Лекции по предмету: Радиотехнические цепи и сигналы ч. 2
Преподаватель Шевгунов Т. Я.
Лекции писал: Константинов К. В.
Сканировал: Оводов К. А.

6 Семестр

Лекция 1   09.02

$$\left.\begin{aligned} &s(t) \\ &-\infty < t < \infty \\ &t \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{аналоговый сигнал}$$

$S[n]$ – цифровой сигнал

Последовательность чисел (каждое имеет число n)

$S[n]$

номер отсчёта (индекс)

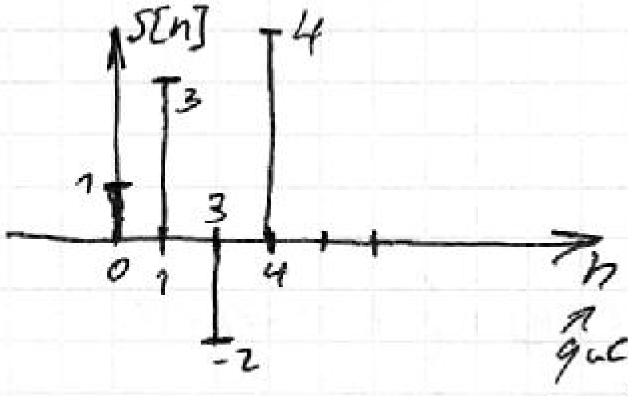
Пр. $S[n] = \{S[0], S[1], S[2], S[3], S[4]\}$

$n \in \mathbb{Z}$ (целое число)

$s[n] = \{1, 3, -2, 4\}$

нулевой отсчёт, если не указано обратное

$S[-1] = S[4] = 0$



дискретное время

Способы задания цифр. сигн.

1) Посл. значений 2) Формулой 3) Обоз. правило

$s[n] = \{\ldots, s[-1], s[0], s[1], s[2], \ldots\}$

$x[n] = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Ост. элем ряда опр по индукции

$s[n] = \{\ldots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots\}$

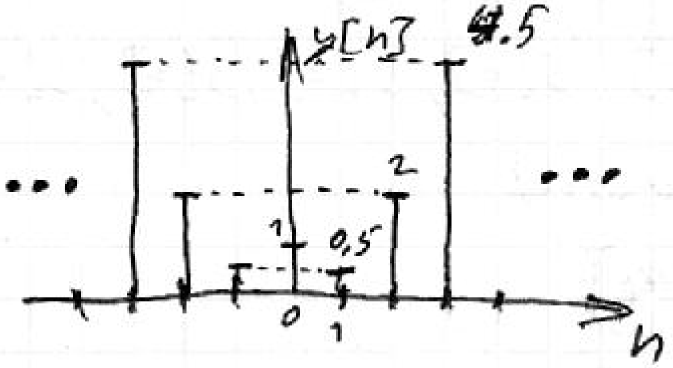
$s[n] \triangleq \{s_n\}$

$x[n] = n$

только целое

может быть любым (в т.ч. компл.)

