор  $w_x$ , определяемый соотношением (12.78), не совпадает с  $w_{x \text{ опт}} = \alpha R_{xx}^{-1} v_x^*$  для полностью адаптивной антенной решетки, и поэтому решение  $w_x$  можно рассматривать как подоптимальное.

Рассмотрим теперь влияние амплитудно-фазовых рассогласований элементов на полностью адаптивные решетки. Амплитудно-фазовое рассогласование любых двух каналов можно охарактеризовать зависимостью сигнала рассогласования от частоты, которую можно представить как сумму некоторого среднего значения и отклонения от этого среднего значения. Подстройка единственного комплексного коэффициента передачи в одном канале может свести среднее значение к нулю. Поэтому полностью адаптивная антенная решетка чувствительна лишь к отклонениям сигнала рассогласования.

При формировании подрешеток число степеней свободы уменьшается и в результате становится невозможной компенсация всех средних значений сигнала рассогласования. В связи с этим частично адаптивные решетки рассматриваемого вида более чувствительны к рассогласованию элементов, чем полностью адаптивные.

Эффекты, связанные с фазовым рассогласованием элементов в рассматриваемой структуре частично адаптивной решетки, могут быть учтены с помощью соответствующей модификации матрицы  $Q$ . Определим матрицу  $Q^e$  для системы с рассогласованием следующим образом:

$$Q^e = E^e Q, \quad (12.79)$$

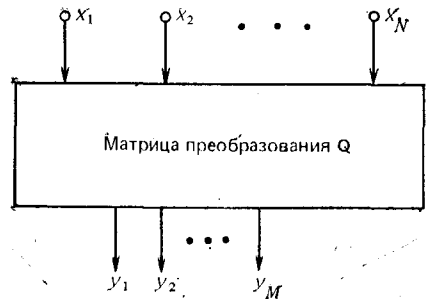


Рис. 12.7. Схематическое изображение диаграммообразующего устройства, изменяющего размерность сигнального вектора

где  $E^0$  — диагональная матрица размером  $N \times N$  с диагональными элементами

$$e_{ii}^0 = \exp [j2\pi (1 - \rho_e) z_i]. \quad (12.80)$$

Параметр  $\rho_e$  ( $0 \leq \rho_e \leq 1$ ) характеризует степень рассогласования (значению  $\rho_e = 1$  соответствует отсутствие рассогласования). Величины  $z_i$  являются равномерно распределенными на интервале  $[-0,5, 0,5]$  случайными величинами. Эта модель с матрицей  $Q^e$  вместо  $Q$  характеризуется появлением случайных боковых лепестков (СБЛ), средний уровень которых приближенно определяется формулой [34]

$$|g_{\text{сбл}}(\theta)|^2 \simeq \frac{\pi^2 (1 - \rho_e)^2}{3} |g_e(\theta)|^2, \quad (12.81)$$

где  $g_e(\theta)$  — диаграмма направленности элементов антенной решетки.

Самым простым методом формирования антенных подрешеток является объединение в группы физически близких друг к другу элементов. При таком подходе, как правило, фазовые центры подрешеток разнесены, что приводит к появлению дополнительных боковых лепестков, которые нельзя изменить последующей адаптивной обработкой. Более заманчивым является подход, при котором для формирования луча каждой подрешетки используется весь раскрыв антенны. В работе [35] показано, что в этом случае эффективность обработки сигналов выше, чем при простом методе формирования подрешеток. Вопросы, связанные с введением ограничений в алгоритмы адаптации таких частично адаптивных решеток, обсуждаются в работе [37].

Подрешетки плоских антенных решеток могут формироваться из строчных (или столбцовых) элементов исходной решетки. При таком выборе подрешеток адаптивность диаграммы направленности проявляется только в одной из плоскостей, что, конечно, недостаточно. Более удачным способом, описанным в [36], является формирование подрешеток из элементов столбцов и строк, так что сигнал с каждого элемента попадает как в строчную подрешетку, так и в столбцовую. Сигналы с выхода элементов каждой строки и столбца суммируются и затем обрабатываются адаптивным процессором. Число степеней свободы такого адаптивного процессора равно сумме числа столбцов и числа строк исходной решетки.

Как показывают результаты моделирования при идеальных условиях работы с полностью согласованными каналами, характеристики частично адаптивных антенных решеток с предварительным формированием лучей близки к характеристикам полностью адаптивной решетки [33]. Однако при наличии независимых случайных рассогласований каналов диаграмма направленности таких решеток резко ухудшается из-за наличия случайных боковых лепестков. Это ухудшение характеристик объясняется снижением точности формирования диаграмм подрешеток из-за случайного рассогласования элементарных каналов.

### 12.3.2. Адаптация с регулированием части элементов антенной решетки

Адаптация с предварительным формированием лучей является удачным способом построения частично адаптивных решеток, в особенности тогда, когда формирование лучей необходимо по самой сути решаемой задачи. Однако диаграммообразующее преобразование удорожает конструкцию решетки, и если оно не является необходимым по другим причинам, то можно обеспечить частичную адаптивность, управляя лишь частью элементов решетки. При таком способе адаптации важно определить, какими элементами исходной решетки следует управлять, чтобы получить наилучшую (при принятых ограничениях на число управляемых элементов) эффективность. При рассмотрении подобных систем будем следовать работе [32] и получим явное решение задачи обработки узкополосных сигналов при наличии двух источников помех для схемы на рис. 12.6.

При использовании в качестве меры эффективности СКО оптимальный весовой вектор определяется соотношением

$$\mathbf{w} = (\mathbf{R}_{yy}^*)^{-1} \mathbf{r}_{ym}, \quad (12.82)$$

где  $\mathbf{R}_{yy} \triangleq E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)$  — ковариационная ( $M \times M$ ) матрица сигналов с выхода регулируемых элементов;  $\mathbf{r}_{ym} \triangleq E\{m\mathbf{y}^*\}$  — вектор взаимных корреляционных моментов между сигналом с выхода основного канала и сигналами регулируемых элементов. Следует отметить, что формула (12.82) отличается от более привычного выражения  $\mathbf{w} = \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{r}_{ym}$  из-за того, что в ней использовано другое определение матрицы  $\mathbf{R}_{yy}$  вместо более привычного  $E\{\mathbf{y}^* \mathbf{y}^T\}$ . При этом минимальная мощность помех на выходе

$$P_0 = P_m - \mathbf{r}_{ym}^T \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{r}_{ym}^*, \quad (12.83)$$

где  $P_m$  — мощность помех на выходе основного канала. В связи с тем, что формула (12.83) не позволяет сразу оценить влияние различных факторов на эффективность адаптивной решетки, далее будет рассмотрен простой иллюстративный пример.

Рассмотрим случай, когда помехи создаются двумя источниками узкополосного излучения на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При этом вектор принятых сигналов можно записать в виде

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{n}(t) + J_1 \exp(j\omega_1 t) \mathbf{v}_1 + J_2 \exp(j\omega_2 t) \mathbf{v}_2, \quad (12.84)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — комплексные амплитуды сигналов помехи (в фазовом центре антенной решетки);  $\mathbf{n}$  — вектор шума с независимыми компонентами, имеющими одинаковые мощности  $P_n^*$ . Векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ , характеризующие пространственное положение источников помех, определяются формулой

$$\mathbf{v}_{k,i} = \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u}_k)\right\}, \quad i \in A, \quad k = 1, 2, \quad (12.85)$$

где  $A$  — множество номеров управляемых элементов (общее число которых равно  $M$ );  $\mathbf{r}_i$  — вектор, характеризующий положение  $i$ -го элемента;  $\mathbf{u}_k$  — вектор единичной длины, указывающий направление на

$k$ -й источник помехи. Для линейной антенной решетки, все элементы которой расположены вдоль оси  $x$  выбранной системы координат, выражение (12.85) преобразуется к виду

$$v_{k,i} = \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} x_i \sin \theta_k \right\}, \quad (12.86)$$

где  $\theta_k$  — угловая координата  $k$ -го источника помехи, измеряемая относительно нормали к решетке.

Сигнал на выходе основного канала может быть записан в виде

$$m(t) = \sum_{i=1}^N n_i(t) + J_1 e^{i\omega_1 t} h_1 + J_2 e^{i\omega_2 t} h_2, \quad (12.87)$$

где

$$h_k = \sum_{i=1}^N v_{k,i}, \quad k = 1, 2, \quad (12.88)$$

— коэффициенты передачи основного канала для помех. Отсюда следует что выходной сигнал антенной решетки можно переписать как

$$e_0(t) = m(t) - \mathbf{w}^T \mathbf{y}(t), \quad (12.89)$$

где  $\mathbf{w}$  — адаптивный весовой вектор.

Ковариационную матрицу  $\mathbf{R}_{yy}$  и вектор  $\mathbf{r}_{ym}$ , необходимые для расчета минимальной выходной мощности по формуле (12.84), с учетом (12.85) можно записать в виде

$$\mathbf{R}_{yy} = E \{ \mathbf{y} \mathbf{y}^* \} = P_n \mathbf{I} + P_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^* + P_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^*, \quad (12.90)$$

$$\mathbf{r}_{ym} = E \{ \mathbf{y}^* m \} = P_n \mathbf{1} + P_1 h_1 \mathbf{v}_1^* + P_2 h_2 \mathbf{v}_2^*, \quad (12.91)$$

где  $P_1, P_2$  — мощности соответствующих сигналов помехи;  $\mathbf{1}$  —  $M$ -мерный вектор, все компоненты которого равны 1.

Для получения  $\mathbf{R}_{yy}^{-1}$  применим дважды соотношение (Г.10) из приложения Г к формуле (12.90). После вычисления и подстановки  $\mathbf{R}_{yy}^{-1}$  и  $\mathbf{r}_{ym}$  в выражение (12.82) получим

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{1} + \gamma \left[ F_1 - \rho^* F_2 + \frac{P_n}{MP_2} F_1 \right] \mathbf{v}_1^* + \gamma \left[ F_2 - \rho F_1 + \frac{P_n}{MP_1} F_2 \right] \mathbf{v}_2^*, \quad (12.92)$$

где

$$F_k = \sum_{i \in A} v_{k,i}, \quad (12.93)$$

$$\rho = \frac{1}{M} \sum_{i \in A} v_{1,i}^* v_{2,i}, \quad (12.94)$$

$$\gamma = \left[ M(1 - |\rho|^2) + \frac{P_n}{P_1} + \frac{P_n}{P_2} + \frac{P_n^2}{MP_1 P_2} \right]^{-1}. \quad (12.95)$$

Для полностью адаптивной антенной решетки, когда  $N = M$ ,  $\mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{1}$ . Если мощности помех значительно превышают мощность шума, т. е.  $P_1 \gg P_n, P_2 \gg P_n$ , то

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} |_{P_1, P_2 \rightarrow \infty} = \mathbf{1} + \frac{F_1 - \rho^* F_2}{M(1 - |\rho|^2)} \mathbf{v}_1^* + \frac{F_2 - \rho F_1}{M(1 - |\rho|^2)} \mathbf{v}_2^*. \quad (12.96)$$

Полученное выражение показывает, что адаптивные весовые коэффициенты будут определяться с большой погрешностью при  $|\rho| \approx 1$ . Это условие соответствует ситуации, при которой невозможно разрешить с помощью данной антенной решетки источники помех, поскольку они расположены на слишком малом угловом расстоянии. Однако такая ситуация возможна и при разнесенных по углу источниках помех, если межэлементное расстояние в решетке превышает  $\lambda/2$ .

Так как выходная мощность помехи составляет

$$P_0 = P_m - \mathbf{r}_{ym}^T \mathbf{w}_{\text{опт}}^* \quad (12.97)$$

то, подставив выражения для  $\mathbf{r}_{ym}$  и  $\mathbf{w}_{\text{опт}}$  в (12.97), получим

$$\frac{P_0}{P_n} = N - M + \gamma \left\{ |F_1|^2 + |F_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(\rho F_1 F_2^*) + \right. \\ \left. + \frac{P_n}{M} \left( \frac{|F_1|^2}{P_2} + \frac{|F_2|^2}{P_1} \right) \right\}. \quad (12.98)$$

Отметим еще раз, что при  $N = M$  (в полностью адаптивной антенной решетке)  $P_0 = 0$ . Из выражения (12.98) можно получить верхнюю границу для мощности нескомпенсированных остатков помех

$$P_0 \leq P_{0 \max} = \frac{P_1 P_2 (|F_1| + |F_2|)^2 + \frac{P_n}{M} (P_2 |F_1|^2 + P_1 |F_2|^2)}{P_1 + P_2 + \frac{P_n}{M}} \quad (12.99)$$

и  $P_0 = P_{0 \max}$  при  $\rho_{\max} = -\exp[\arg(F_1^* F_2)]$ .

В случае сильных помех при  $|\rho| < 1$  (12.98) стремится к

$$\frac{P_0}{P_n} \Big|_{P_1, P_2 \rightarrow \infty} = N - M + \frac{|F_1|^2 + |F_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(\rho F_1 F_2^*)}{M(1 - |\rho|^2)}, \quad |\rho| < 1. \quad (12.100)$$

Это выражение показывает, что мощность нескомпенсированных остатков принимает большое значение при  $|\rho| \approx 1$ . Отметим также, что выражение в правой части (12.100) зависит только от геометрии решетки и угловых координат источников помех. Однако максимальная мощность нескомпенсированных остатков зависит также и от мощности источников помех:

$$P_{0 \max} |_{P_1, P_2 \rightarrow \infty} \simeq (|F_1|^2 + |F_2|^2)^2 \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}. \quad (12.101)$$

Полученные выражения показывают, какую важную роль играет параметр  $\rho$ , который можно в определенном смысле назвать нормированной пространственной корреляционной функцией помех. Эта функция зависит от геометрии антенной решетки, угловых координат источников помех, а также от того, какие элементы выбраны в качестве управляемых в рассматриваемой частично адаптивной решетке. В большинстве случаев связь  $\rho$  с геометрией решетки настолько сложна, что ее можно выяснить только после расчетов на ЭВМ. Для случая двух источников помех оказывается, что в линейной решетке наиболее вы-

годным является расположение управляемых элементов на ее краях [32].

При получении приведенных результатов не учитывались погрешности установки адаптивных весовых коэффициентов, хотя, как было показано в [31], эти погрешности существенно влияют на работу частично адаптивной решетки. Эффективность обработки, достигаемая с помощью частично адаптивных решеток при учете погрешностей установки весовых коэффициентов, сильно зависит от расположения управляемых антенных элементов. Поэтому при практическом проектировании следует выбирать расположение управляемых элементов, учитывая в первую очередь погрешности установки весовых коэффициентов и лишь потом теоретически достижимую эффективность обработки. Было найдено, что в частично адаптивных антенных решетках рассматриваемого вида управляемые элементы следует располагать в центре решетки, так как при таком расположении степень подавления помех практически не зависит от погрешности установки адаптивных весовых коэффициентов [31].

## 12.4. ВЫВОДЫ

Рассмотрен метод максимума энтропии (ММЭ) для оценки спектра стационарных случайных последовательностей, позволяющий получить хорошую разрешающую способность при ограниченном объеме выборки. Применение этого метода для обработки сигналов в адаптивных антенных решетках требуют его модификации на случай векторных случайных последовательностей. Поэтому в данной главе рассмотрена также обобщенная на случай многоканальной обработки версия ММЭ.

При одновременном обнаружении и оценке параметров сигналов можно воспользоваться последовательной реализацией оптимального байесовского правила решения. Такая реализация обладает чертами, присущими адаптивным системам. Хотя сообщения о применении таких алгоритмов довольно редки, они являются, в силу своих полезных свойств, вероятными кандидатами для будущих исследований.

Понятие частично адаптивной антенной решетки является очень важным для практических приложений. Частично адаптивные решетки позволяют реализовать эффективность, близкую к оптимальной, при значительно меньшей сложности (и стоимости) процессора, чем в случае полностью адаптивных решеток. Исследование подобных антенных решеток только начинается, однако можно ожидать, что в недалеком будущем удастся реализовать их существенные достоинства.

## ЗАДАЧИ

1. Предположим, что известны два значения  $x_0$  и  $x_1$  скалярного случайного процесса и требуется получить оценку следующего значения  $x_2$  с помощью прогнозирующего фильтра второго порядка:

$$\widehat{x}_2 = a(2,2)x_0 + a(2,1)x_1.$$

Ошибка прогноза составляет

$$\varepsilon = x_2 - \widehat{x}_2 = x_2 - a(2,1)x_1 - a(2,2)x_0.$$

А. Учитывая, что при оптимальном линейном прогнозе ошибка ортогональна принятым данным (т. е.  $E \{x_0 \varepsilon\} = 0$  и  $E \{x_1 \varepsilon\} = 0$ ), покажите, что

$$\begin{bmatrix} r(1) & r(0) & r(2) \\ r(2) & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a(2,1) \\ -a(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$r(n) = E \{x_i x_j\}, \quad |i-j|=n.$$

Б. Обозначим через  $P_2$  дисперсию ошибки

$$P_2 \triangleq E \{\varepsilon^2\}.$$

Учитывая ортогональность ошибки прогноза  $\varepsilon$  и оценки  $\hat{x}_2$  (т. е.  $E \{\varepsilon \hat{x}_2\} = 0$ ) и полученные выражения для  $\hat{x}_2$ , покажите, что

$$P_2 = r(0) - a(2,1)r(1) - a(2,2)r(2).$$

Результаты, полученные в п. А и Б, дают матричное уравнение для прогнозирующего фильтра [см. (12.12)].

**2. Связь между оценками спектра, полученного методами максимума энтропии и максимума правдоподобия** [15]<sup>1</sup>.

Предположим, что корреляционная функция случайного процесса  $x(t)$  известна в дискретные равностоящие моменты времени. Предположим также, что выборочные значения этого процесса получаются на выходе  $N$ -элементной эквидистантной линейной антенной решетке. «МП-спектр» назовем

$$\text{МПС}(k) = \frac{N \Delta x}{\mathbf{v}^\dagger(k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{v}(k)},$$

где  $k$  — волновое число (величина, обратная длине волны);  $\Delta x$  — расстояние между соседними элементами решетки;  $\mathbf{v}(k)$  — вектор-столбец с компонентами  $v_n(k) = e^{-j2\pi n k \Delta x}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $\mathbf{R}_{xx}$  — корреляционная матрица выходных сигналов решетки размером  $N \times N$ .

А. Пусть  $\mathbf{L}$  — нижняя треугольная матрица вида

$$\mathbf{L} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c(2, N) & 1 & \dots & 0 \\ c(3, N) & c(2, N-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(N, N) & c(N-1, N-1) & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где  $1, c(2, M), \dots, c(M, M)$  — коэффициенты прогнозирующего фильтра  $M$ -го порядка.

Отметим, что

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} P(N) & - & - & - & - \\ 0 & P(N-1) & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdot & - & - \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & P(1) \end{bmatrix},$$

<sup>1</sup> В этой задаче авторы вводят искусственные понятия «МП-спектра» и «МЭ-спектра». Необходимость введения этих понятий, возможно, оправдана тем, что их выборочные аналоги появляются в задачах оценивания спектра гауссовских процессов с помощью методов максимального правдоподобия и максимума энтропии. (Прим. ред.)

где  $P(M)$  — дисперсия ошибки прогноза. «МЭ-спектром» назовем

$$\text{МЭС}(k, M) = \frac{P(M) \Delta x}{\left| \sum_{i=1}^M c(i, M) \exp(j2\pi k(i-1)\Delta x) \right|^2},$$

где  $c(1, M) = 1$ . Пусть

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{R}_{xx} \mathbf{L}.$$

Покажите, что  $\mathbf{P}$  — диагональная матрица, диагональные элементы которой равны  $P(N)$ ,  $P(N-1)$ , ...,  $P(1)$ .

Б. Учитывая соотношение  $\mathbf{R}_{xx}^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}^\dagger$ , покажите, что

$$\mathbf{v}^\dagger \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{v} = (\mathbf{L}^\dagger \mathbf{v})^\dagger \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{L}^\dagger \mathbf{v}) = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta x}{\text{МЭС}(k, n)},$$

откуда следует

$$\frac{1}{\text{МПС}(k)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\text{МЭС}(k, n)}.$$

**3. Эквивалентность оценивания спектра с помощью метода максимума энтропии задаче подгонки с помощью метода наименьших квадратов модели авторегрессии к заданной случайной последовательности  $\{11\}$ .** Предположим, что известны первые  $(N+1)$  значений  $\{r(0), r(1), \dots, r(N)\}$  корреляционной функции гауссовского стационарного процесса и требуется оценить  $r(N+1)$ . Рассмотрим теплицеву корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}_{N+1} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N) & r(N+1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(N-1) & r(N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r(N+1) & r(N) & \dots & r(1) & r(0) \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{R}_{N+1}$  должна быть неотрицательно определенной, и поэтому определитель  $\det[\mathbf{R}_{N+1}]$  должен быть неотрицательным.

При оценивании спектра с помощью метода максимума энтропии  $r(N+1)$  выбирается таким, чтобы  $\det[\mathbf{R}_{N+1}]$  был максимален. Энтропия  $(N+2)$ -мерной плотности нормального распределения с ковариационной матрицей  $\mathbf{R}_{N+1}$  определяется формулой

$$\mathfrak{E} = \ln \left\{ (2\pi e)^{(N+2)/2} \det[\mathbf{R}_{N+1}]^{1/2} \right\}$$

и, следовательно, выбранное значение  $r(N+1)$  максимизирует энтропию. Для получения  $r(N+2)$  найденное значение  $r(N+1)$  подставляется в матрицу  $\mathbf{R}_{N+2}$  и максимизируется значение  $\det[\mathbf{R}_{N+2}]$  с помощью подбора  $r(N+2)$ . Подставляя  $r(N+1)$  и  $r(N+2)$  в  $\det[\mathbf{R}_{N+3}]$  и максимизируя  $\det[\mathbf{R}_{N+3}]$ , получают  $r(N+3)$ . Аналогично получают  $r(N+4)$ ,  $r(N+5)$ , ...

А. Покажите, что нахождение значения  $r(N+1)$ , максимизирующего  $\det[\mathbf{R}_{N+1}]$ , эквивалентно решению уравнения

$$\det \begin{bmatrix} r(1) & r(0) & \dots & r(N-1) \\ r(2) & r(1) & \dots & r(N-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r(N+1) & r(N) & \dots & r(1) \end{bmatrix} = 0.$$



Б. Рассмотрим модель авторегрессии<sup>1</sup>

$$y(n) + a'_1 y(n-1) + \dots + a'_N y(n-N) = e(n)$$

или

$$\mathbf{y}^T \mathbf{a}' = e(n),$$

где

$(\mathbf{a}')^T = [1, a'_1, a'_2, \dots, a'_N]$ ;  $\mathbf{y}^T = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-N)]$ ;  $N$  — порядок процесса авторегрессии;  $n$  — номер выборочного отсчета;  $e(n)$  — случайные величины с нулевым средним и  $E\{e(i)e(j)\} = 0$  при  $i \neq j$ . Полагая, что  $E\{e(n)y(n-k)\} = 0$  при  $k > 0$ , умножая обе части приведенного уравнения на  $y(n-k)$  и вычисляя математическое ожидание, покажите, что

$$r'(k) + a'_1 r'(k-1) + a'_2 r'(k-2) + \dots + a'_N r'(k-N) = 0 \text{ при } k > 0,$$

где  $r'(k) \triangleq E\{y(n)y(n-k)\}$ .

В. Учитывая результаты, полученные в п. Б, а также соотношение  $r(\tau) = r(-\tau)$ , можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} r'(1) + a'_1 r'(0) + \dots + a'_N r'(N-1) &= 0, \\ r'(2) + a'_1 r'(1) + \dots + a'_N r'(N-2) &= 0, \\ \dots & \\ r'(N+1) + a'_1 r'(N) + \dots + a'_N r'(1) &= 0, \end{aligned}$$

или  $\mathbf{R}'_{N+1} \mathbf{a}' = 0$  в матричной записи. Используя этот результат, покажите, что

$$\det \begin{bmatrix} r'(1) & r'(0) & \dots & r'(N-1) \\ r'(2) & r'(1) & \dots & r'(N-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r'(N+1) & r'(N) & \dots & r'(1) \end{bmatrix} = 0.$$

Если известны первые  $N+1$  значений  $\{r(0), r(1), \dots, r(N)\}$  корреляционной функции процесса, то, подставляя их в уравнение  $\mathbf{R}'_{N+1} \mathbf{a}' = 0$ , можно получить единственное решение для коэффициентов  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ , а затем из уравнения

$$\det \begin{bmatrix} r(1) & r(0) & \dots & r(N-1) \\ r(2) & r(1) & \dots & r(N-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r(N+1) & r(N) & \dots & r(1) \end{bmatrix} = 0$$

найти единственное значение  $r(N+1)$ . Полученный результат совпадает со значением  $r(N+1)$  в п. А, а это означает, что то же самое решение может быть получено методом максимума энтропии.

**4. Оценка угла источника излучения.** Метод максимума энтропии позволяет лучше (чем известные методы) разрешить близко расположенные пики спектральной плотности. Это свойство может быть использовано при оценке распределения мощности источников излучения по углу.

<sup>1</sup> В оригинале «all-pole model». Мы используем эквивалентный, но более распространенный термин «модель авторегрессии». (Прим. ред.)

А. Используя пространственно-временной дуализм<sup>1</sup>, считайте, что  $\hat{\Psi}_{xx}(\mu)$  — оценка пространственного спектра, где  $\mu = \cos \theta$  и  $\theta$  — угол, отсчитываемый от оси  $(N + 1)$ -элементной линейной антенной решетки. Предположите, что сигналы узкополосны и межэлементное расстояние  $d = \lambda/2$ .

Б. Считайте, что уравнение (12.12) соответствует задаче оценки пространственного спектра в п. А. Найдите связь между коэффициентами прогнозирующего фильтра и весовыми коэффициентами когерентного компенсатора помех, поступающих по боковым лепесткам, с  $N$  вспомогательными антеннами.

5. Учитывая соотношение

$$(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{b}^\dagger \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}},$$

вычислите  $(P_n \mathbf{I} + P_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\dagger)^{-1}$ . Примените полученный результат к (12.90) и получите с учетом (12.82) выражение (12.92)

6. Частично адаптивная линейная антенная решетка с двумя регулируемыми элементами в ситуации с двумя источниками помех [32].

А. Предположим, что линейная эквидистантная антенная решетка состоит из  $N$  элементов, расположенных на полуволновом расстоянии друг от друга. Покажите, что составляющие векторов определяются соотношением

$$v_{k,i} = \exp(j i \pi \sin \theta_k).$$

Покажите, что величины  $F_1$  и  $F_2$  можно вычислить по формулам:

$$F_1 = \exp \left[ \frac{j(N+1)\alpha}{2} \right] S_1 - 2 \exp \left[ \frac{j(p+q)\alpha}{2} \right] \cos \left( \frac{m\alpha}{2} \right),$$

$$F_2 = \exp \left[ \frac{j(N+1)\beta}{2} \right] S_2 - 2 \exp \left[ \frac{j(p+q)\beta}{2} \right] \cos \left( \frac{m\beta}{2} \right),$$

где  $p, q$  — номер регулируемых элементов;  $m = p - q$  и  $\alpha, \beta = \pi \sin \theta_{1,2}$  — межэлементные фазовые сдвиги для двух источников помех;

$$S_1 = \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}, \quad S_2 = \frac{\sin(N\beta/2)}{\sin(\beta/2)}$$

— модули коэффициентов передачи антенной решетки для источников помех.

Б. Используя результаты, полученные в п. А, покажите, что

$$\rho = \exp \left[ \frac{j(p+q)(\beta-\alpha)}{2} \right] \cos \frac{m(\beta-\alpha)}{2},$$

$$\gamma = \frac{P_1 P_2}{P_n (P_1 + P_2 + P_n/2) + 2P_1 P_2 \sin^2 m(\beta-\alpha)/2}.$$

В. Используя результаты, полученные в пп. А и Б, покажите, что

$$\frac{P_0}{P_1} = N + \frac{P_1 P_2}{P_n (P_1 + P_2) + 2P_1 P_2 \sin^2 m(\beta-\alpha)/2} \times$$

$$\times \left\{ S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos \frac{n(\beta-\alpha)}{2} \cos \frac{m(\beta-\alpha)}{2} + 4 \sin \frac{m(\beta-\alpha)}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ S_2 \cos \frac{n\beta}{2} \sin \frac{m\alpha}{2} - S_1 \cos \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{m\beta}{2} + \sin \frac{m(\beta-\alpha)}{2} \right] \right\} + O(P_n/P_{1,2}),$$

<sup>1</sup> Имеется в виду следующее: если считать, что выборочные значения случайной последовательности являются сигналами с выхода линейной эквидистантной антенной решетки с  $d = \lambda/2$ , то спектральная плотность этой последовательности является угловой плотностью распределения источников излучения, создающих сигнал на выходе решетки. (Прим. ред.)

где  $n = N + 1 - p - q$ ;  $O(P_n/P_{1,2})$  — члены порядка  $P_n/P_1$  и  $P_n/P_2$ . Отметим, что выражение в фигурных скобках обращается в нуль при  $\alpha = \beta$  (т. е. при  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ ), что и следовало бы ожидать, так как в этом случае оба источника помехи фактически действуют как один.

Г. Покажите, что максимальное значение мощности нескомпенсированных остатков помех будет достигаться при

$$|\beta - \alpha| = k2\pi/m, \quad k = 1, 2, \dots$$

или, что то же самое, при

$$|\cos \theta_2 - \cos \theta_1| = 2k/m, \quad k = 1, 2, \dots$$

Д. Покажите, что максимальное значение мощности нескомпенсированных остатков определяется соотношением

$$P_{0 \max} = NP_n + \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} \left[ S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos k\pi \left( 1 + \frac{n}{m} \right) \right] + O \left( \frac{P_n}{P_{1,2}} \right).$$

Очевидно, что желательно минимизировать выражение в квадратных скобках. Покажите, что минимум достигается при условии

$$\frac{n}{m} = \begin{cases} 1 \pmod{2}, & S_1 S_2 > 2, \\ 0 \pmod{2}, & S_1 S_2 < 0 \end{cases}$$

для всех угловых координат источников помех.

## Приложение А. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЛЬТРОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ МНОГООТВОДНЫХ ЛИНИЙ ЗАДЕРЖКИ

Для того чтобы определить частотную характеристику трансверсального фильтра, построенного на основе многоотводной линии задержки, схема которого приведена на рис. А.1, сначала запишем его импульсную характеристику, являющуюся реакцией фильтра на входной сигнал  $x(t) = \delta(t)$ :

$$h(t) = \sum_{i=1}^{2n+1} w_i \delta [t - (i-1) \Delta], \quad (\text{А.1})$$

где  $w_i$  ( $i = 1, \dots, 2n + 1$ ) — комплексные весовые коэффициенты, с которыми суммируются сигналы, поступающие с отводов линии задержки.

Выражение (А.1) соответствует случаю, когда задержка, обусловленная электрическим расстоянием между двумя соседними отводами, постоянна и равна  $\Delta$ . Выбор значения  $\Delta$  зависит от ширины полосы частот, занимаемой сигна-

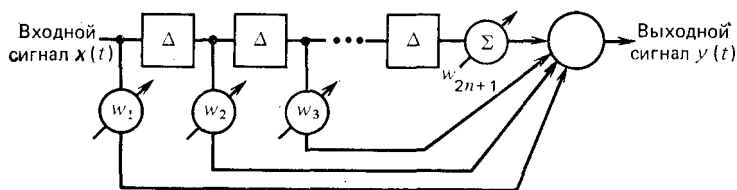


Рис. А.1. Трансверсальный фильтр на основе  $2n$ -отводной линии задержки

лом. Пусть  $x(t)$  — сигнал с ограниченным спектром и  $f_{\max}$  — наибольшая частота спектра сигнала. Согласно известной теореме отсчетов [А.1] дискретные отсчеты сигнала  $x(t_0 + (i-1)\Delta)$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots$  (рис. А.2) определяют  $x(t)$  при условии

$$f_{\max} < 1/(2\Delta) \quad (\text{А.2})$$

в том смысле, что сигнал  $x(t)$  может быть однозначно восстановлен по этим отсчетам. Так как полоса частот  $BW$ , занимаемая сигналом  $x(t)$ , связана с  $f_{\max}$  соотношением  $BW = 2f_{\max}$ , то условие (А.2) можно переписать в виде  $BW \leq 1/\Delta$  и, следовательно, величину  $1/\Delta$  можно рассматривать как «сигнальную ширину полосы частот», соответствующую многоотводной линии задержки.

Применив к (А.1) преобразование Лапласа, получим передаточную функцию фильтра

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \sum_{i=1}^{2n+1} w_i e^{-s(i-1)\Delta} \quad (\text{А.3})$$

или, полагая

$$z \triangleq e^{s\Delta}, \quad (\text{А.4})$$



Рис. А.2. Входной сигнал

$H(s)$  можно представить в виде

$$H(s) = \sum_{i=1}^{2n+1} \omega_i z^{-(i-1)}. \quad (\text{А.5})$$

Частотная характеристика  $H(j\omega)$  получается при подстановке в выражение (А.5) значения  $s = j\omega$ . Так как  $z|_{s=j\omega} = e^{j\omega\Delta}$  является периодической функцией частоты  $\omega$  с периодом  $2\pi/\Delta$ , то

$$H(j\omega) = H\left(j\left(\omega \pm k \frac{2\pi}{\Delta}\right)\right). \quad (\text{А.6})$$

Соотношение (А.6) показывает, что передаточная функция и частотная характеристика трансверсального фильтра с многоотводной линией задержки периодичны с периодом, равным (по модулю) сигнальной полосе частот этой линии. Периодическая структура передаточной функции  $H(s)$  иллюстрируется рис. А.3 [А.2], на котором комплексная  $s$ -плоскость разбита на горизонтальные полосы, равные по ширине периоду  $H(s)$ . Полоса между значениями  $\omega = -\pi/\Delta$  и  $\omega = \pi/\Delta$  называется «основной», а остальные «дополнительными». Поведение функции  $H(s)$  на всей комплексной плоскости полностью определяется ее значениями в основной полосе. Из (А.5) видно, что передаточная функция фильтра должна иметь  $2n$  нулей, соответствующих корням многочлена от  $z^{-1}$  степени  $2n$  в правой части этого выражения. Таким образом, число нулей передаточной функции в основной полосе равно числу элементов линии задержки.