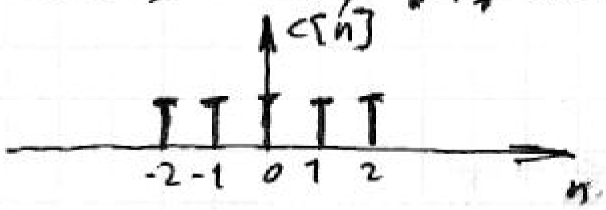
$y[n] = \frac{1}{2} n^2$



$s[n] = \{\ldots, 8; 4{,}5; 2; 0{,}5; 0; 0{,}5; 2; 4{,}5; 8; \ldots\}$

Форма записи $s[n]$ может быть кусочной

$c[n] = 1, \; |n| < 2$

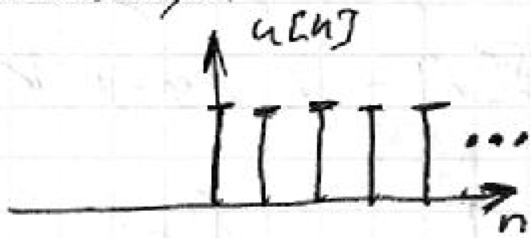


$$c[n] = \begin{cases} 1 & -2 < n < 2 \\ 0, & \text{ост. } n \end{cases}$$

$c[n] = \mathrm{rect}_5\, n$

число отсчётов

Цифровая фу-я Хевисайда



$$u[n] = 1, \quad n \geq 0$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

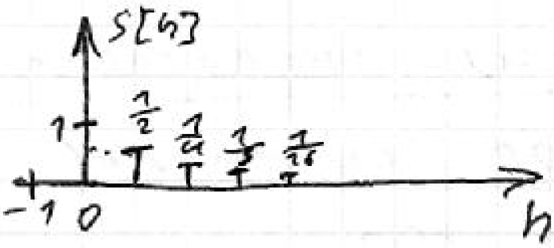
Цифровой экспоненциальный сигнал

$$x[n] = a^n$$

↑ основание (любое, в т.ч. и компл.)

$$\boxed{s[n] = a^n \cdot u[n]}$$ – цифровая (дискр.) экспонента

Пр: $a = \frac{1}{2}$

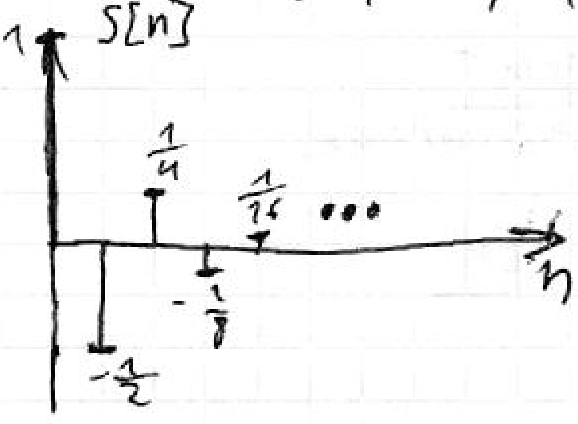


$$\underbrace{n \to \infty \quad s[n] \to 0}_{|a| < 1}$$

$|a| > 1 \quad s[n] \to \infty$

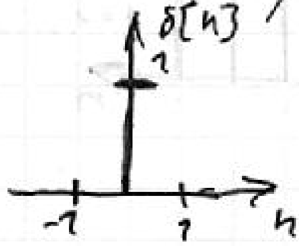
$a = -\frac{1}{2}$

$$s[n] = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}\right\}$$



$\delta(t)$ – дирака (д. фу-я)

$\delta[n]$ – д. фу-я Кронекера



$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

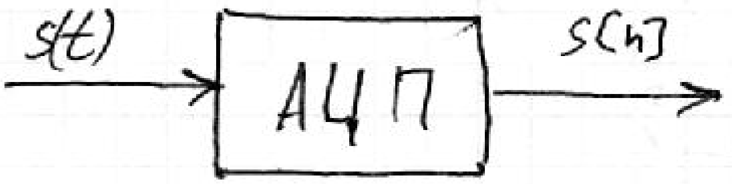
$$s[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2] + 4\delta[n-3]$$

Для экспоненты

$$s[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$s[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{8}\delta[n-3] + \dots$$

Взаимопреобразования аналоговых и цифр. сигналов



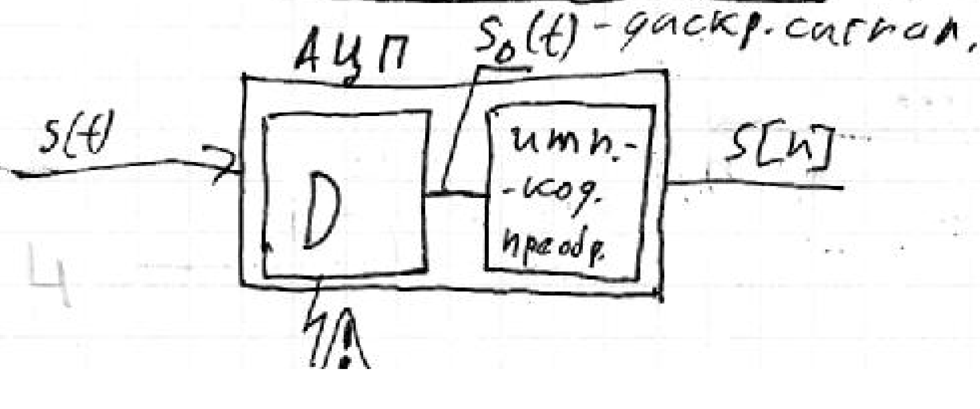
Дискретизация

Восстановление

Wish! : $\tilde{s}(t) = s(t)$

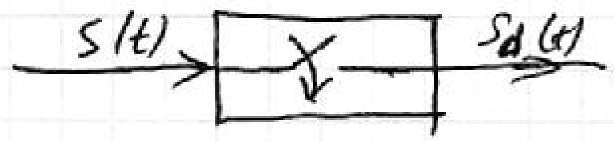
желаемое

Дискретизация:



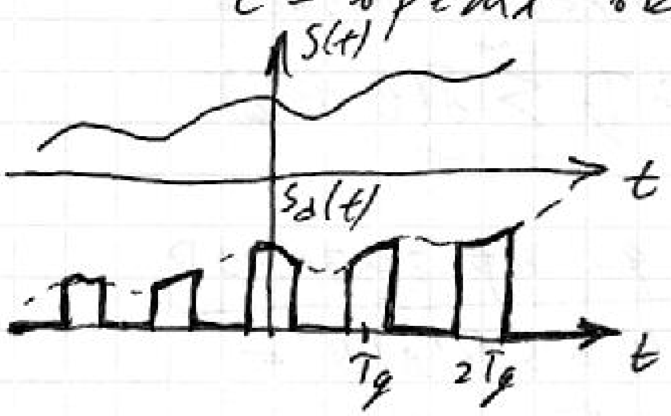
Модели дискретизатора.

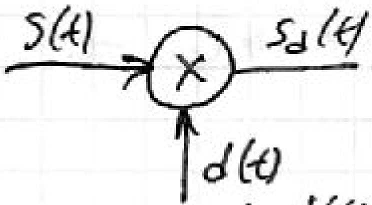
Модель упр. ключа



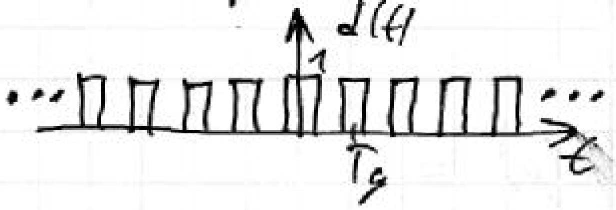
$T_д$ - время дискретизации

τ - время включения





Модель ключа в виде перемножителя



$S[n] = Пл\{ s_m(t) \}$

пл. имп. с номером n

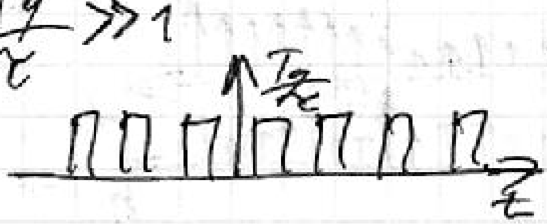
$S[1] = S[T_д] \cdot T_д$

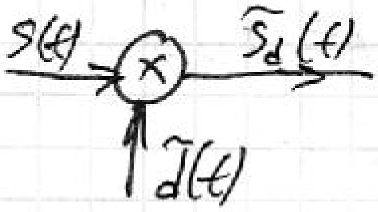
$S[n] = S[T_д] \cdot \tau$

1) $S[n] \leftarrow \tau$

2) $\boxed{\tau\downarrow} \Rightarrow \boxed{S[n]\downarrow}$ $\qquad \frac{T_д}{\tau} \gg 1$

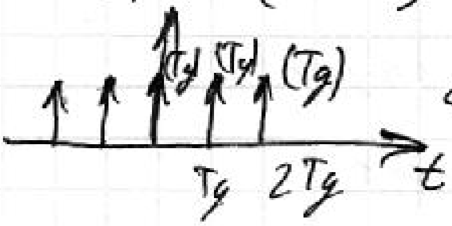
$d(t) \cdot \frac{T_д}{\tau} = \tilde{d}(t)$





$$\tilde{s}[n] \approx s(nT_д)\,\tau\,\frac{T_д}{\tau} = T_д\, s(nT_д)$$

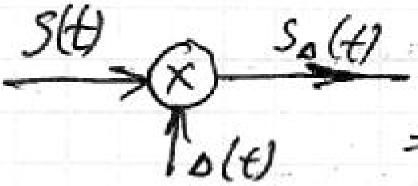
$$\tilde{\delta}(t) \to \{\tau \to 0\} \to \Delta(t)$$



← Идеальная дискретизирующая последовательность

$$\Delta(t) = T_д\, \text{Ш}_{T_д}(t) \doteq T_д \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_д)$$