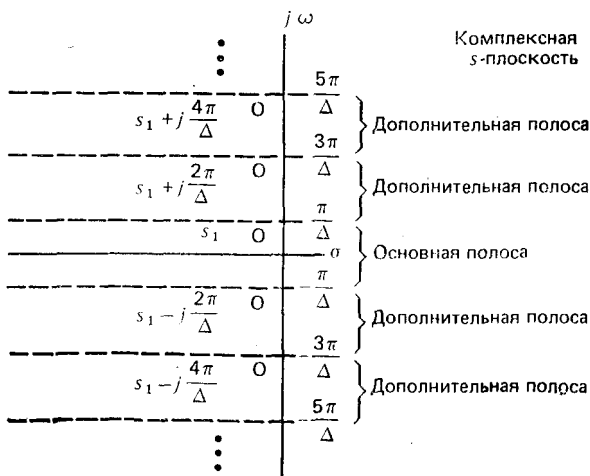


Рис. А.3. Периодическая структура функции  $H(s)$

Рассмотрим частотную характеристику трансверсального фильтра с  $N$  отводами и единичными весовыми коэффициентами:

$$H(j\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j\omega i \Delta} = \frac{1 - e^{-j\omega N \Delta}}{1 - e^{-j\omega \Delta}}. \quad (\text{A.7})$$

Вынеся за скобки в числителе  $e^{-j\omega(\Delta/2)N}$ , а в знаменателе  $e^{-j\omega(\Delta/2)}$ , получаем

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \exp \left[ j\omega \frac{\Delta}{2} (1-N) \right] \frac{\sin [\omega (\Delta/2) N]}{\sin [\omega (\Delta/2)]} = \\ &= N \exp \left[ j\omega \frac{\Delta}{2} (1-N) \right] \frac{\left\{ \frac{\sin [\omega (\Delta/2) N]}{[\omega (\Delta/2) N]} \right\}}{\left\{ \frac{\sin [\omega (\Delta/2)]}{[\omega (\Delta/2)]} \right\}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Из (A.8) видно, что  $H(j\omega)$  имеет многолепестковый характер с главным лепестком шириной  $2/(N\Delta)$  по нулям, что соответствует ширине лепестка по уровню 3 дБ, приблизительно равной  $1/(N\Delta)$ . Можно показать, что при неравновесном суммировании сигналов поступающих с отводов линии задержки, ширина глав-

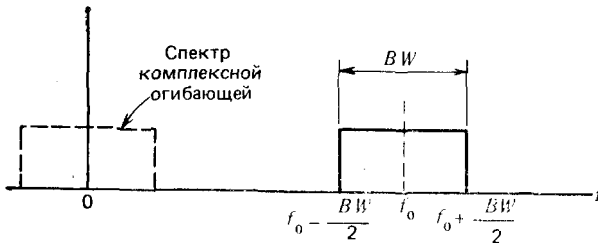


Рис. А.4. Спектр сигнала с центральной частотой  $f_0$

ного лепестка увеличится. Поэтому можно считать, что величина  $1/(N\Delta)$ , обратная величине полной задержки линии, характеризует наилучшую разрешающую способность фильтра по частоте при использовании его для анализа спектра сигналов.

До сих пор предполагалось, что интересующий нас диапазон частот концентрируется около частоты  $f = 0$ . В большинстве реальных систем сигналы передаются колебаниями некоторой несущей частоты  $f_0 \neq 0$ , как показано на рис. А.4. Применяв преобразование частоты, можно без потери информации переместить спектр сигнала в область нижних частот с центром на частоте  $f = 0$ . Полученный таким образом сигнал, называемый «комплексной огибающей», рассматривается в приложении Б.

## Приложение Б. КОМПЛЕКСНАЯ ОГИБАЮЩАЯ

Комплексная огибающая является удобным средством описания информационной составляющей модулированных сигналов. В данном приложении приведены некоторые соотношения для комплексных сигналов, которые подробнее изложены в работах [Б.1, Б.2].

Здесь будем интересоваться сигналами в виде однородных плоских волн, распространяющихся в недиспергирующей среде, все влияние которой сводится к внесению задержки распространения. Такие сигналы на выходе элементов антенной решетки могут быть представлены как опережающие или отстающие по

времени копии сигнала, принятого в фазовом центре решетки, в смеси с аддитивной составляющей теплового шума. Далее будут рассматриваться сигналы с ограниченным спектром, сосредоточенным в промежутке от 0 до  $2f_c$ , где  $f_c$  — центральная частота полосы пропускания решетки. Сигнал  $i$ -го источника излучения, принятый в фазовом центре решетки, можно представить как модулированное по амплитуде и фазе гармоническое колебание частоты  $f_c$ :

$$v_i(t) = \alpha_i(t) \cos(\omega_c t + \varphi_i(t) + \Theta_i). \quad (\text{Б.1})$$

Каждому действительному сигналу можно поставить в соответствие аналитический сигнал

$$z_i(t) \triangleq [v_i(t) + j\tilde{v}_i(t)], \quad (\text{Б.2})$$

где  $\tilde{v}_i(t)$  — преобразование Гильберта [Б.3] сигнала  $v_i(t)$ , т. е.

$$\tilde{v}_i(t) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_i(\tau)}{t - \tau} d\tau = v_i(t) * \frac{1}{\pi t}, \quad (\text{Б.3})$$

где \* означает операцию свертки. Сигнал  $\tilde{v}_i(t)$  можно рассматривать как выходной сигнал квадратурного фильтра при подаче на его вход сигнала  $v_i(t)$ .

Из соотношений (Б.1), (Б.3) следует, что

$$\tilde{v}_i(t) = \alpha_i(t) \sin(\omega_c t + \varphi_i(t) + \Theta_i). \quad (\text{Б.4})$$

Комплексная огибающая сигнала  $v_i(t)$ , обозначаемая символом  $\tilde{v}_i(t)$ , определяется с помощью аналитического сигнала следующим образом:

$$\tilde{v}_i(t) = z_i(t) \exp(-j\omega_c t) = \alpha_i(t) \exp\{j[\varphi_i(t) + \Theta_i]\}. \quad (\text{Б.5})$$

Из этого определения вытекают соотношения для реального сигнала  $v_i(t)$  и квадратурной составляющей  $\tilde{v}_i(t)$ :

$$v_i(t) = \text{Re} \{ \tilde{v}_i(t) \exp(j\omega_c t) \}, \quad (\text{Б.6})$$

$$\tilde{v}_i(t) = \text{Im} \{ \tilde{v}_i(t) \exp(j\omega_c t) \}, \quad (\text{Б.7})$$

связывающие их с комплексной огибающей.

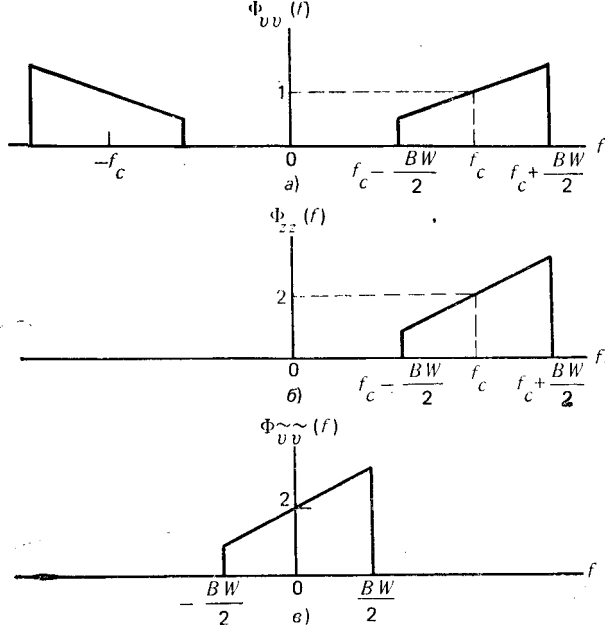
Обозначим через  $x_k(t)$  выход  $k$ -го элемента антенной решетки при наличии сигналов, излучаемых несколькими источниками. Тогда

$$x_k(t) = \sum_i v_i(t - \tau_{ik}) + n_k(t), \quad (\text{Б.8})$$

где  $v_i(t - \tau_{ik})$  — запаздывающий на время  $\tau_{ik}$  сигнал  $i$ -го источника;  $n_k(t)$  — тепловой шум  $k$ -го элемента. Комплексная огибающая сигнала  $x_k(t)$  может быть записана в виде

$$\tilde{x}_k(t) = \sum_i \tilde{v}_i(t - \tau_{ik}) \exp\{-j\omega_c \tau_{ik}\} + \tilde{n}_k(t). \quad (\text{Б.9})$$

Графики спектральной плотности процессов  $v(t)$ ,  $z(t)$  и  $\tilde{v}(t)$  приведены на рис. Б.1. Соотношения, иллюстрируемые этими графиками, легко получаются при рассмотрении связи между спектрами на входе и выходе линейных фильтров [Б.3].



**Рис. Б.1.** Соотношения между спектрами действительного сигнала и представляющих его аналитического сигнала и комплексной огибающей:  
 а — спектр сигнала  $v(t)$ ; б — спектр аналитического сигнала, соответствующего сигналу  $v(t)$ ; в — спектр комплексной огибающей  $\tilde{v}(t)$  сигнала  $v(t)$

Для целей нахождения ковариационных матриц полезно рассмотреть выражения всевозможных произведений двух сигналов  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  и их квадратурных составляющих. Для сигналов вида (Б.1) имеем:

$$v_1(t) v_2(t) = \frac{\alpha_1(t) \alpha_2(t)}{2} \{ \cos [\varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \Theta_1 - \Theta_2] + \cos [2\omega_c t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \Theta_1 + \Theta_2] \}, \quad (\text{Б.10})$$

$$v_1(t) \tilde{v}_2(t) = \frac{\alpha_1(t) \alpha_2(t)}{2} \{ \sin [\varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \Theta_1 - \Theta_2] + \sin [2\omega_c t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \Theta_1 + \Theta_2] \}, \quad (\text{Б.11})$$

$$\tilde{v}_1(t) \tilde{v}_2(t) = \frac{\alpha_1(t) \alpha_2(t)}{2} \{ \cos [\varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \Theta_1 - \Theta_2] - \cos [2\omega_c t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \Theta_1 + \Theta_2] \}, \quad (\text{Б.12})$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(t) \tilde{v}_2^*(t) &= v_1(t) v_2(t) + \tilde{v}_1(t) \tilde{v}_2(t) + j [ \tilde{v}_1(t) v_2(t) - v_1(t) \tilde{v}_2(t) ] = \\ &= \alpha_1(t) \alpha_2(t) \{ \cos [\varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \Theta_1 - \Theta_2] - j \sin [\varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \Theta_1 - \Theta_2] \}. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Если произведения действительных сигналов пропустить через фильтр нижних частот, полностью подавляющий компоненты с удвоенной частотой несущей, то на выходе фильтра получим

$$2\overline{v_1(t) v_2(t)} = \text{Re} \{ \tilde{v}_1(t) \tilde{v}_2^*(t) \} = \text{Re} \{ z_1(t) z_2^*(t) \}, \quad (\text{Б.14})$$

$$2v_1(t) \tilde{v}_2(t) = -\text{Im} \{ \tilde{v}_1(t) \tilde{v}_2^*(t) \} = -\text{Im} \{ z_1(t) z_2^*(t) \}. \quad (\text{Б.15})$$



## Приложение В. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА

Скалярная функция матриц  $\text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{B}^T]$  обладает всеми свойствами скалярного произведения, и поэтому формулы дифференцирования следа произведения матриц, приведенные в [В.1], представляют интерес для вычисления градиентов некоторых скалярных произведений, появляющихся в задачах оптимизации адаптивных антенных решеток. Для многих задач требуется распространять операции векторного и матричного дифференцирования на функции векторов и матриц; это обобщение описано в работе [В.2]:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{X}] = \mathbf{I}, \quad (\text{В.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}] = \mathbf{A}^T, \quad (\text{В.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}^T] = \mathbf{A}, \quad (\text{В.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}] = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T, \quad (\text{В.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{A} \mathbf{X}^T \mathbf{B}] = \mathbf{B}\mathbf{A}, \quad (\text{В.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^T} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}] = \mathbf{A}, \quad (\text{В.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^T} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}^T] = \mathbf{A}^T \quad (\text{В.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^T} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}] = \mathbf{B}\mathbf{A}, \quad (\text{В.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^T} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}^T \mathbf{B}] = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T, \quad (\text{В.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{X}^n] = n (\mathbf{X}^{n-1})^T, \quad (\text{В.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}] = \mathbf{A}^T \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T, \quad (\text{В.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}^T] = \mathbf{A}^T \mathbf{X}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}, \quad (\text{В.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr} [\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}] = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} = 2\mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (\text{В.13})$$

если  $\mathbf{A}$  симметрична.

## Приложение Г. НЕКОТОРЫЕ МАТРИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВО ШВАРЦА

В этом приложении дана сводка некоторых матричных соотношений, помогающих решать задачи оптимизации адаптивных антенных решеток. Вывод этих соотношений, а также основные свойства матриц можно найти в работах [Г.1—Г.3].

Сумма диагональных элементов квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  называется ее следом и обозначается

$$\text{tr}(\mathbf{A}) \triangleq \sum_i a_{ii}. \quad (\Gamma.1)$$

Из определения (Г.1) следует, что

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}), \quad (\Gamma.2)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B}). \quad (\Gamma.3)$$

Длиной или нормой вектора  $\mathbf{x}$  (символически  $\|\mathbf{x}\|$ ) называется

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^\dagger \mathbf{x}} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger)} = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}. \quad (\Gamma.4)$$

Норма матрицы, в свою очередь, определяется соотношением

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{AA}^\dagger)} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}. \quad (\Gamma.5)$$

Квадратная матрица  $\mathbf{A}$  называется эрмитовой, если

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger. \quad (\Gamma.6)$$

Эрмитова матрица  $\mathbf{A}$  называется положительно определенной, если эрмитова форма  $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{x}$  удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i^* x_j > 0 \text{ при всех } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (\Gamma.7)$$

Если  $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  при всех  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , то эрмитова форма называется положительно полуопределенной.

Для любой матрицы  $\mathbf{D}$  произведение  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  является эрмитовой положительно полуопределенной матрицей. Если, кроме того,  $\mathbf{D}$  является квадратной невырожденной матрицей (т. е. такой, что существует  $\mathbf{D}^{-1}$ ), то матрица  $\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}$  положительно определена. Обратное, любая положительно определенная эрмитова матрица  $\mathbf{A}$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \mathbf{D}^\dagger. \quad (\Gamma.8)$$

В некоторых оптимизационных задачах полезно применять матричную формулу, которую можно назвать формулой дополнения до квадрата<sup>1</sup>:

$$\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y} - \mathbf{y}^\dagger \mathbf{x} = -\mathbf{y}^\dagger \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} + [\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}]^\dagger \mathbf{A} [\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}]. \quad (\Gamma.9)$$

Следующие полезные соотношения касаются операции обращения матрицы:

$$[\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{M}^\dagger \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{M}^\dagger [\mathbf{M} \mathbf{P} \mathbf{M}^\dagger + \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{M} \mathbf{P}, \quad (\Gamma.10)$$

$$[\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{M} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}^\dagger]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{M}^\dagger [\mathbf{M} \mathbf{P} \mathbf{M}^\dagger + \mathbf{Q}]^{-1}, \quad (\Gamma.11)$$

$$\mathbf{Q}^{-1} - [\mathbf{M} \mathbf{P} \mathbf{M}^\dagger + \mathbf{Q}]^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{M}^\dagger \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{Q}^{-1}. \quad (\Gamma.12)$$

Формула (Г.10) проверяется умножением обеих частей равенства на  $\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{M} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}^\dagger$ , формулы (Г.1), (Г.2) вытекают из (Г.10).

Неравенство Шварца<sup>2</sup> для двух скалярных функций  $f(t)$  и  $g(t)$  имеет вид

$$\left| \int f^*(t) g(t) dt \right|^2 \leq \int |f(t)|^2 dt \int |g(t)|^2 dt. \quad (\Gamma.13)$$

<sup>1</sup> Здесь  $\mathbf{A}$  — невырожденная эрмитова матрица. (Прим. ред.)

<sup>2</sup> Точнее, неравенство Буняковского—Шварца. (Прим. ред.)

Для двух векторных функций  $\mathbf{f}(t)$  и  $\mathbf{g}(t)$  неравенство Шварца может быть записано в виде

$$\left| \int \mathbf{f}^\dagger(t) \mathbf{g}(t) dt \right|^2 \leq \int \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt \int \|\mathbf{g}(t)\|^2 dt. \quad (\Gamma.14)$$

Равенства в (Г.13) и (Г.14) достигается тогда и только тогда, когда входящие в них функции отличаются только скалярным множителем. Заметим, что (Г.14) аналогично неравенству

$$|\mathbf{x}^\dagger \mathbf{y}|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (\Gamma.15)$$

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — векторы.

Неравенство (Г.14) можно обобщить на матричные функции. Пусть  $\mathbf{F}(t)$  и  $\mathbf{G}(t)$  — матрицы размером  $m \times n$ , так что  $\mathbf{F}^\dagger(t)\mathbf{G}(t)$  является квадратной матрицей размером  $n \times n$ . Тогда неравенство Шварца можно записать в виде

$$\left| \int \text{tr} [\mathbf{F}^\dagger(t) \mathbf{G}(t)] dt \right|^2 \leq \int \|\mathbf{F}(t)\|^2 dt \int \|\mathbf{G}(t)\|^2 dt. \quad (\Gamma.16)$$

Равенство в (Г.16) достигается тогда и только тогда, когда  $\mathbf{F}(t) = k\mathbf{G}(t)$ , где  $k$  — скалярный множитель. Заметим, что (Г.16), аналогично неравенству

$$|\text{tr} (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B})|^2 \leq \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2. \quad (\Gamma.17)$$

Еще одной модификацией неравенства Шварца для матриц является

$$\text{tr} (\mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{B}) \leq \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2. \quad (\Gamma.18)$$

## Приложение Д. МНОГОМЕРНЫЕ ГАУССОВСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом приложении кратко рассмотрены свойства действительных гауссовских векторов и их обобщений для комплексных гауссовских векторов. Подробное обсуждение этих свойств можно найти в [Д.1—Д.4].