Идеальный дискретизатор



$$s_\Delta(t) = s(t)\,\Delta(t) =$$

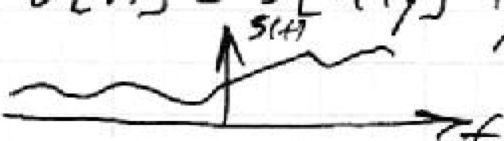
$$= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_д\, \delta(t - nT_д) =$$

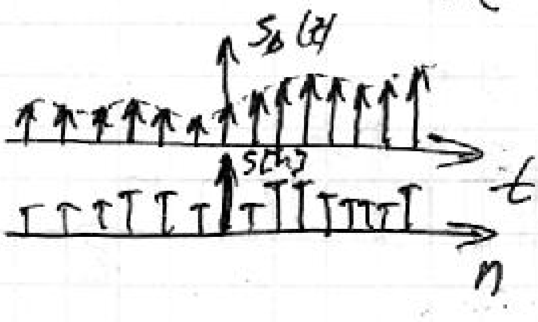
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t)\, T_д\, \delta(t - nT_д) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{T_д\, s(nT_д)}_{s[n]}\, \delta(t - nT_д) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\, \delta(t - nT_д)$$

$$s[n] = s[nT_д]\, T_д$$





s(t) - исх аналоговый сигнал.

$s_Д(t)$ - дискретный сигнал

$s[n]$ - цифровой сигнал

$$s_Д(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\,\delta(t - nT_д)$$

1) Сост. из δ-фун-й
2) δ фу-ия след. равн., с периодом $T_д$
   Их можно пронумеровать
3) Вес некоторой фу-и с номером n опр. отсчётом цифр. сигнала с этим же номером

$$s[n] \xrightarrow[T_д]{} s_Д(t)$$

Анализ дискретизатора в частотной области

$$S_Д(f) = S(f) * \Delta(f)$$

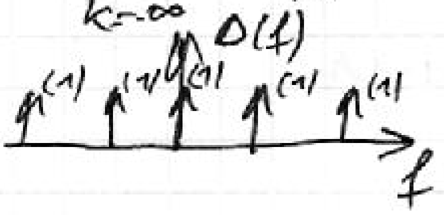
$$\Delta(t) = T_д\, \text{Ш}_{T_д}$$

$$\Updownarrow$$

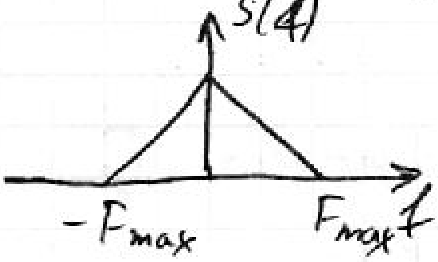
$$\Delta(f) = \text{Ш}_{\frac{1}{T_д}}(f)$$

$\frac{1}{T_д}$ → Частота дискретизации $F_д$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_д)$$



Рассмотрим сигнал со строго ограниченным спектром



$$S(|f| > F_{max})$$

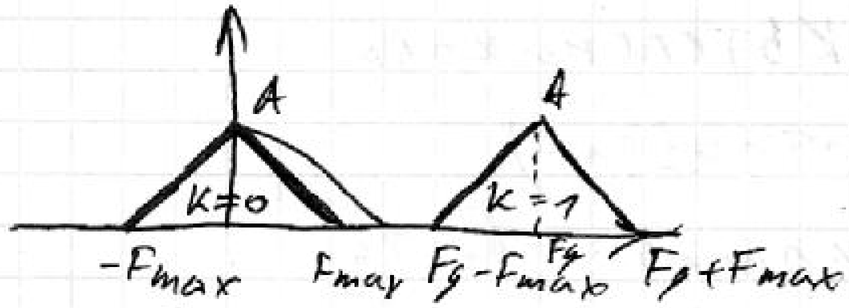
$$S_д(f) = S(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_д) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{ S(f) * \delta(f - kF_д) \} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_д)$$

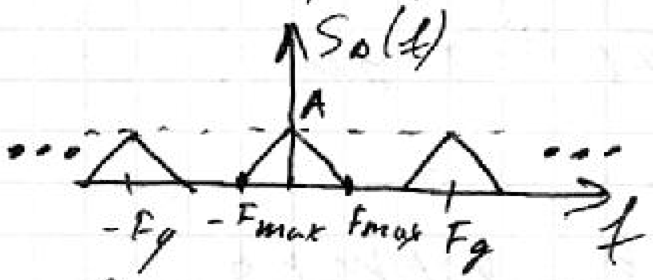
В рез. такой операции свёртки каждая из δ фу-ций перенесёт копию спектра на ту частоту где она расположена.

Спектр. дискр. сигнала предст. собой <u>сумму</u> всех копий спектра.



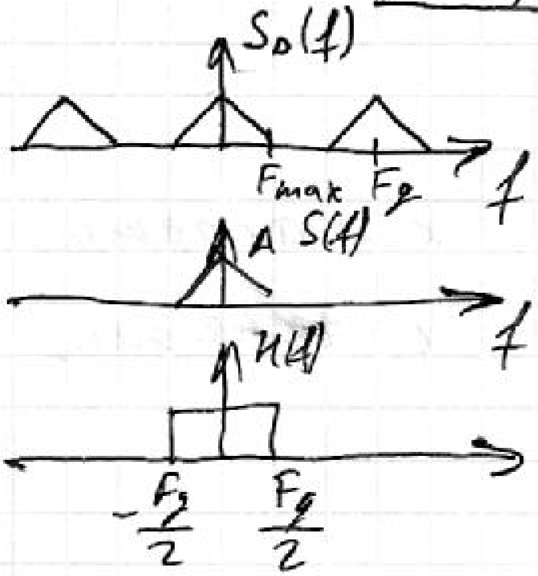
$F_g - F_{max} > F_{max}$

$F_g > 2F_{max}$ – условие неперекрытий копий спектра.

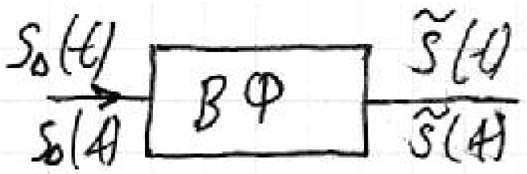


Спектр дискретного сигнала – это периодическая фу-я частоты

<u>Лекция 2</u> 11.02



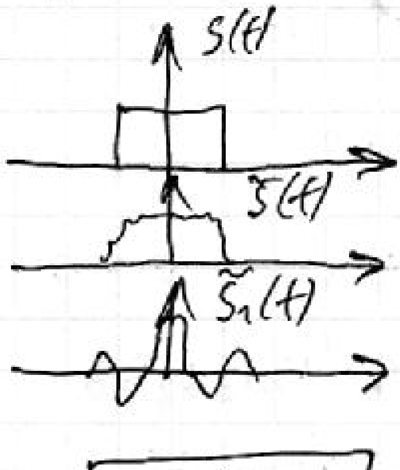
– восстановл. фильтр



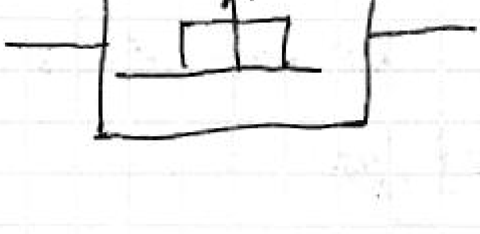
$S(f) \equiv \tilde{S}(f)$

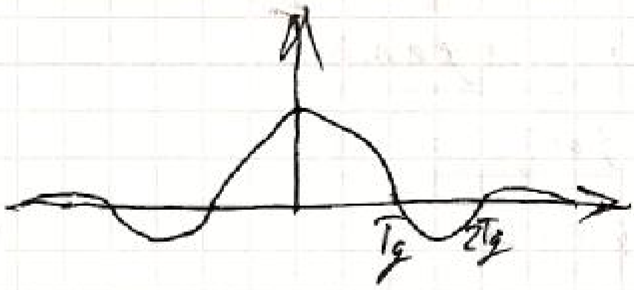
$S(t) = \tilde{S}(t)$

Теорема Котельникова
(теорема отсчётов)
сигнал может быть
однозначно и без потерь
по своим отсчётам
если они были получены
с частотой дискретизации
$F_д > 2F_{max}$
Восстановление должно
проводиться с помощью идеальн.
ФНЧ с полосой пропускания
$F_д/2$



– восстан. с потерями
– восстан. с искаж.