### Д.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Пусть  $\mathbf{x}$  — действительный  $n$ -мерный случайный вектор, все составляющие которого являются скалярными случайными величинами. Пусть математическое ожидание (среднее) этого вектора есть

$$E \{\mathbf{x}\} = \mathbf{u}, \quad (\text{Д.1})$$

а ковариационная матрица —

$$\text{cov}(\mathbf{x}) \triangleq E \{(\mathbf{x} - \mathbf{u})(\mathbf{x} - \mathbf{u})^T\} = \mathbf{V}. \quad (\text{Д.2})$$

Ковариационная матрица  $\mathbf{V}$  симметрична и положительно определена (или, по крайней мере, положительно полуопределена). Случайный вектор  $\mathbf{x}$  называется гауссовским, если его характеристическая функция определяется как

$$C_x(j\boldsymbol{\theta}) \triangleq E \{ \exp(j\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}) \} = \exp \left\{ j\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\theta} \right\}. \quad (\text{Д.3})$$

Из (Д.3) следует, что плотность распределения вероятностей  $\mathbf{x}$  имеет вид<sup>1</sup>

$$p(\mathbf{x}) = [2\pi]^{-n/2} (\det \mathbf{V})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{u})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{u}) \right\}. \quad (\text{Д.4})$$

Рассмотрим линейное преобразование случайного вектора  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (\text{Д.5})$$

<sup>1</sup> Только в том случае, когда  $\mathbf{V}$  положительно определена. (Прим. ред.)

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  — неслучайные. Тогда вектор  $\mathbf{y}$  также гауссовский и

$$E \{ \mathbf{y} \} = \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{b}, \quad (\text{Д.6})$$

$$\text{cov} \{ \mathbf{y} \} = \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{A}^T. \quad (\text{Д.7})$$

Вектор  $\mathbf{w}$  называется нормированным гауссовским случайным вектором, если он имеет нулевой вектор среднего и все его составляющие взаимно независимы и имеют единичную дисперсию. Другими словами:

$$E \{ \mathbf{w} \} = \mathbf{0}, \quad (\text{Д.8})$$

$$E \{ \mathbf{w} \mathbf{w}^T \} = \mathbf{I}. \quad (\text{Д.9})$$

Так как положительно полуопределенная матрица  $\mathbf{V}$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T, \quad (\text{Д.10})$$

то гауссовский вектор  $\mathbf{x}$  со средним  $\mathbf{u}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{V}$  может быть представлен как линейное преобразование нормированного гауссовского случайного вектора:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z} \mathbf{w} + \mathbf{u}. \quad (\text{Д.19})$$

Пусть

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

— случайный вектор, состоящий из двух действительных совместно гауссовских случайных векторов со средним

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Д.12})$$

и

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{Д.13})$$

Тогда условное распределение  $\mathbf{x}_1$  при заданном  $\mathbf{x}_2$  также является гауссовским с

$$E \{ \mathbf{x}_1 / \mathbf{x}_2 \} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{u}_2) \quad (\text{Д.14})$$

и

$$\text{cov} \{ \mathbf{x}_1 / \mathbf{x}_2 \} = \mathbf{V}_{11} - \mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{21}. \quad (\text{Д.15})$$

Если  $x_1, x_2, x_3, x_4$  имеют гауссовскую плотность распределения вероятности и нулевое среднее, то

$$E \{ x_1 x_2 x_3 x_4 \} = E \{ x_1 x_2 \} E \{ x_3 x_4 \} + E \{ x_1 x_3 \} E \{ x_2 x_4 \} + E \{ x_1 x_4 \} E \{ x_2 x_3 \}. \quad (\text{Д.16})$$

Соотношение (Д.16) можно обобщить на совместно гауссовские случайные векторы (все имеющие нулевое среднее). Обозначим взаимную ковариационную матрицу  $E \{ \mathbf{w} \mathbf{x}^T \}$  символом

$$E \{ \mathbf{w} \mathbf{x}^T \} = \mathbf{V}_{\mathbf{w} \mathbf{x}}. \quad (\text{Д.17})$$

Тогда указанное обобщение можно записать в виде

$$E \{ \mathbf{w}^T \mathbf{x} \mathbf{y}^T \mathbf{z} \} = (\text{tr} \mathbf{V}_{\mathbf{w} \mathbf{x}}) (\text{tr} \mathbf{V}_{\mathbf{y} \mathbf{z}}) + \text{tr} (\mathbf{V}_{\mathbf{w} \mathbf{y}} \mathbf{V}_{\mathbf{z} \mathbf{x}}) + \text{tr} (\mathbf{V}_{\mathbf{w} \mathbf{z}} \mathbf{V}_{\mathbf{y} \mathbf{x}}). \quad (\text{Д.18})$$

В задачах обнаружения важную роль играют квадратичные формы. Пусть  $\mathbf{x}$  — действительный гауссовский случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\mathbf{V}$ . Квадратичная форма

$$y = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{x} \quad (\text{Д.19})$$

имеет характеристическую функцию

$$C_y(j\theta) \triangleq E \{ e^{j\theta y} \} = E \{ \exp [j\theta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{x}] \}. \quad (\text{Д.20})$$

Математическое ожидание в (Д.20) может быть записано в виде интеграла

$$C_y(j\Theta) = \int (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{V})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{V}^{-1} [\mathbf{I} - 2j\Theta \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{K}^T] \mathbf{x} \right\} d\mathbf{x}. \quad (\text{Д.21})$$

Учитывая, что

$$(\det \mathbf{V})^{1/2} = \int (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x} \right\} d\mathbf{x}, \quad (\text{Д.22})$$

из (Д.21) получаем

$$C_y(j\Theta) = [\det (\mathbf{I} - 2j\Theta \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{K}^T)]^{-1/2}. \quad (\text{Д.23})$$

Соответствующее распределение  $y$  называется обобщенным  $\chi^2$ -распределением. Первые два момента случайной величины  $y$  определяются формулами:

$$E\{y\} = E\{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{x}\} = \text{tr} \{E[\mathbf{K}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{K}]\} = \text{tr} (\mathbf{K}^T \mathbf{V} \mathbf{K}) = \text{tr} (\mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{V}), \quad (\text{Д.24})$$

$$E\{y^2\} = E\{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{x}\}. \quad (\text{Д.25})$$

Применив (Д.18), получим (Д.25) в виде

$$E\{y^2\} = [\text{tr} (\mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{V})]^2 + 2 \text{tr} [(\mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{V})^2]. \quad (\text{Д.26})$$

Из (Д.24) — (Д.26) следует, что

$$\text{var}(y) \triangleq E\{y^2\} - E^2\{y\} = 2 \text{tr} [(\mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{V})^2]. \quad (\text{Д.27})$$

## Д.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Комплексное гауссовское многомерное распределение можно определить таким образом, что многие важные свойства действительных гауссовских случайных векторов будут справедливы и в комплексном случае. Для того чтобы вывести ряд свойств комплексных гауссовских случайных векторов, сначала рассмотрим два действительных  $n$ -мерных вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  с нулевым средним, удовлетворяющих условиям:

$$\text{cov}(\mathbf{x}) = \text{cov}(\mathbf{y}) = \mathbf{V}/2, \quad (\text{Д.28})$$

$$\text{cov}(x_i y_j) = -\text{cov}(y_i x_j) = -w_{ij}/2. \quad (\text{Д.29})$$

В силу условий (Д.28), (Д.29) совместная ковариационная матрица этих векторов имеет специальный вид

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.30})$$

где  $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$ . Существует взаимно-однозначное соответствие между действительными матрицами вида

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (\text{Д.31})$$

и комплексными матрицами вида

$$\mathbf{C} = \mathbf{V} + j\mathbf{W}, \quad (\text{Д.32})$$

при котором сумме и произведению матриц вида (Д.31) соответствует сумма и произведение матриц вида (Д.32) (это соответствие называется изоморфизмом). Например, если определить комплексный вектор

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + jy, \quad (\text{Д.33})$$

то легко показать, что

$$[\mathbf{x}^T \ \mathbf{y}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{V} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{z}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{z}, \quad (\text{Д.34})$$

$$[\mathbf{x}^T \ \mathbf{y}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{V} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \mathbf{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{z}^\dagger \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z}. \quad (\text{Д.35})$$

Комплексный случайный вектор  $\mathbf{z}$ , определенный равенством (Д.33), будет называться комплексным гауссовским случайным вектором, если его действительная часть  $\mathbf{x}$  и мнимая часть  $\mathbf{y}$  являются совместно гауссовскими векторами и их совместная ковариационная матрица имеет специальный вид (Д.30).

Если вектор  $\mathbf{z}$  имеет нулевое среднее, то его ковариационная матрица определяется соотношением

$$E \{ \mathbf{z} \mathbf{z}^\dagger \} = E \{ (\mathbf{x} + jy) (\mathbf{x}^T - jy^T) \} = \mathbf{V} + j\mathbf{W} = \mathbf{C}. \quad (\text{Д.36})$$

Если скалярные случайные величины  $z_1, z_2, z_3, z_4$  имеют комплексное гауссовское совместное распределение с нулевым средним, то

$$E \{ z_1 z_2^* z_3^* z_4 \} = E \{ z_1 z_2^* \} E \{ z_3^* z_4 \} + E \{ z_1 z_3^* \} E \{ z_2^* z_4 \}. \quad (\text{Д.37})$$

Плотность распределения вероятностей комплексного гауссовского случайного вектора  $\mathbf{z}$  со средним  $\mathbf{u}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{C}$  может быть записана в виде

$$p(\mathbf{z}) = \pi^{-n} (\det \mathbf{C})^{-1} \exp \{ -(\mathbf{z} - \mathbf{u})^\dagger \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{u}) \}. \quad (\text{Д.38})$$

Произвольное линейное преобразование комплексного гауссовского случайного вектора дает комплексный гауссовский случайный вектор. Например, если

$$\mathbf{s} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (\text{Д.39})$$

то  $\mathbf{s}$  также комплексный гауссовский случайный вектор со средним

$$E \{ \mathbf{s} \} = \mathbf{A} E \{ \mathbf{x} \} + \mathbf{b} \quad (\text{Д.40})$$

и ковариационной матрицей

$$\text{cov}(\mathbf{s}) = \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}^\dagger. \quad (\text{Д.41})$$

Если  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$  — два совместно гауссовских комплексных случайных вектора со средним  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  и совместной ковариационной матрицей

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.42})$$

то условное распределение  $\mathbf{z}_1$  при заданном  $\mathbf{z}_2$  также является комплексным гауссовским с

$$E \{ \mathbf{z}_1 / \mathbf{z}_2 \} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{C}_{12} \mathbf{C}_{22}^{-1} (\mathbf{z}_2 - \mathbf{u}_2) \quad (\text{Д.43})$$

и

$$\text{cov} \{ \mathbf{z}_1 / \mathbf{z}_2 \} = \mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{12} \mathbf{C}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21}. \quad (\text{Д.44})$$

Эрмитовы формы являются комплексными аналогами квадратичных форм для действительных векторов и играют важную роль во многих задачах оптимизации. Предположим, что  $\mathbf{z}$  — комплексный гауссовский случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\mathbf{C}$ . Тогда эрмитова форма

$$y = \mathbf{z}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{z} \quad (\text{Д.45})$$

имеет следующую характеристическую функцию:

$$C_y(j\theta) \triangleq E \{e^{j\theta y}\} = [\det(\mathbf{I} - j\theta \mathbf{C} \mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger)]^{-1}. \quad (\text{Д.46})$$

Среднее значение  $y$  и второй момент имеют вид

$$E\{y\} = E\{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{z}\} = \text{tr}[E\{\mathbf{K}^\dagger \mathbf{z} \mathbf{z}^\dagger \mathbf{K}\}] = \text{tr}(\mathbf{K}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{K}) = \text{tr}(\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{C}), \quad (\text{Д.47})$$

$$E\{y^2\} = E\{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{z} \mathbf{z}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{z}\} = \text{tr}[(\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{C})^2] + [\text{tr}(\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{C})]^2. \quad (\text{Д.48})$$

Из (Д.47) и (Д.48) следует, что

$$\text{var}(y) = \text{tr}[(\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{C})^2]. \quad (\text{Д.49})$$

Для того чтобы записать выражения, справедливые как для действительных, так и для комплексных гауссовских случайных векторов, введем параметр  $\alpha$ , определяемый как  $\alpha = 1$  для действительных и  $\alpha = 2$  для комплексных случайных векторов. Тогда плотность вероятностей вектора  $\mathbf{x}$ , характеристическую функцию квадратичной формы  $y$  и дисперсию этой квадратичной формы можно записать в виде

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{-n\alpha/2} (\det \mathbf{V})^{-\alpha/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \alpha (\mathbf{x} - \mathbf{u})^\dagger \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{u})\right\}, \quad (\text{Д.50})$$

$$C_y(j\theta) = \left[\det\left(\mathbf{I} - j\frac{\theta \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{2}}{\alpha}\right)\right]^{-\alpha/2}, \quad (\text{Д.51})$$

$$\text{var}(y) = \left(\frac{2}{\alpha}\right) \text{tr}\{(\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{V})^2\}. \quad (\text{Д.52})$$

Приведем также один полезный результат, касающийся некоторых преобразований комплексных случайных величин. Пусть  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$  — комплексный случайный вектор (не обязательно гауссовский), ковариационная матрица которого удовлетворяет условиям (Д.28), (Д.29). Рассмотрим действительную случайную величину

$$r = \text{Re}\{\mathbf{k}^\dagger \mathbf{z}\}, \quad (\text{Д.53})$$

где  $\text{Re}\{\cdot\}$  означает действительную часть выражения в скобках и

$$\mathbf{k}^\dagger = \mathbf{a}^T - j\mathbf{b}^T. \quad (\text{Д.54})$$

Тогда  $r$  можно записать в виде

$$r = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad (\text{Д.55})$$

и поэтому

$$E\{r\} = \mathbf{a}^T E\{\mathbf{x}\} + \mathbf{b}^T E\{\mathbf{y}\} = \text{Re}\{\mathbf{k}^\dagger E\{\mathbf{z}\}\}. \quad (\text{Д.56})$$

Дисперсию  $r$  можно найти по формуле

$$\begin{aligned} \text{var}(r) &\triangleq E\{[r - E\{r\}]^2\} = \frac{1}{2} [\mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{V} \mathbf{b} - \mathbf{a}^T \mathbf{W} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{W} \mathbf{a}] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{k}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{Д.57})$$

## Приложение Е. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ КОМПЛЕКСНЫМИ ВЕКТОРАМИ

Для того чтобы интерпретировать сложные выражения, которые появляются при выводе формул для коэффициента передачи антенной решетки, следует рассмотреть геометрическую трактовку некоторых соотношений между комплексными векторами. Эта трактовка помогает дать простое объяснение полученным результатам. Материал этого приложения основан на работе [Е.1].

Рассмотрим понятие угла между векторами. Пусть  $\mathbf{C}$  — положительно определенная эрмитова матрица и пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — два  $N$ -мерных комплексных вектора. Обобщенное скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно определить

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{C}) \triangleq \mathbf{a}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{b}. \quad (\text{Е.1})$$

Множество всех комплексных векторов с введенным таким образом скалярным произведением обозначим символом  $H(\mathbf{C})$ . В этом комплексном векторном пространстве угол между векторами можно определить соотношением

$$\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{C}) \triangleq \frac{|\mathbf{a}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{b}|^2}{\{\mathbf{a}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{a}\} \{\mathbf{b}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{b}\}}. \quad (\text{Е.2})$$

Применив неравенство Шварца к (Е.2), получим

$$0 \leq \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{C}) \leq 1. \quad (\text{Е.3})$$

В пространстве  $H(\mathbf{C})$  длина вектора  $\mathbf{b}$  равна  $(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{C} \mathbf{b})^{1/2}$ ; векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны, если  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{C}) = 0$ ; векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны (т. е. отличаются только скалярным множителем) тогда и только тогда, когда  $\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{C}) = 1$ . Определим синус угла между векторами с помощью естественного тригонометрического тождества:

$$\sin^2(\cdot) = 1 - \cos^2(\cdot). \quad (\text{Е.4})$$

Для адаптивных антенных решеток представляют особый интерес случаи, когда  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{C} = \mathbf{Q}^{-1}$  (где  $\mathbf{Q}$  — нормированная спектральная матрица шума). При  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  вместо  $\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{I})$  будет применяться упрощенное обозначение  $\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Для того чтобы лучше понять влияние матрицы  $\mathbf{Q}^{-1}$  на угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , сравним между собой  $\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{Q}^{-1})$ . Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{Q}$ , а  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$  — соответствующие им нормированные собственные векторы. Так как матрица  $\mathbf{Q}$  нормирована, то  $\text{tr} \mathbf{Q} = \sum_i \lambda_i = N$ . Представим векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  через их проекции на направления собственных векторов матрицы:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N h_i \mathbf{e}_i, \quad \text{где } h_i = \mathbf{e}_i^\dagger \mathbf{a}, \quad (\text{Е.5})$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N g_i \mathbf{e}_i, \quad \text{где } g_i = \mathbf{e}_i^\dagger \mathbf{b}. \quad (\text{Е.6})$$



Подставив (E.5) и (E.6) в (E.2) и использовав свойство ортонормированности собственных векторов<sup>1</sup>, получим

$$\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\left| \sum_{i=1}^N h_i^* g_i \right|^2}{\left( \sum_{i=1}^N |h_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^N |g_i|^2 \right)}, \quad (\text{E.7})$$

$$\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{Q}^{-1}) = \frac{\left| \sum_{i=1}^N h_i^* g_i / \lambda_i \right|^2}{\left( \sum_{i=1}^N |h_i|^2 / \lambda_i \right) \left( \sum_{i=1}^N |g_i|^2 / \lambda_i \right)}. \quad (\text{E.8})$$

Из (E.7) и (E.8) следует, что влияние матрицы  $\mathbf{Q}^{-1}$  состоит во взвешивании составляющих  $h_i$  и  $g_i$  с весом  $(1/\lambda_i)^{1/2}$ . Это взвешивание подчеркивает те составляющие векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , которые соответствуют малым собственным значениям  $\mathbf{Q}$ , и это понятно, так как эти составляющие содержат меньше шума, чем остальные.

---

<sup>1</sup> Здесь подразумевается, что речь идет об ортонормированности относительно скалярного произведения  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$ . (Прим. ред.)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К главе 1

- [1] L. C. Van Atta, "Electromagnetic Reflection," U.S. Patent 2908002, October 6, 1959.
- [2] *IEEE Trans. Antennas Propag.* (Special Issue on Active and Adaptive Antennas), Vol. AP-12, March 1964.
- [3] D. L. Margerum, "Self-Phased Arrays," in *Microwave Scanning Antennas*, Vol. 3, *Array Systems*, edited by R. C. Hansen, Academic Press, New York and London, 1966, Ch. 5.
- [4] P. W. Howells, "Intermediate Frequency Sidelobe Canceller," U.S. Patent 3202990, August 24, 1965.
- [5] P. W. Howells, "Explorations in Fixed and Adaptive Resolution at GE and SURC," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Special Issue on Adaptive Antennas, Vol. AP-24, No. 5, pp. 575-584, September 1976.
- [6] S. P. Applebaum, "Adaptive Arrays," Syracuse University Research Corporation, Rep. SPL TR66-1, August 1966.
- [7] B. Widrow, "Adaptive Filters I: Fundamentals," Stanford University Electronics Laboratories, System Theory Laboratory, Center for Systems Research, Rep. SU-SEL-66-12, Tech. Rep. 6764-6, December 1966.
- [8] B. Widrow, "Adaptive Filters," in *Aspects of Network and System Theory*, edited by R. E. Kalman and N. DeClaris, Holt, Rinehard and Winston, New York, 1971, Ch. 5.
- [9] B. Widrow, P. E. Mantey, L. J. Griffiths, and B. B. Goode, "Adaptive Antenna Systems," *Proc. IEEE*, Vol. 55, December 1967.
- [10] L. Spitzer, Jr., "Basic Problems of Underwater Acoustic Research," National Research Council, Committee on Undersea Warfare, Report of Panel on Underwater Acoustics, September 1, 1948, NRC CUW 0027.
- [11] R. H. Bolt and T. F. Burke, "A Survey Report on Basic Problems of Acoustics Research," Panel on Undersea Warfare, National Research Council, 1950.
- [12] H. Mermoz, "Filtrage adapté et utilisation optimale d'une antenne," Proceedings NATO Advanced Study Institute, September 14-26, 1964. "Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics," (Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires de Grenoble, Grenoble, France), 1964, pp. 163-294.
- [13] F. Bryn, "Optimum Signal Processing of Three-Dimensional Arrays Operating on Gaussian Signals and Noise," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34, March 1962, pp. 289-297.
- [14] S. W. W. Shor, "Adaptive Technique to Discriminate Against Coherent Noise in a Narrowband System," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 39, January 1966, pp. 74-78.
- [15] P. E. Green, Jr., R. A. Frosch, and C. F. Romney, "Principles of an Experimental Large Aperture Seismic Array (LASA)," *Proc. IEEE*, Vol. 53, December 1965, pp. 1821-1833.
- [16] R. T. Lacoss, "Adaptive Combining of Wideband Array Data for Optimal Reception," *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, Vol. GE-6, May 1968, pp. 78-86.
- [17] B. D. Steinberg, "On Teleseismic Beam Formation by Very Large Arrays," *Bull. Seismol. Soc. Am.*, August 1971.
- [18] *IEEE Trans. Antennas Propag.* (Special Issue on Adaptive Antennas), Vol. AP-24, September 1965.
- [19] A. J. Berni, "Angle of Arrival Estimation Using an Adaptive Antenna Array," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-11, No. 2, March 1975, pp. 278-284; see errata *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AFS-11, May and July 1975.

- [20] R. C. Davis, L. E. Brennan, and I. S. Reed, "Angle Estimation with Adaptive Arrays in External Noise Fields," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-12, No. 2, March 1976, pp. 179-186.
- [21] B. D. Steinberg, *Principles of Aperture and Array System Design*, Wiley, New York, 1976, Ch. 11.
- [22] B. D. Steinberg, "Design Approach for a High-Resolution Microwave Imaging Radio Camera," *J. Franklin Inst.*, Vol. 296, No. 6, December 1973.
- [23] E. N. Powers and B. D. Steinberg, "Valley Forge Research Center Adaptive Array," USNC/URSI Annual Meeting, Boulder, CO, October 1975.
- [24] L. J. Griffiths, "A Simple Adaptive Algorithm for Real-Time Processing in Antenna Arrays," *Proc. IEEE*, Vol. 57, No. 10, October 1969.
- [25] J. Chang and F. Tuteur, "Optimum Adaptive Array Processor," Proceedings of the Symposium on Computer Processing in Communications, April 8-10, 1969, Polytechnic Institute of Brooklyn, pp. 695-710.
- [26] O. L. Frost, "An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing," *Proc. IEEE*, Vol. 60, No. 8, August 1972.
- [27] C. A. Baird, "Recursive processing for Adaptive Arrays," Proceedings of Adaptive Antenna Systems Workshop, Vol. 1, Naval Research Laboratory, Washington, D.C., September 27, 1974, pp. 163-180.
- [28] R. T. Adams, "An Adaptive Antenna System for Maximizing Signal-to-Noise Ratio," Wescon Conference Proceedings, Session 24, 1966, pp. 1-4.
- [29] L. J. Griffiths, "Signal Extraction Using Real-Time Adaptation of a Linear Multichannel Filter," SEL-68-017, Tech. Rep. No. 6788-1, System Theory Laboratory, Stanford University, February 1968.
- [30] L. E. Brennan, E. L. Pugh, and I. S. Reed, "Control Loop Noise in Adaptive Array Antennas," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-7, March 1971, pp. 254-262.
- [31] C. A. Baird, Jr. and J. T. Rickard, "Recursive Estimation in Array Processing," Proceedings of the Fifth Asilomar Conference on Circuits and Systems, 1971, Pacific Grove, CA., pp. 509-513.
- [32] J. J. Faran and R. Hills, Jr., "Wide-Band Directivity of Receiving Arrays," Harvard University Acoustics Research Laboratory, Tech. Memo. 31, May 1, 1953.
- [33] H. H. Az-Khatib and R. T. Compton, Jr., "A Gain Optimizing Algorithm for Adaptive Arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-26, No. 2, March 1978, pp. 228-235.
- [34] N. Wiener, *Extrapolation, Interpretation, and Smoothing of Stationary Time Series*, MIT Press and Wiley, New York, 1949.
- [35] H. L. Van Trees, "Optimum Processing for Passive Sonar Arrays," IEEE 1966 Ocean Electronics Symposium, August 29-31, Honolulu, HI, pp. 41-65.
- [36] K. Takao, M. Fujita, and T. Nishi, "An Adaptive Antenna Array Under Directional Constraint," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 662-669.
- [37] J. Capon, R. J. Greenfield, and R. J. Kolker, "Multi-Dimensional Maximum-Likelihood Processing of a Large Aperture Seismic Array," *Proc. IEEE*, Vol. 55, February 1967, pp. 192-217.
- [38] J. F. Clearbout, "A Summary, by Illustration, of Least-Square Filter With Constraints," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-14, March 1968, pp. 269-272.
- [39] A. Booker and C. Y. Ong, "Multiple-Constraint Adaptive Filtering," *Geophysics*, Vol. 36, June 1971, pp. 498-509.
- [40] Proceedings of the Symposium on Signal Processing in Radar and Sonar Directional Systems (with Special Reference to Systems Common to Radar, Sonar, Radio Astronomy,

Ultrasonics, and Seismology), July 6-9, 1964, published by The Institution of Electronics and Radio Engineers, 8-9 Bedford Square, London, W.C. 1.

[41] B. Wyndham, "Demonstrating Radar Using Sonar, Parts 1 and 2," *Wireless World*, August 1968, pp. 248-251, and September 1968, pp. 325-328.

[42] R. L. Deavenport, "The Influence of the Ocean Environment on Sonar System Design," EASCON 1975 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, September 29-October 1, Washington, DC, pp. 66.A-66.E.

[43] W. G. Bruner, W. N. Case, and R. C. Leedom, "Digital Control in Modern Radar," EASCON 1971 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, October 6-8, 1971, Washington, DC, pp. 200-207.

[44] R. T. Compton, Jr., "An Experimental Four-Element Adaptive Array," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1965, pp. 697-706.

[45] W. L. Curtis, "Spiral Antennas," *IRE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-8, May, 1960, pp. 298-306.

[46] R. H. DuHamel and D. G. Berry, "Logarithmically Periodic Antenna Arrays," IRE WESCON Convention Record, 1958, Vol. 2, Pt. 1, pp. 161-174.

[47] R. Nitzberg, "OTH Radar Aurora Clutter Rejection when Adapting a Fraction of the Array Elements," EASCON 1976 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, Washington, DC, September 26-29, 1976, paper 62-A.

[48] A. Vurai, "A Comparative Performance Study of Adaptive Array Processors," Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, May 9-11, 1977, Hartford, CT, paper 20.G.

[49] D. R. Morgan, "Partially Adaptive Array Techniques," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-26, No. 6, November 1978, pp. 823-833.

[50] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, McGraw-Hill, New York, 1962, Ch. 7.

[51] H. R. Senf, "Electronic Antenna Scanning," Proceedings of the National Conference on Aeronautical Electronics, 1958, Dayton, OH, pp. 407-411.

[52] H. G. Byers and M. Katchky, "Slotted-Waveguide Array for Marine Radar," *Electronics*, Vol. 31, December 5, 1958, pp. 94-96.

[53] A. M. McCoy, J. E. Walsh, and C. F. Winter, "A Broadband, Low Sidelobe, Radar Antenna," IRE WESCON Convention Record, 1958, Vol. 2, Pt. 1, pp. 234-250.

[54] D. H. Ring, "The FH MUSA Antenna," Report of Conference on Rapid Scanning, MIT Radiation Laboratory Report 54-27, June 15, 1943, pp. 3-15.

[55] H. T. Friis and W. D. Lewis, "Radar Antennas," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 26, April, 1947, pp. 219-317.

[56] S. N. Van Voorhies, (ed.), *Microwave Receivers*, MIT Radiation Laboratory Series, Vol. 23, McGraw-Hill, New York, 1948.

[57] G. A. Gray and F. E. Nathanson, "Digital Processing of Radar Signals," EASCON 1971 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, October 6-8, 1971, Washington, DC, pp. 208-215.

[58] D. K. Barton, "Radar Technology for the 1980's," *Microwave J.*, November 1978, pp. 81-86.

[59] R. M. O'Donnell et. al., "Advanced Signal Processing for Airport Surveillance Radars," EASCON 1974 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, 1974, Washington, DC, pp. 71A-71F.

[60] A. A. Winder, "Underwater Sound—A Review: II. Sonar System Technology," *IEEE Trans. Sonics and Ultrason.*, Vol. SU-22, No. 5, September 1975, pp. 291-332.

[61] C. H. Sherman, "Underwater Sound—A Review: I. Underwater Sound Transducers," *IEEE Trans. Sonics and Ultrason.* Vol. SU-22, No. 5, September 1975, pp. 281-290.

- [62] E. A. Massa, "Deep Water Transducers for Ocean Engineering Applications," Proceedings, IEEE 1966 Ocean Electronics Symposium, August 29-31, Honolulu, HI, pp. 31-39.
- [63] T. F. Hueter, "Twenty Years in Underwater Acoustics: Generation and Reception," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 51, No. 3 (Part 2), March 1972, pp. 1025-1040.
- [64] J. S. Hickman, "Trends in Modern Sonar Transducer Design," proceedings of the Twenty-Second National Electronics Conference, October 1966, Chicago, IL.
- [65] E. L. Carson, G. E. Martin, G. W. Benthien, and J. S. Hickman, "Control of Element Velocity Distributions in Sonar Projection Arrays," Proceedings of the Seventh Navy Science Symposium, May 1963, Pensacola, FL.
- [66] J. F. Bartram, R. R. Ramseyer, and J. M. Heines, "Fifth Generation Digital Sonar Signal Processing," IEEE EASCON 1976 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, September 26-29, Washington, DC, pp. 91.A-91.G.
- [67] T. F. Hueter, J. C. Preble, and G. D. Marshall, "Distributed Architectures for Sonar Systems and Their Impact on Operability," IEEE EASCON 1976 Record, IEEE Electronics and Aerospace Convention, September 26-29, Washington, DC, pp. 96.A-96.F.
- [68] V. C. Anderson, "The First Twenty Years of Acoustic Signal Processing," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 51, No. 3 (Part 2), March 1972, pp. 1062-1063.
- [69] M. Federici, "On the Improvement of Detection and Precision Capabilities of Sonar Systems," Proceedings of the Symposium on Sonar Systems, July 9-12, 1962, University of Birmingham, pp. 535-540. Reprinted in *J. Br. I.R.E.*, Vol. 25, No. 6, June 1963.
- [70] G. G. Rassweiler, M. R. Williams, L. M. Payne, and G. P. Martin, "A Miniaturized Lightweight Wideband Null Steerer," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, September 1976, pp. 749-754.
- [71] W. R. Jones, W. K. Masenten, and T. W. Miller, "UHF Adaptive Array Processor Development for Naval Communications," Digest AP-S Int. Symp., *IEEE Ant. and Prop. Soc.*, June 20-22, 1977, Stanford, CA, IEEE Cat. No. 77CH1217-9 AP, pp. 394-397.
- [72] G. Wade, "Acoustic Imaging with Holography and Lenses," *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, Vol. SU-22, No. 6, November 1975, pp. 385-394.

#### К главе 2

- [1] P. W. Howells, "Explorations in Fixed and Adaptive Resolution at GE and SURC," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 575-584.
- [2] R. L. Deavenport, "The Influence of the Ocean Environment on Sonar System Design," IEEE 1975 EASCON Record, Electronics and Aerospace Systems Convention, September 29-October 1, pp. 66.A-66.E.
- [3] A. A. Winder, "Underwater Sound—A Review: II. Sonar System Technology," *IEEE Trans. Sonics and Ultrason.*, Vol. SU-22, No. 5, September 1975, pp. 291-332.
- [4] L. W. Nolte and W. S. Hodgkiss, "Directivity or Adaptivity?," IEEE 1975 EASCON Record, Electronics and Aerospace Systems Convention, September 29-October 1, pp. 35.A-35.H.
- [5] G. M. Wenz, "Review of Underwater Acoustics Research: Noise," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 51, No. 3 (Part 2), March 1972, pp. 1010-1024.
- [6] B. W. Lindgren, *Statistical Theory*, MacMillan, New York, 1962, Ch. 4.
- [7] F. Bryn, "Optimum Structures of Sonar Systems Employing Spatially Distributed Receiving Elements," in NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, Vol. 2. Paper No. 30, Enschede, the Netherlands, August 1968.
- [8] H. Cox, "Optimum Arrays and the Schwartz Inequality," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 45, No. 1, January 1969, pp. 228-232.

- [9] R. S. Elliott, "The Theory of Antenna Arrays," in *Microwave Scanning Antennas, Vol. 2, Array Theory and Practice*, edited by R. C. Hansen, Academic Press, New York and London, 1966; Ch. 1.
- [10] M. T. Ma, *Theory and Application of Antenna Arrays*, Wiley, New York, 1974, Ch. 3.
- [11] B. D. Steinberg, *Principles of Aperture and Array System Design*, Wiley, New York, 1976.
- [12] C. A. Lewis, "On the Grating Lobes of Arrays of Large Subapertures," Paper C3-4, 1978 National Radio Science Meeting, International Union of Radio Science, January, Boulder, CO.
- [13] F. Hodjat and S. A. Hovanesian, "Nonuniformly Spaced Linear and Planar Array Antennas for Sidelobe Reduction," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-26, No. 2, March 1978, pp. 198-204.
- [14] S. S. Sandler, "Some Equivalences Between Equally and Unequally Spaced Arrays," *IRE Trans. Antennas and Propag.*, Vol. AP-8, No. 5, September 1960, pp. 496-500.
- [15] R. F. Harrington, "Sidelobe Reduction by Nonuniform Element Spacing," *IRE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-9, No. 2, March 1961, pp. 187-192.
- [16] D. D. King, R. F. Packard, and R. K. Thomas, "Unequally Spaced, Broadband Antenna Arrays," *IRE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-8, No. 4, July 1960, pp. 380-385.
- [17] M. I. Skolnik, "Nonuniform Arrays," in *Antenna Theory, Part 1*, edited by R. E. Collin and F. J. Zucker, McGraw-Hill, New York, 1969, Ch. 6.
- [18] Y. T. Lo, "A Mathematical Theory of Antenna Arrays with Randomly Spaced Elements," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-12, May 1964, pp. 257-268.
- [19] Y. T. Lo and R. J. Simcoe, "An Experiment on Antenna Arrays with Randomly Spaced Elements," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-15, March 1967, pp. 231-235.
- [20] J. L. Kmetz, "An Analytical Approach to the Coverage of a Hemisphere by  $N$  Planar Phased Arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-15, May 1967, pp. 367-371.
- [21] D. K. Cheng, "Optimization Techniques for Antenna Arrays," *Proc IEEE*, Vol. 59, No. 12, December 1971, pp. 1664-1674.
- [22] B. Widrow and M. E. Hoff, Jr., "Adaptive Switching Circuits," IRE 1960 WESCON Convention Record, Part 4, pp. 96-104.
- [23] J. H. Chang and F. B. Tuteur, "A New Class of Adaptive Array Processors," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 49, No. 3, March 1971, pp. 639-649.
- [24] L. E. Brennan, J. D. Mallet, and I. S. Reed, "Adaptive Arrays in Airborne MTI Radar," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Special Issue Adaptive Antennas, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 607-615.
- [25] P. Rudnick, "Digital Beamforming in the Frequency Domain," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 46, No. 5, 1969.
- [26] D. T. Deihl, "Digital Bandpass Beamforming with the Discrete Fourier Transform," Naval Research Laboratory Report 7359, AD-737-191, 1972.
- [27] L. Armijo, K. W. Daniel, and W. M. Labuda, "Applications of the FFT to Antenna Array Beamforming," EASCON 1974 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, October 7-9, Washington, DC, pp. 381-383.
- [28] A. M. Vural, "A Comparative Performance Study of Adaptive Array Processors," Proceedings of the 1977 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, May, pp. 695-700.
- [29] \_\_\_\_\_, "Effects of Perturbations on the Performance of Optimum/Adaptive Arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AEC-15, No. 1, January 1979, pp. 76-87.
- [30] R. J. Urick, *Principles of Underwater Sound*, McGraw-Hill, New York, 1975, p. 52.
- [31] S. H. Taheri and B. D. Steinberg, "Tolerances in Self-Cohering Antenna Arrays of Arbitrary Geometry," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 733-739.