$$\tilde{s}(t) = s_д(t) * h(t) = \Big\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underset{s(nT_д)T_д}{s[n]}\, \delta(t-nT_д)\Big\} *$$

$$* \frac{1}{T_д}\, \mathrm{sinc}\Big(\pi \frac{1}{T_д} t\Big) =$$

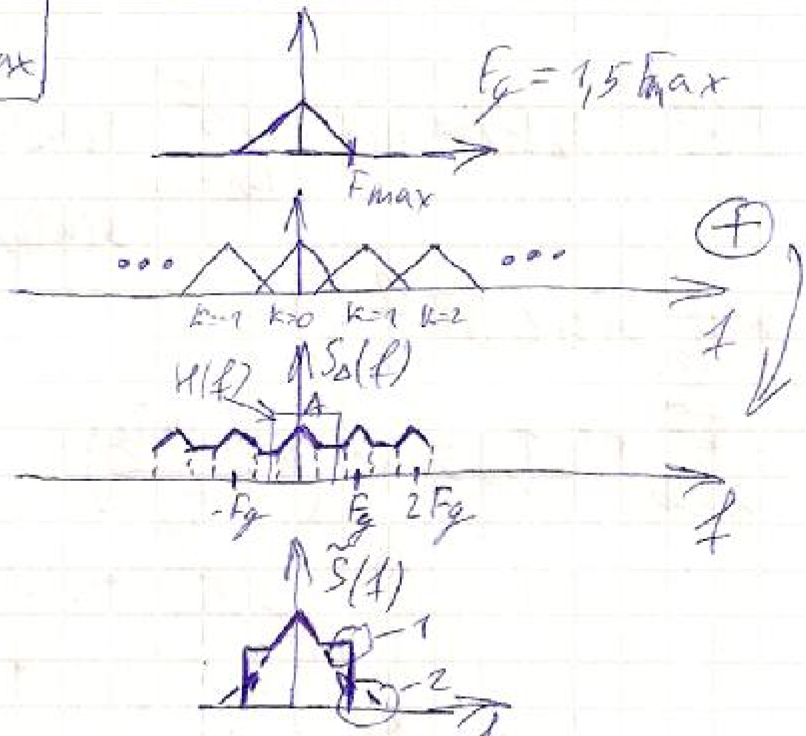
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[nT_д]\, \mathrm{sinc}\Big(\pi \frac{t-nT_д}{T_д}\Big)$$

В точках кратн. периоду дискр.
вост. сигн.
знач. совпад. со знач исходного
Во всех ост. точках будет
проводиться интерполяция сигнала.
(Такая интерполяция лучшая
из всех возможных

Проблемы идеал. дискретизатора и ид. фильтра

$\boxed{F_д \neq 2F_{max}}$

Нарушение теоремы Котельникова



I) 1) Искажение существующей части спектра

2) Урезание сигнала

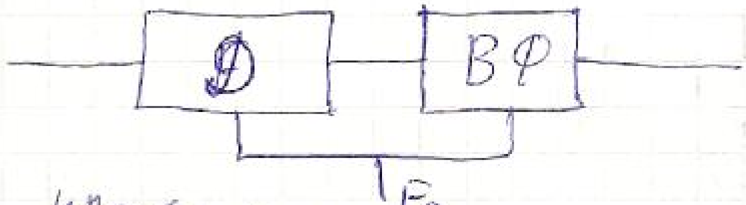
II) Сущ. такие спектры, кот при $f \to \infty$, сами $\to 0$

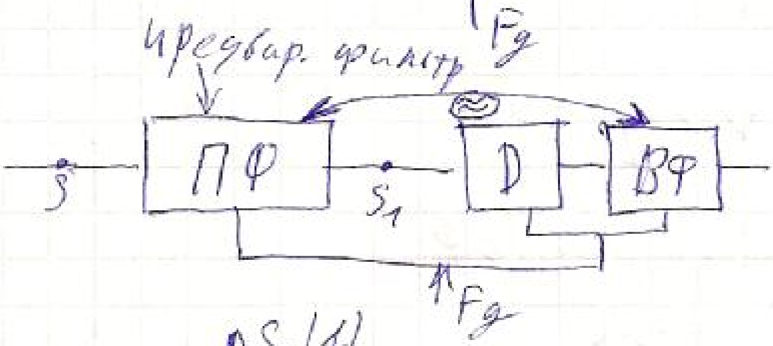
$\exists\, S(f \to 0) \to 0$

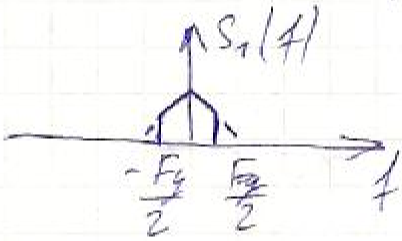
Для таких сигн. приходится искуственно вводить ограничения спектра.