- [1] P. L. Stocklin, "Space-Time Sampling and Likelihood Ratio Processing in Acoustic Pressure Fields," *J. Br. IRE*, July 1953, pp. 79–90.
- [2] F. Bryn, "Optimum Signal Processing of Three-Dimensional Arrays Operating on Gaussian Signals and Noise," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34, No. 3, March 1962, pp. 289–297.
- [3] D. J. Edelblute, J. M. Fisk, and G. L. Kinneson, "Criteria for Optimum-Signal-Detection Theory for Arrays," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 41, January 1967, pp. 199–206.
- [4] H. Cox, "Optimum Arrays and the Schwartz Inequality," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 45, No. 1, January 1969, pp. 228–232.
- [5] B. Widrow, P. E. Mantey, L. J. Griffiths, and B. B. Goode, "Adaptive Antenna Systems," *Proc. IEEE*, Vol. 55, December 1967, pp. 2143–2159.
- [6] L. J. Griffiths, "A Simple Algorithm for Real-Time Processing in Antenna Arrays," *Proc. IEEE*, Vol. 57, October 1969, pp. 1696–1707.
- [7] N. Owsley, "Source Location with an Adaptive Antenna Array," Naval Underwater Systems Center, Rept. NL-3015, January 1971.
- [8] A. H. Nuttall and D. W. Hyde, "A Unified Approach to Optimum and Suboptimum Processing for Arrays," U.S. Navy Underwater Sound Laboratory Report 992, April 1969, pp. 64–68.
- [9] G. W. Young and J. E. Howard, "Applications of Spacetime Decision and Estimation Theory to Antenna Processing System Design," *Proc. IEEE*, Vol. 58, May 1970, pp. 771–778.
- [10] H. Cox, "Interrelated Problems in Estimation and Detection I and II," Vol. 2, NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, Enchede, The Netherlands, August 12–23, 1968, pp. 23–1 to 23–64.
- [11] N. T. Gaarder, "The Design of Point Detector Arrays," *IEEE Trans. Inf. Theory*, part 1, Vol. IT-13, January 1967, pp. 42–50; part 2, Vol. IT-12, April 1966, pp. 112–120.
- [12] J. Capon, "Applications of Detection and Estimation Theory to Large Array Seismology," *Proc. IEEE*, Vol. 58, May 1970, pp. 760–770.
- [13] A. M. Vural, "An Overview of Adaptive Array Processing for Sonar Applications," IEEE 1975 EASCON Record, Electronics and Aerospace Systems Convention, September 29–October 1, pp. 34.A–34 M.
- [14] J. P. Burg, "Maximum Entropy Spectral Analysis," Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, August 1968.
- [15] N. L. Owsley, "A Recent Trend in Adaptive Spatial Processing for Sensor Arrays: Constrained Adaptation," Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Loughborough, England, August 1972, pp. 591–603.
- [16] R. R. Kneiper, et al., "An Eigenvector Interpretation of an Array's Bearing Response Pattern," Naval Underwater Systems Center, Rept. No. 1098, May 1970.
- [17] H. Cox, "Sensitivity Considerations in Adaptive Beamforming," Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Loughborough, England, August 1972, pp. 621–644.
- [18] S. P. Applebaum, "Adaptive Arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 585–598.
- [19] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1965, Ch. 8.
- [20] R. A. Wiggins and E. A. Robinson, "Recursive Solution to the Multichannel Filtering Problem," *J. Geophys. Res.*, Vol. 70, No. 8, April 1965, pp. 1885–1891.
- [21] R. V. Churchill, *Introduction to Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1948, Ch. 8.

- [22] M. J. Levin, "Maximum-Likelihood Array Processing," Lincoln Laboratories, Massachusetts Institute of Technology, Lexington, MA. Semiannual Technical Summary Report on Seismic Discrimination, December 31, 1964.
- [23] J. Chang and F. Tuteur, Symposium on Common Practices in Communications, Brooklyn Polytechnic Institute, 1969.
- [24] P. E. Mantey and L. J. Griffiths, "Iterative Least-Squares Algorithms for Signal Extraction," Proceedings of the 2nd Hawaii Conference on System Sciences, 1969, pp. 767-770.
- [25] R. L. Riegler and R. T. Compton, Jr., "An Adaptive Array for Interference Rejection," *Proc. IEEE*, Vol. 61, No. 6, June 1973, pp. 748-758.
- [26] S. P. Applebaum, Syracuse University Research Corporation Report SPL TR 66-1, Syracuse, NY, August 1966.
- [27] S. W. W. Shor, "Adaptive Technique to Discriminate Against Coherent Noise in a Narrow-Band System," *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 34, No. 1, pp. 74-78.
- [28] R. T. Adams, "An Adaptive Antenna System for Maximizing Signal-to-Noise Ratio," WESCON Conference Proceedings, Session 24, 1966, pp. 1-4.
- [29] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [30] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, 1968, Ch. 10.
- [31] B. D. Steinberg, *Principles of Aperture and Array System Design*, Wiley, New York, 1976, Ch. 12.
- [32] L. J. Griffiths, "Signal Extraction Using Real-Time Adaptation of a Linear Multichannel Filter," SEL-68-017, Tech. Rep. No. 6788-1, System Theory Laboratory, Stanford University, February 1968.
- [33] R. T. Lacoss, "Adaptive Combining of Wideband Array Data for Optimal Reception," *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, Vol. GE-6, No. 2, May 1968, pp. 78-86.
- [34] C. A. Baird, Jr., and J. T. Rickard, "Recursive Estimation in Array Processing," Proceedings of the Fifth Asilomar Conference on Circuits and Systems, 1971, pp. 509-513.
- [35] C. A. Baird, Jr., and C. L. Zahm, "Performance Criteria for Narrowband Array Processing," 1971 IEEE Conference on Decision and Control, December 15-17, Miami Beach, FL, pp. 564-565.
- [36] W. W. Peterson, T. G. Birdsall, and W. C. Fox, "The Theory of Signal Detectability," *IRE Trans.*, PGIT-4, 1954, pp. 171-211.
- [37] D. Middleton and D. Van Meter, "Modern Statistical Approaches to Reception in Communication Theory," *IRE Trans.*, PGIT-4, 1954, pp. 119-145.
- [38] T. G. Birdsall, "The Theory of Signal Detectability: ROC Curves and Their Character," Tech. Rept. No. 177, Cooley Electronics Laboratory, University of Michigan, Ann Arbor, MI, 1973.
- [39] W. J. Bangs and P. M. Schultheiss, "Space-Time Processing for Optimal Parameter Estimation," Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Loughborough, England, August 1972, pp. 577-589.
- [40] L. W. Nolte, "Adaptive Processing: Time-Varying Parameters, Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Loughborough, England, August 1972, pp. 647-655.
- [41] D. O. North, "Analysis of the Factors which Determine Signal/Noise Discrimination in Radar," Rept. PTR-6C, RCA Laboratories, 1943.
- [42] L. A. Zadeh and J. R. Ragazzini, "Optimum Filters for the Detection of Signals in Noise," *IRE Proc.*, Vol. 40, 1952, pp. 1223-1231.
- [43] G. L. Turin, "An Introduction to Matched Filters," *IRE Trans.*, Vol. IT-6, June 1960, pp. 311-330.



- [44] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part 1*, Wiley, New York, 1968, Ch. 2.
- [45] H. Cox, "Resolving Power and Sensitivity to Mismatch of Optimum Array Processors," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 54, No. 3, September 1973, pp. 771-785.
- [46] H. L. Van Trees, "Optimum Processing for Passive Sonar Arrays," IEEE 1966 Ocean Electronics Symposium, August, Hawaii, pp. 41-65.
- [47] L. W. Brooks and I. S. Reed, "Equivalence of the Likelihood Ratio Processor, The Maximum Signal-to-Noise Ratio Filter, and the Wiener Filter," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-8, No. 5, September 1972, pp. 690-691.
- [48] A. M. Vural, "Effects of Perturbations on the Performance of Optimum/Adaptive Arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-15, No. 1, January 1979, pp. 76-87.
- [49] R. Nitzberg, "Effect of Errors in Adaptive Weights," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-12, No. 3, May 1976, pp. 369-373.
- [50] J. P. Burg, "Three-Dimensional Filtering with an Array of Seismometers," *Geophysics*, Vol. 29, No. 5, October 1964, pp. 693-713.

#### К главе 4

- [1] B. Widrow, "Adaptive Filters," in *Aspects of Network and System Theory*, edited by R. E. Kalman and N. DeClaris, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970, pp. 563-587.
- [2] F. R. Ragazzini and G. F. Franklin, *Sampled-Data Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1958.
- [3] E. I. Jury, *Sampled-Data Control Systems*, Wiley, New York, 1958.
- [4] J. T. Tou, *Digital and Sampled-Data Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [5] B. C. Kuo, *Discrete-Data Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [6] B. Widrow, "Adaptive Filters I: Fundamentals," Stanford Electronics Laboratories, Stanford, CA; Rept. SEL-66-126 (Tech. Rept. 6764-6), December 1966.
- [7] J. S. Koford and G. F. Groner, "The Use of an Adaptive Threshold Element to Design a Linear Optimal Pattern Classifier," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-12, January 1966, pp. 42-50.
- [8] K. Steinbuch and B. Widrow, "A Critical Comparison of Two Kinds of Adaptive Classification Networks," *IEEE Trans. Electron. Comput. (Short Notes)*, Vol. EC-14, October 1965, pp. 737-740.
- [9] F. W. Smith, "Design of Quasi-Optimal Minimum-Time Controllers," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-11, January 1966, pp. 71-77.
- [10] B. Widrow, P. E. Mantey, L. J. Griffiths, and B. B. Goode, "Adaptive Antenna Systems," *Proc. IEEE*, Vol. 55, No. 12, December 1967, pp. 2143-2159.
- [11] L. J. Griffiths, "Signal Extraction Using Real-Time Adaptation of a Linear Multichannel Filter," Ph.D. Dissertation, Stanford University, December 1967.
- [12] K. D. Senne and L. L. Horowitz, "New Results on Convergence of the Discrete-Time LMS Algorithm Applied to Narrowband Adaptive Arrays," Proceedings of the 17th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA., 10-12 January, 1979, pp. 1166-1167.
- [13] R. T. Compton, Jr., "An Adaptive Array in a Spread-Spectrum Communication System," *Proc. IEEE*, Vol. 66, No. 3, March 1978, pp. 289-298.
- [14] D. M. DiCarlo and R. T. Compton, Jr., "Reference Loop Phase Shift in Adaptive Arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-14, No. 4, July 1978, pp. 599-607.
- [15] B. Widrow and J. M. McCool, "A Comparison of Adaptive Algorithms Based on the

Methods of Steepest Descent and Random Search," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 615-638.

- [16] B. W. Lindgren, *Statistical Theory*, Macmillan, New York, 1960, Ch. 5.
- [17] M. R. Hestenes and E. Stiefel, "Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems," *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, Vol. 29, 1952, p. 409.
- [18] J. D. Powell, "An Iterative Method for Finding Stationary Values of a Function of Several Variables," *Comput. J. (Br.)*, Vol. 5, No. 2, July 1962, pp. 147-151.
- [19] R. Fletcher and M. J. D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," *Comput. J. (Br.)*, Vol. 6, No. 2, July 1963, pp. 163-168.
- [20] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Functional Minimization by Conjugate Gradients," *Comput. J. (Br.)*, Vol. 7, No. 2, July 1964, pp. 149-154.
- [21] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, New York, 1969, Ch. 10.
- [22] L. Hasdorff, *Gradient Optimization and Nonlinear Control*, Wiley, New York, 1976.
- [23] L. S. Lasdon, S. K. Mitter, and A. D. Waren, "The Method of Conjugate Gradients for Optimal Control Problems," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-12, No. 2, April 1967, pp. 132-138.
- [24] O. L. Frost, III, "An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing," *Proc. IEEE*, Vol. 60, No. 8, August 1972, pp. 926-935.
- [25] A. E. Bryson, Jr. and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Blaisdell, Waltham, MA 1969, Ch. 1.
- [26] E. J. Kelly, and M. J. Levin, "Signal Parameter Estimation for Seismometer Arrays," Massachusetts Institute of Technology, Lincoln Laboratories Technical Rept. 339, January, 1964.
- [27] A. H. Nuttall, and D. W. Hyde, "A Unified Approach to Optimum and Suboptimum Processing for Arrays," U.S. Navy Underwater Sound Laboratory, New London, CT, USL Rep. 992, April 1969.
- [28] R. N. McDonald, "Degrading Performance of Nonlinear Array Processors in the Presence of Data Modeling Errors," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 51, No. 4, April 1972, pp. 1186-1193.
- [29] D. Q. Mayne, "On the Calculation of Pseudoinverses," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-14, No. 2, April 1969, pp. 204-205.
- [30] K. Takao, M. Fujita, and T. Nishi, "An Adaptive Antenna Array Under Directional Constraint," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 662-669.
- [31] O. L. Frost, III, "Adaptive Least Squares Optimization Subject to Linear Equality Constraints," Stanford Electronics Laboratories, Stanford, CA, DOC. SEL-70-053, Tech. Rep. TR6796-2, August 1970.
- [32] J. L. Moschner, "Adaptive Filtering with Clipped Input Data," Stanford Electronics Laboratories, Stanford, CA, Dec. SEL-70-053, Tech. Rep. TR6796-1, June 1970.
- [33] H. S. Lu, "Polarization Separation by an Adaptive Filter," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Sys.*, Vol. AES-9, No. 6, November 1973, pp. 954-956.

## К главе 5

- [1] P. W. Howells, "Intermediate Frequency Side-Lobe Canceller," U.S. Patent 3202990, August 24, 1965.
- [2] S. P. Applebaum, "Adaptive Arrays," Syracuse University Research Corp., Report SPL TR 66-1, August 1966.
- [3] L. E. Brennan and I. S. Reed, "Theory of Adaptive Radar," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-9, No. 2, March 1973, pp. 237-252.

- [4] L. E. Brennan and I. S. Reed, "Adaptive Space-Time Processing in Airborne Radars," Technology Service Corporation, Santa Monica, CA, Report TSC-PD-061-2, February 24, 1971.
- [5] A. L. McGuffin, "Adaptive Antenna Compatibility with Radar Signal Processing," in Proceedings of the Array Antenna Conference, February 1972, Naval Electronics Laboratory, San Diego, CA.
- [6] L. E. Brennan, E. L. Pugh, and I. S. Reed, "Control Loop Noise in Adaptive Array Antennas," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-7, No. 2, March 1971, pp. 254-262.
- [7] W. F. Gabriel, "Adaptive Arrays—An Introduction," *Proc. IEEE*, Vol. 64, No. 2, February 1976, pp. 239-272.
- [8] D. L. Margerum, "Self-Phased Arrays," in *Microwave Scanning Antennas*, Vol. 3, edited by R. C. Hansen, Academic Press, New York, 1966, Ch. 5.
- [9] A. E. Covington and N. W. Broten, "An Interferometer for Radio Astronomy with a Single-Lobed Radiation Pattern," *IRE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-5, July 1957, pp. 247-255.
- [10] J. L. Pawsey and R. N. Bracewell, *Radio Astronomy, International Monographs on Radio*, Clarendon Press, Oxford, England, 1955.
- [11] H. Chestnut and R. W. Mayer, *Servo-mechanisms and Regulating System Design*, Vol. 1, 2nd ed., Wiley, New York, 1959.
- [12] L. E. Brennan and I. S. Reed, "Effect of Envelope Limiting in Adaptive Array Control Loops," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-7, No. 4, July 1971, pp. 698-700.
- [13] A. J. Berni, "Weight Jitter Phenomena in Adaptive Control Loops," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-14, No. 4, July 1977, pp. 355-361.
- [14] D. E. N. Davies, "Independent Angular Steering of Each Zero of the Directional Pattern for a Linear Array," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-15, March 1967, pp. 296-298.
- [15] S. P. Applebaum and D. J. Chapman, "Adaptive Arrays with Main Beam Constraints," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 650-662.
- [16] R. T. Compton, Jr., "Adaptive Arrays: On Power Equalization with Proportional Control," Ohio State University, Columbus, Quart. Rept. 3234-1, Contract N0019-71-C-0219, December 1971.
- [17] C. L. Zahm, "Application of Adaptive Arrays to Suppress Strong Jammers in the Presence of Weak Signals," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-9, No. 2, March 1973, pp. 260-271.
- [18] C. L. Zahm, "Effects of Errors in the Direction of Incidence on the Performance of an Adaptive Array," *Proc. IEEE*, Vol. 60, No. 8, August 1972, pp. 1008-1009.