12

Если сигнал во времени строго ограничен, его спектр математически ~~нео~~ бесконечен (фактически наоборот)

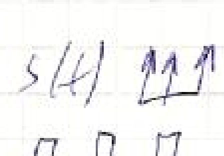


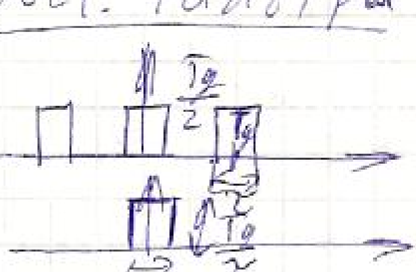




Неидеальность дискретизатора и Восст. Фильтра

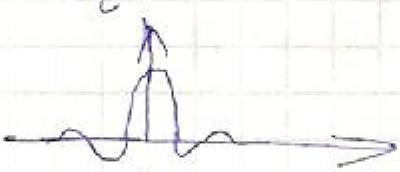
1)





$S_д(t) = S(t) \cdot d(t)$

$S_д(f) = S(f) * D(f)$

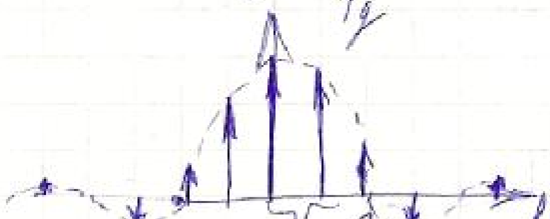


$D(f) = T_д \, \mathrm{sinc}(\pi f \tau)$

13

$$D(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\pi \frac{\tau k}{T_g}\right)}_{\frac{D_1(f)}{T_g}} \delta\left(f - \underbrace{k/T_g}_{k \cdot F_g}\right)$$

$\frac{k}{T_g}$



Не идеалн. ВФ

ФНЧ I – RC-цепь

$$H(p) = \frac{\alpha}{p+\alpha} = \frac{1}{1+p\tau_\varphi}$$

$$\tau_\varphi = 1/\alpha$$

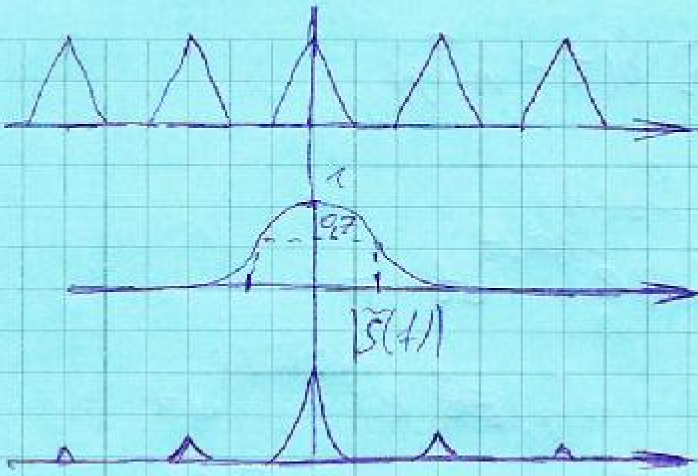
$$H(f) = \frac{\alpha}{i2\pi f + \alpha}$$

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} \cdot u(t)$$

$H(f)$ = комп. $|H(f)|$ $|S_{..}(f)|$

$$\tilde{S}(f) = S_0(f) \cdot H(f)$$

14



2 пробл.

1) Искажение центр. копии

2) Просочились остальные копии

$k = 0 \to F_{гр}\uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow F_g \uparrow \Rightarrow \$\uparrow$

ДВПФ - Дискретное по времени преобраз. Фурье

$S_D = ?$

$$S_D(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_g)$$

$s[n] = !$

$s[n] \to \tilde{s}(t) \to \tilde{S}(f) \to S_D(f)$

?

$$S_D(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S[n]\,\delta(t - nT_g)$$

$$S_D(t) \xrightarrow{\text{ПФ}} S_D(f)$$

$$S_D(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_D(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S[n]\,\delta(t - nT_g)\, e^{-i2\pi f t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ S[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t - kT_g)\, e^{-i2\pi f t}}_{e^{i2\pi f kT_g}\,\delta(t-kT_g)}\, dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ S[n]\, e^{-i2\pi f kT_g} \cancelto{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_g)\, dt} \right. =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S[n]\, e^{-i2\pi f kT_g}$$