## К главе 6

- [1] I. S. Reed, J. D. Mallett, and L. E. Brennan, "Sample Matrix Inversion Technique," Proceedings of the 1974 Adaptive Antenna Systems Workshop, March 11-13, Volume I, NRL Report 7803, Naval Research Laboratory, Washington, DC, pp. 219-222.
- [2] I. S. Reed, J. D. Mallett, L. E. Brennan, "Rapid Convergence Rate in Adaptive Arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-10, No. 6, pp. 853-863, November 1974.
- [3] T. W. Miller, "The Transient Response of Adaptive Arrays in TDMA Systems," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, The Ohio State University, 1976.
- [4] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, Part I, Wiley, New York, 1968, Ch. 1.
- [5] S. Zohar, "Toeplitz Matrix Inversion: The Algorithm of W. F. Trench," *J. Assoc. Comput. Mach.*, Vol. 16, October 1969, pp. 592-601.

- [6] N. R. Goodman, "Statistical Analysis Based on a Certain Multivariate Gaussian Distribution," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 34, March 1963, pp. 152-177.
- [7] A. B. Baggeroer, "Confidence Intervals for Regression (MEM) Spectral Estimates," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-22, No. 5, September 1976, pp. 534-545.
- [8] W. W. Smith, Jr. and S. Erdman, "A Note on Inversion of Complex Matrices," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-19, No. 1, February 1974, p. 64.
- [9] M. E. El-Hawary, "Further Comments on 'A Note on the Inversion of Complex Matrices'," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-20, No. 2, April 1975, pp. 279-280.

#### К главе 7

- [1] C. A. Baird, "Recursive Algorithms for Adaptive Arrays," Final Report, Contract No. F30602-72-C-0499, Rome Air Development Center, September 1973.
- [2] P. E. Mantey and L. J. Griffiths, "Iterative Least-Squares Algorithms for Signal Extraction," Second Hawaii International Conference on System Sciences, January 1969, pp. 767-770.
- [3] C. A. Baird, "Recursive Processing for Adaptive Arrays," Proceedings of the Adaptive Antenna Systems Workshop, March 11-13, 1974, Vol. I, NRL Report 7803, Naval Research Laboratory, Washington, DC, pp. 163-182.
- [4] R. D. Gitlin and F. R. Magee, Jr., "Self-Orthogonalizing Adaptive Equalization Algorithms," *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-25, No. 7, July 1977, pp. 666-672.
- [5] C. A. Baird, "Kalman-Type Processing for Adaptive Antenna Arrays," IEEE International Conference on Communications, June 1974, Minneapolis, Minnesota, pp. 10G-1-10G-4.
- [6] C. A. Baird, Jr. and J. T. Rickard, "Recursive Estimation in Array Processing," Fifth Asilomar Conference on Circuits and Systems, Pacific Grove, CA., November 1971, pp. 509-513.
- [7] L. J. Griffiths, "A Simple Adaptive Algorithm for Real-Time Processing in Antenna Arrays," *Proc. IEEE*, Vol. 57, No. 10, October 1969, pp. 1695-1704.
- [8] L. E. Brennan, J. D. Mallet, and I. S. Reed, "Adaptive Arrays in Airborne MTI Radar," *IEEE Trans. Antennas Propag.* Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 607-615.
- [9] J. M. Shapard, D. Edelblute, and G. Kinnison, "Adaptive Matrix Inversion," Naval Undersea Research and Development Center, NUC-TN-528, May 1971.
- [10] L. E. Brennan and I. S. Reed, "Theory of Adaptive Radar," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-9, No. 2, March 1973, pp. 237-252.
- [11] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Series D, Vol. 82, 1960, pp. 35-45.
- [12] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Trans. ASME, J. Basic Eng.* Series D, Vol. 83, March 1961, pp. 95-108.
- [13] D. Godard, "Channel Equalization Using a Kalman Filter for Fast Data Transmission," *IBM J. Res. Dev.*, May 1974, pp. 267-273.
- [14] C. A. Baird, Jr., "Recursive Minimum Variance Estimation for Adaptive Sensor Arrays," Proceedings of the IEEE 1972 International Conference on Cybernetics and Society, October 9-12, Washington, DC, pp. 412-414.
- [15] J. Capon, R. J. Greenfield, and R. J. Kolker, "Multidimensional Maximum-Likelihood Processing of a Large Aperture Seismic Array," *Proc. IEEE*, Vol. 55, No. 2, February 1967, pp. 192-211.

#### К главе 8

- [1] L. Hasdorff, *Gradient Optimization and Nonlinear Control*, Wiley, New York, 1976, Ch. 3.
- [2] W. D. White, "Accelerated Convergence Techniques," Proceedings of the 1974 Adaptive

Antenna Systems Workshop, March 11-13, Vol. 1, Naval Research Laboratory, Washington, DC, pp. 171-215.

- [3] W. D. White, "Cascade Preprocessors for Adaptive Antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September, 1976, pp. 670-684.
- [4] W. D. White, "Adaptive Cascade Networks for Deep Nulling," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-26, No. 3, May 1978, pp. 396-402.
- [5] L. E. Brennan, J. D. Mallett, I. S. Reed, "Convergence Rate in Adaptive Arrays," Technology Service Corporation Report No. TSC-PD-A177-2, July 15, 1977.
- [6] R. C. Davis, "Convergence Rate in Adaptive Arrays," Technology Service Corporation Report No. TSC-PD-A177-3, October 18, 1977.
- [7] L. E. Brennan and I. S. Reed, "Convergence Rate in Adaptive Arrays," Technology Service Corporation Report No. TSC-PD-177-4, January 13, 1978.
- [8] W. F. Gabriel, "Adaptive Array Constraint Optimization," Program and Digest 1972 G-AP International Symposium, December 11-14, 1972; pp. 4-7.
- [9] J. C. Nolen, "Synthesis of Multiple Beam Networks for Arbitrary Illuminations," Bendix Corporation, Radio Division, Baltimore, MD, April 21, 1960.
- [10] P. R. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1948, p. 98.

#### К главе 9

- [1] M. K. Leavitt, "A Phase Adaptation Algorithm," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 754-756.
- [2] P. A. Thompson, "Adaptation by Direct Phase-Shift Adjustment in Narrow-Band Adaptive Antenna Systems," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 756-760.
- [3] G. J. McMurty, "Search Strategies in Optimization," Proceedings of the 1972 International Conference on Cybernetics and Society, October, Washington, DC, pp. 436-439.
- [4] C. Karnopp, "Random Search Techniques for Optimization Problems," *Automatica*, Vol. 1, August 1963, pp. 111-121.
- [5] G. J. McMurty and K. S. Fu, "A Variable Structure Automation Used as a Multimodal Searching Technique," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-11, July 1966, pp. 379-387.
- [6] R. L. Barton, "Self-Organizing Control: The Elementary SOC—Part I," *Control Eng.*, February 1968.
- [7] ———, "Self-Organizing Control: The General Purpose SOC—Part II," *Control Eng.*, March 1968.
- [8] M. A. Schurer and K. Steiglitz, "Adaptive Step Size Random Search," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-13, June 1968, pp. 270-276.
- [9] R. A. Jarvis, "Adaptive Global Search in a Time-Variant Environment Using a Probabilistic Automaton with Pattern Recognition Supervision," *IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern.*, Vol. SSC-6, July 1970, pp. 209-217.
- [10] A. N. Mucciardi, "Self-Organizing Probability State Variable Parameter Search Algorithms for the Systems that Must Avoid High-Penalty Operating Regions," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, Vol. SMC-4, July 1974, pp. 350-362.
- [11] R. A. Jarvis, "Adaptive Global Search by the Process of Competitive Evolution," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* Vol. SMC-5, May 1975, pp. 297-311.
- [12] B. Widrow and J. M. McCool, "A Comparison of Adaptive Algorithms based on the Methods of Steepest Descent and Random Search," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 615-637.

- [13] C. A. Baird and G. G. Rassweiler, "Search Algorithms for Sonobuoy Communication," Proceedings of the Adaptive Antenna Systems Workshop, March 11-13, 1974, NRL Report 7803, Vol. I September 27, 1974, pp. 285-303.
- [14] R. L. Barron, "Inference of Vehicle and Atmosphere Parameters from Free-Flight Motions," *AIAA J. Spacecr. Rockets*, Vol. 6, No. 6, June 1969, pp. 641-648.
- [15] ———, "Guided Accelerated Random Search as Applied to Adaptive Array AMTI Radar," Proceedings of the Adaptive Antenna Systems Workshop, March 11-13, 1974, Vol. I, NRL Report 7803, September 27, 1974, pp. 101-112.
- [16] A. E. Zeger and L. R. Burgess, "Adaptive Array AMTI Radar," Proceedings of the Adaptive Antenna Systems Workshop, March 11-13, 1974, NRL Report 7803, Vol. I, September 27, 1974, pp. 81-100.
- [17] A. N. Mucciardi, "A New Class of Search Algorithms for Adaptive Computation," Proc. 1973 IEEE Conference on Decision and Control, December, San Diego, paper No. WA5-3, pp. 94-100.
- [18] L. A. Rastrigin, "The Convergence of the Random Search Method in the External Control of a Many-Parameter System," *Autom. Remote Control*, Vol. 24, No. 11, April 1964, pp. 1337-1342.
- [19] J. P. Lawrence, III and F. P. Emad, "An Analytic Comparison of Random Searching and Gradient Searching for the Extremum of a Known Objective Function," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-18, No. 6, December 1973, pp. 669-671.
- [20] R. Hooke and T. A. Jeeves, "Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems," *J. of the Assoc. for Comput. Mach.*, Vol. 8, April 1961, pp. 212-229.

#### К главе 11

- [1] W. E. Rodgers and R. T. Compton, Jr., "Tapped Delay-Line Processing in Adaptive Arrays," Report 3576-3, April 1974; prepared by The Ohio State University Electro Science Laboratory, Department of Electrical Engineering under Contract N00019-73-C-0195 for Naval Air Systems Command.
- [2] ———, "Adaptive Array Bandwidth with Tapped Delay-Line Processing," Report 3832-3, May 1975; prepared by The Ohio State University Electro Science Laboratory, Department of Electrical Engineering under Contract N00019-74-C-0141 for Naval Air Systems Command.
- [3] ———, "Adaptive Array Bandwidth with Tapped Delay-Line Processing," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-15, No. 1, January 1979, pp. 21-28.
- [4] T. G. Kincaid, "The Complex Representation of Signals," General Electric Report No. R67EMH5, October 1966, HMED Publications, Box 1122 (Le Moyne Ave.), Syracuse, NY, 13201.
- [5] R. A. Monzingo, "Transversal Filter Implementation of Wideband Weight Compensation for CSLC Applications," unpublished Hughes Aircraft Interdepartmental Correspondence Ref. No. 78-1450.10/07, March 1978.
- [6] A. M. Vural, "Effects of Perturbations on the Performance of Optimum/Adaptive Arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-15, No. 1, January 1979; pp. 76-87.
- [7] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1965, Ch. 7.

#### К главе 12

- [1] R. T. Lacoss, "Data Adaptive Spectral Analysis Methods," *Geophysics*, Vol. 36, August 1971, pp. 661-675.

- [2] T. J. Ulrych and T. N. Bishop, "Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decompositions," *Rev. Geophys. Space Phys.*, Vol. 13, 1975, pp. 183-200.
- [3] J. P. Burg, "Maximum Entropy Spectral Analysis," Paper presented at the 37th Annual Meeting of the Society of Exploration Geophysicists, October 31, 1967, Oklahoma City, OK.
- [4] ———, "A New Analysis Technique for Time Series Data," NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, Vol. I, paper no. 15; Enschede, The Netherlands, 1968.
- [5] T. J. Ulrych and R. W. Clayton, "Time Series Modelling and Maximum Entropy," *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 12, 1976, pp. 188-200.
- [6] S. B. Kesler and S. Haykin, "The Maximum Entropy Method Applied to the Spectral Analysis of Radar Clutter," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-24, No. 2, March 1978, pp. 269-272.
- [7] R. G. Taylor, T. S. Durrani, and C. Goutis, "Block Processing in Pulse Doppler Radar," *Radar-77, Proceedings of the 1977 IEE International Radar Conference*, October 25-28, London, pp. 373-378.
- [8] G. Prado and P. Moroney, "Linear Predictive Spectral Analysis for Sonar Applications," C. S. Draper Report R-1109, C. S. Draper Laboratory, Inc., 555 Technology Square, Cambridge, MA, September 1977.
- [9] R. N. McDonough, "Maximum-Entropy Spatial Processing of Array Data," *Geophysics*, Vol. 39, December 1974, pp. 843-851.
- [10] D. P. Skinner, S. M. Hedlicka, and A. D. Matthews, "Maximum Entropy Array Processing," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 66, No. 2, August 1979, pp. 488-493.
- [11] A. Van Den Bos, "Alternative Interpretation of Maximum Entropy Spectral Analysis," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-17, No. 4, July 1971, pp. 493-494.
- [12] J. P. Burg, "Maximum Entropy Spectral Analysis," Ph.D. dissertation, Stanford University, Department of Geophysics, May 1975.
- [13] J. H. Sawyers, "The Maximum Entropy Method Applied to Radar Adaptive Doppler Filtering," *Proceedings of the 1979 RADC Spectrum Estimation Workshop*, October 3-5, Griffiss AFB, Rome, NY.
- [14] S. Haykin and S. Kesler, "The Complex Form of the Maximum Entropy Method for Spectral Estimation," *Proc. IEEE*, Vol. 64, May 1976, pp. 822-823.
- [15] J. P. Burg, "The Relationship Between Maximum Entropy Spectra and Maximum Likelihood Spectra," *Geophysics*, Vol. 37, No. 2, April 1972, pp. 375-376.
- [16] R. H. Jones, "Multivariate Maximum Entropy Spectral Analysis," presented at the Applied Time Series Analysis Symposium, May 1976, Tulsa, OK.
- [17] ———, "Multivariate Autoregression Estimation Using Residuals," presented at Applied Time Series Analysis Symposium, May 1976, Tulsa, OK; also published in *Applied Time-Series Analysis*, edited by D. Findley, Academic Press, New York, 1977.
- [18] A. H. Nutall, "Fortran Program for Multivariate Linear Predictive Spectra Analysis Employing Forward and Backward Averaging," Naval Underwater System Center, NUSC Tech. Doc. 5419, New London, CT, May 9, 1976.
- [19] ———, "Multivariate Linear Predictive Spectral Analysis Employing Weighted Forward and Backward Averaging: A Generalization of Burg's Algorithm," Naval Underwater System Center, NUSC Tech. Doc. 5501, New London, CT, October 13, 1976.
- [20] ———, "Positive Definite Spectral Estimate and Stable Correlation Recursion for Multivariate Linear Predictive Spectral Analysis," Naval Underwater System Center, NUSC Tech. Doc. 5729, New London, CT, November 14, 1976.
- [21] M. Morf, A. Vieira, D. T. Lee, and T. Kailath, "Recursive Multichannel Maximum

- Entropy Spectral Estimation," *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, Vol. GE-16, No. 2, April 1978, pp. 85-94.
- [22] R. A. Wiggins and E. A. Robinson, "Recursive Solution to the Multichannel Filtering Problem," *J. Geophys. Res.*, Vol. 70, 1965, pp. 1885-1891.
- [23] O. N. Strand, "Multichannel Complex Maximum Entropy Spectral Analysis," 1977 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 736-741.
- [24] \_\_\_\_\_, "Multichannel Complex Maximum Entropy (Autoregressive) Spectral Analysis," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-22, No. 4, August 1977, pp. 634-640.
- [25] L. W. Nolte and W. S. Hodgkiss, "Directivity or Adaptivity?," EASCON 1975 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, September 1975, Washington, DC, pp. 35.A-35.H.
- [26] H. Cox, "Sensitivity Considerations in Adaptive Beamforming," Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, August 21-September 1, 1972, Loughborough, U.K.; also appeared in *Signal Processing*, edited by J. W. R. Griffiths, P. L. Stocklin, and C. van Schooneveld, Academic Press, New York, 1973.
- [27] \_\_\_\_\_, "Resolving Power and Sensitivity to Mismatch of Optimum Array Processors," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 54, No. 3, September 1973, pp. 771-785.
- [28] D. Jaarsma, "The Theory of Signal Detectability: Bayesian Philosophy, Classical Statistics, and the Composite Hypothesis," Cooley Electronics Laboratory, University of Michigan, Ann Arbor, Tech. Report TR-200, 1969.
- [29] M. A. Gallop and L. W. Nolte, "Bayesian Detection of Targets of Unknown Location," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-10, No. 4, July 1974, pp. 429-435.
- [30] W. S. Hodgkiss and L. W. Nolte, "Bayes Optimum and Maximum-Likelihood Approaches in an Array Processing Problem," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, Vol. AES-11, No. 5, September 1975, pp. 913-916.
- [31] R. Nitzberg, "OTH Radar Aurora Clutter Rejection when Adapting a Fraction of the Array Elements," EASCON 1976 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, September 1976, Washington DC, pp. 62.A-62.D.
- [32] D. R. Morgan, "Partially Adaptive Array Techniques," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-26, No. 6, November 1978, pp. 823-833.
- [33] D. J. Chapman, "Partial Adaptivity for the Large Array," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. AP-24, No. 5, September 1976, pp. 685-696.
- [34] D. J. Chapman, "Adaptive Array Techniques Study (U)," ECM/ECCM Studies, Vol. 3, final report prepared by the Syracuse University Research Corporation for the U.S. Army Advanced Ballistic Missile Defense Agency under Contract DAHC60-73-C-0044, SURC TR. 73-186, February 1974 (Secret, this volume unclassified).
- [35] A. M. Vural, "A Comparative Performance Study of Adaptive Array Processors," presented at the 1977 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, May 9-11, Hartford, CT., paper 20.6.
- [36] P. W. Howells, "High Quality Array Beamforming with a Combination of Precision and Adaptivity," prepared by Syracuse University Research Corporation, SURC TN74-150, June 1974 (Unclassified).
- [37] A. M. Vural, "An Overview of Adaptive Array Processing for Sonar Applications," EASCON 1975 Record, IEEE Electronics and Aerospace Systems Convention, Sept. 29-Oct. 1, Washington, D.C., pp. 34.A-34.M.



#### К приложению А

- [A.1] R. M. Oliver, J. R. Pierce, and C. E. Shannon, "The Philosophy of Pulse Code Modulation," *Proc. IRE*, Vol. 36, No. 11, November 1948, pp. 1324-1331.
- [A.2] B. C. Kuo, *Discrete-Data Control System*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970, Ch. 2.

#### К приложению Б

- [Б.1] K. L. Reinhard, "Adaptive Antenna Arrays for Coded Communication Systems," M. S. Thesis, The Ohio State University, 1973.
- [Б.2] T. G. Kincaid, "The Complex Representation of Signals," General Electric Company Report No. R67EMH5, October 1966, and HMED Technical Publications, Box 1122, Le Moyne Ave., Syracuse, NY, 13201.
- [Б.3] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1965, Ch. 10.

#### К приложению В

- [B.1] M. Athans and F. C. Schweppe, "Gradient Matrices and Matrix Calculations," M.I.T. Lincoln Laboratory, Lexington, MA, Technical Note 1965-53, November 1965.
- [B.2] W. J. Vetter, "Derivative Operations on Matrices," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-15, No. 2, April 1970, pp. 241-244.

#### К приложению Г

- [Г.1] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [Г.2] E. Bodewig, *Matrix Calculus*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959.
- [Г.3] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1961.

## СПИСОК РАБОТ, ПЕРЕВЕДЕННЫХ НА РУССКИЙ ЯЗЫК

- 1.3, 2.9, 5.8. Хансен Р. С. Сканирующие антенные системы СВЧ в 3-х т.: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1966—1970; т. 1, 1966—536 с., т. 2 1969 — 496 с., т. 3 1971 — 464 с.
- 1.9, 3.5, 4.10. Уидроу, Мантей, Гриффитс, Гуд. Адаптивные антенные решетки. — ТИИЭР, 1967, т. 55, № 12, с. 78.
- 1.15. Грин мл., Фрош, Ромни. Принципы Большой сейсмической группы (LASA). — ТИИЭР, 1965, т. 53, № 12, с. 2029.
- 1.24, 3.6, 7.7. Гриффитс. Простой адаптивный алгоритм для обработки сигналов антенных решеток в реальном времени. — ТИИЭР, 1969, т. 57, № 10, с. 6.
- 1.26, 4.24. Фрост III. Алгоритм линейно-ограниченной обработки сигналов в адаптивной решетке. — ТИИЭР, 1972, т. 60, № 8, с. 5.
- 1.37, 7.15. Кейпон, Гринфилд, Колкер. Обработка данных Большой сейсмической группы способом многомерного максимального правдоподобия. — ТИИЭР, 1967, т. 55, № 2, с. 66.
- 1.50. Скольник. Введение в технику радиолокационных систем: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965. — 747 с.
- 2.21. Ченг Д. Методы оптимизации параметров антенных решеток. — ТИИЭР, 1971, т. 59, № 12, с. 30.
- 3.9. Янг, Ховард. Применение теории обнаружения и оценки параметров пространственно-временных сигналов к антенным системам с обработкой данных. — ТИИЭР, 1970, т. 58, № 5, с. 180.
- 3.25. Риглер, Комптон. Адаптивная антенная решетка для подавления помех. — ТИИЭР, 1973, т. 61, № 6, с. 75.
- 3.29, Г.1. Беллман Р. Введение в теорию матриц: Пер. с англ. — М.: Наука, 1976. — 351 с.
- 3.44, 6.4. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции, т. 1: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1972. — 744 с.
- 4.25. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
- 5.7. Гейбриел. Введение в теорию адаптивных антенных решеток. — ТИИЭР, 1976, т. 64, № 2, с. 55.
- 5.18. Цам. Влияние ошибок определения угла падения на характеристику адаптивной решетки. — ТИИЭР, 1972, т. 60, № 8, с. 102.
- 8.10. Халмош П. Конечномерные векторные пространства: Пер. с англ. — М.: ФМ, 1963. — 262 с.
- Д.1. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ: Пер. с англ. — М.: ФМ, 1963. — 500 с.
- Д.2. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 1: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1961. — 782 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Список литературы к предисловию редактора перевода . . . . .	6
Предисловие . . . . .	7

## ЧАСТЬ I.

### АДАПТИВНЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ: ПРИМЕНЕНИЕ, ЭЛЕМЕНТЫ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

<b>Глава 1. Введение</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1. Причины применения адаптивных решеток . . . . .	9
1.2. Исторический обзор . . . . .	11
1.3. Основные элементы . . . . .	12
1.4. Формулировка задач, связанных с адаптивными антенными решетками . . . . .	14
1.5. Современное техническое исполнение . . . . .	17
1.5.1. Радиолокационная техника (19). 1.5.2. Гидролокационная техника (22)	
1.6. Построение книги . . . . .	27
1.7. Выводы . . . . .	29
<b>Задачи</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>Глава 2. Основные понятия</b> . . . . .	<b>31</b>
2.1. Условия приема сигнала . . . . .	32
2.1.1. Сигналы в активных и пассивных системах (32). 2.1.2. Модели сигнала (33). 2.1.3. Модель идеального распространения сигналов (35)	
2.2. Расположение элементов антенной решетки . . . . .	36
2.2.1. Характеристики двухэлементной антенной решетки (36). 2.2.2. Линейные антенные решетки (39). 2.2.3. Плоские антенные решетки (42)	
2.3. Характеристики антенной решетки . . . . .	45
2.3.1. Повышение эффективности приема сигнала за счет подстройки диаграммы направленности антенной решетки (45). 2.3.2. Универсальные кривые для расчета характеристик антенной решетки (48)	
2.4. Влияние различных факторов на эффективность подавления помех антенной решеткой . . . . .	52
2.5. Особенности обработки узкополосных и широкополосных сигналов . . . . .	55
2.6. Выводы . . . . .	60
<b>Задачи</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>Глава 3. Оптимальная обработка сигналов в антенных решетках: пределы эффективности в установившемся режиме и винеровское решение</b> . . . . .	<b>67</b>
3.1. Математическое введение . . . . .	70
3.1.1. Формулировка задачи при использовании действительных величин (71). 3.1.2. Корреляционные матрицы действительных сигналов (71). 3.1.3. Переопределение некоторых понятий на случай комплексных векторов (73). 3.1.4. Корреляционные матрицы комплексных сигналов (75)	
3.2. Описание сигналов в обычных и настроенных на сигнал антенных решетках . . . . .	75
3.3. Оптимальная обработка сигналов в антенной решетке узкополосных систем . . . . .	77
3.3.1. Критерий средней квадратической ошибки (78). 3.3.2. Критерий отношения сигнал-шум (80). 3.3.3. Критерий максимума правдоподобия (86). 3.3.4. Критерий минимума дисперсии шума (87). 3.3.5. Взаимосвязь оптимальных решений (89)	

3.4. Оптимальная обработка сигналов в антенной решетке широкополосных систем . . . . .	91
3.4.1. Оценка случайного сигнала (93). 3.4.2. Оценивание неизвестного неслучайного сигнала (98). 3.4.3. Обнаружение известного сигнала (100). 3.4.4. Обнаружение случайного сигнала (103). 3.4.5. Обнаружение неизвестного неслучайного сигнала (106). 3.4.6. Коэффициент передачи антенной решетки (108). 3.4.7. Обобщенная структура процессора (109)	
3.5. Оптимальная обработка сигналов антенной решетки при сложных условиях распространения . . . . .	111
3.6. Выводы . . . . .	114
Задачи . . . . .	115

ЧАСТЬ II.

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Глава 4. Градиентные алгоритмы . . . . .	128
4.1. Вводные понятия . . . . .	129
4.1.1. Квадратичная поверхность уровня (129). 4.1.2. Метод наискорейшего спуска (130). 4.1.3. Модель для метода наискорейшего спуска (131)	
4.2. Алгоритм минимизации средней квадратической ошибки . . . . .	134
4.2.1. Сходимость к винеровскому решению (137). 4.2.2. Характеристики переходного режима при алгоритме адаптации МСКО (139). 4.2.3. Рассогласование весовых коэффициентов при реализации алгоритма МСКО (141). 4.2.4. Практические соображения, связанные с реализацией алгоритма адаптации МСКО (145). 4.2.5. Одно- и двухрежимный алгоритмы адаптации МСКО (146)	
4.3. Дифференциальный алгоритм наискорейшего спуска . . . . .	148
4.3.1. Ухудшение эффективности, обусловленное применением метода измерения градиента (149). 4.3.2. Шум, связанный с измерением градиента, и расстройка весового вектора (151)	
4.4. Ускоренный градиентный метод . . . . .	156
4.4.1. Алгоритм, основанный на методе Пауэлла (159)	
4.5. Градиентные алгоритмы с ограничениями . . . . .	160
4.5.1. Оптимальный весовой вектор при ограничениях (163). 4.5.2. Алгоритм адаптации (165). 4.5.3. Условия сходимости к оптимальному решению (167). 4.5.4. Геометрическая интерпретация (169)	
4.6. Результаты моделирования . . . . .	171
4.7. Выводы . . . . .	175
Задачи . . . . .	176
Глава 5. Адаптивный процессор Хауэлса—Апельбаума . . . . .	179
5.1. Вводные понятия . . . . .	179
5.1.1. Фазовое сопряжение (179). 5.1.2. Корреляционный интерферометр (180). 5.1.3. Интегрирующий фильтр (182)	
5.2. Двухэлементная антенная решетка с одним контуром адаптивного управления . . . . .	184
5.2.1. Модель для контура адаптивного управления (188). 5.2.2. Иллюстративный пример. Определение характеристик системы адаптивного управления (193). 5.2.3. Схема с использованием ограничителя в контуре адаптивного управления (198)	
5.3. $N$ -элементная антенная решетка с $N$ контурами адаптивного управления . . . . .	201
5.3.1. Уравнения для весовых коэффициентов (203). 5.3.2. Шум контура управления (211). 5.3.3. Представление адаптивной диаграммы направленности антенной решетки с помощью собственных диаграмм (214). 5.3.4. Иллюстративный пример. Определение характеристик линейной $N$ -элементной адаптивной антенной решетки (219). 5.3.5. $N$ -элементная антенная решетка с ограничителями в контурах адаптивного управления (223)	
5.4. Введение ограничений на форму диаграммы направленности . . . . .	225
5.4.1. Использование пилот-сигналов (226). 5.4.2. Использование предварительной пространственной фильтрации (228). 5.4.3. Использование управляемых пространственных фильтров (231)	
5.5. Ограничение для случая известного уровня полезности сигнала . . . . .	234
5.6. Выводы . . . . .	237
Задачи . . . . .	238

<b>Глава 6. Непосредственное обращение выборочной ковариационной матрицы</b>	240
6.1. Метод, основанный на непосредственном обращении матрицы	241
6.1.1. Использование выборочной ковариационной матрицы (242). 6.1.2. Использование выборочной ковариационной матрицы и выборочного вектора взаимной корреляции (246)	
6.2. Сравнение характеристик алгоритмов НОМ в переходном режиме	253
6.3. Чувствительность к распределению собственных значений	257
6.4. Выводы	258
Задачи	258
<b>Глава 7. Рекуррентные методы обработки сигналов в антенных решетках</b>	262
7.1. Устройство обработки по минимуму взвешенной средней квадратической ошибки	263
7.2. Рекуррентное обращение ковариационной матрицы	267
7.3. Методы калмановской фильтрации для обработки сигналов в антенной решетке	269
7.3.1. Процессор калмановского типа (269). 7.3.2. Скорость сходимости (273)	
7.4. Устройство обработки по минимуму дисперсии шума	275
7.5. Результаты моделирования	280
7.6. Выводы	284
Задачи	285
<b>Глава 8. Каскадные предпроцессоры</b>	286
8.1. Предпроцессор Нолена	287
8.1.1. Однокаскадная цепь Нолена (288). 8.1.2. Многокаскадные цепи (290). 8.1.3. Управление цепями преобразования (293)	
8.2. Подавление помех с помощью предпроцессора Нолена	295
8.2.1. Постановка задачи (295). 8.2.2. Распознавание полезного сигнала (298). 8.2.3. Частичная подстройка предпроцессора Нолена (299)	
8.3. Предпроцессор, осуществляющий ортогонализацию согласно методу Грама — Шмидта	299
8.3.1. Сходимость алгоритма подстройки предпроцессора Грама—Шмидта (304)	
8.4. Результаты моделирования	308
8.5. Выводы	314
Задачи	314
<b>Глава 9. Алгоритмы случайного поиска</b>	318
9.1. Линейный случайный поиск	319
9.1.1. Устойчивость алгоритма ЛСП (321)	
9.2. Ускоренный случайный поиск	326
9.3. Направленный ускоренный случайный поиск	328
9.4. Результаты моделирования	331
9.5. Выводы	337
Задачи	338
<b>Глава 10. Сравнение характеристик адаптивных алгоритмов</b>	341

### ЧАСТЬ III.

#### КОМПЕНСАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК. НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

<b>Глава 11. Компенсация погрешностей адаптивных антенных решеток</b>	348
11.1. Соображения, связанные с широкополосной обработкой сигналов	348
11.1.1. Идеальные частотные характеристики канала (349). 11.1.2. Использование многоотводных ЛЗ и разложение сигналов на квадратурные составляющие (351). 11.1.3. Сравнение эффективности четырех процессоров антенной решетки (356). 11.1.4. Частотные характеристики процессоров (362)	

11.2. Компенсация эффектов многолучевого распространения . . . . .	365
11.2.1. Модель двухканального компенсатора помехи (366). 11.2.2. Характеристики принимаемых сигналов при многолучевом распространении (368). 11.2.3. Пример. Результаты компенсации эффектов многолучевого распространения (371). 11.2.4. Результаты компенсации задержки, обусловленной распространением по раскрыву антенной решетки (372)	
11.3. Анализ эффектов межканального рассогласования . . . . .	373
11.3.1. Пример. Эффекты межканального амплитудного рассогласования (377). 11.3.2. Результаты подавления помехи для выбранной модели межканального амплитудного рассогласования (378). 11.3.3. Пример. Эффекты межканального фазового рассогласования (381). 11.3.4. Результаты подавления помехи для выбранной модели межканального фазового рассогласования (381)	
11.4. Выводы . . . . .	382
Задачи . . . . .	384
<b>Глава 12. Новейшие исследования в области адаптивных антенных решеток . . . . .</b>	<b>385</b>
12.1. Оценивание спектра методом максимума энтропии . . . . .	386
12.1.1. Частично известная корреляционная функция (387). 12.1.2. Незвестная корреляционная функция (390). 12.1.3. Распространение полученных результатов на многоканальное оценивание спектра (393)	
12.2. Последовательная реализация байесовской оптимальной обработки сигналов антенной решетки . . . . .	396
12.2.1. Обработка сигналов с одновременным оцениванием неизвестных параметров (396). 12.2.2. Последовательный оптимальный процессор антенной решетки (398)	
12.3. Частично адаптивные антенные решетки . . . . .	399
12.3.1. Адаптация с предварительным формированием лучей (400). 12.3.2. Адаптация с регулированием части элементов антенной решетки (403)	
12.4. Выводы . . . . .	406
Задачи . . . . .	406
Приложение А. Частотные характеристики фильтров, построенных на основе многоотводных линий задержки . . . . .	412
Приложение Б. Комплексная огибающая . . . . .	414
Приложение В. Формулы для вычисления градиента . . . . .	417
Приложение Г. Некоторые матричные соотношения и неравенство Шварца . . . . .	417
Приложение Д. Многомерные гауссовские распределения . . . . .	419
Д.1. Действительные гауссовские случайные векторы (419). Д.2. Комплексные гауссовские случайные векторы (421)	
Приложение Е. Геометрическая трактовка соотношений между комплексными векторами . . . . .	423
Список литературы . . . . .	425
Список работ, переведенных на русский язык . . . . .	440

РОБЕРТ А. МОНЗИНГО, ТОМАС У. МИЛЛЕР  
**АДАПТИВНЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ**

Заведующая редакцией **О. В. Толкачева**  
Редактор **И. И. Рюжина**  
Художественный редактор **Т. В. Бусарова**  
Переплет художника **В. А. Козлова**  
Технический редактор **Г. З. Кузнецова**  
Корректор **Н. Л. Жукова**

ИБ № 794

---

Сдано в набор 14.05.85. Подписано в печать 25.11.85.  
Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная.  
Печать высокая. Усл. печ. л. 28,0. Усл. кр.-отг. 28,0. Уч.-изд. л. 29,51.  
Тираж 5000 экз. Изд. № 20828. Заказ № 896 Цена 2 р. 40 к.  
Издательство «Радио и связь». 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

---

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
129041, Москва, Б. Переславская, 46