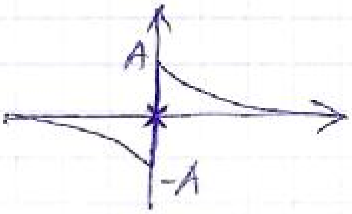
$$\boxed{S_D(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S[n]\, e^{-i2\pi kT_g} \quad \text{ДВПФ}}$$

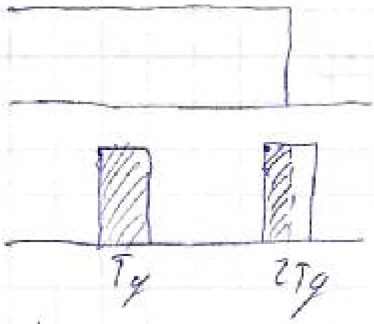
⚠ Собл. осторожность при дискретизации сигналов с разрывами

Если момент дискр попадает на разрыв

16

(скачок), в момент разр надо брать полусумму разр. слева и справа $\frac{\lim(t+) + \lim(t-)}{2}$



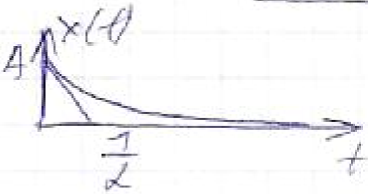


$S_д(f) = S_д(f + F_д)$

$$\boxed{s[n] = \int_{-\frac{F_д}{2}}^{\frac{F_д}{2}} S_д(f)\, e^{+j2\pi f n T_д}\, df \quad (\text{ОАВПФ})}$$

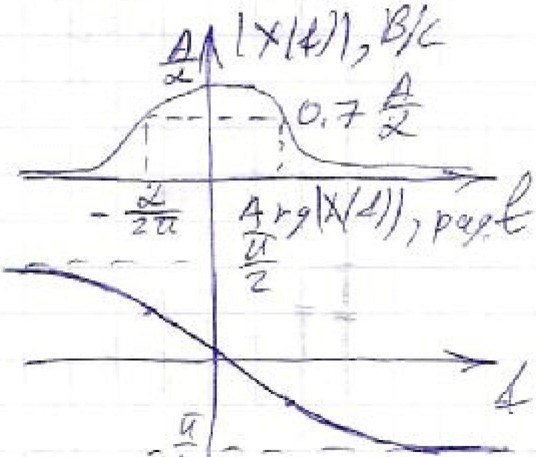
Идеальная дискретизация

Экспоненты



$x(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$

$X(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}$



$\boxed{F_д > 2F_{max}}$

F_{max} → строго; эвристически

строго → по ур. спектра; по доле энергии

эвристически → выбр. F_{max} не сильно уже строго на выбор сделать без сложн. матанализа

$$T_g = \frac{1}{2\alpha}$$

$$F_g = 2\alpha$$

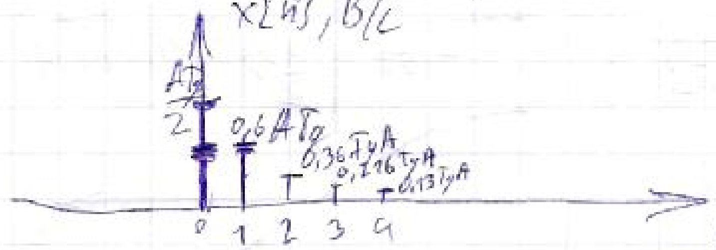
$$F_{max} = \frac{F_g}{2} = \alpha \qquad n=0 \quad x(0) = \frac{A+0}{2} = \frac{A}{2}$$

$$x[n] = \frac{AT_g}{2}$$

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ \frac{nT_g}{2} & n=0 \\ nT_g e^{-\alpha n T_g} & n>0 \end{cases}$$

$$e^{-\alpha n \frac{1}{2\alpha}} \approx 0{,}6^n$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{AT_g}{2}, & n=0 \\ AT_g\, 0{,}6^n, & n>0 \end{cases}$$



$$s[n] = AT_g\, 0{,}6^n u[n] - \frac{AT_g}{2}\delta[n]$$

Убрать лишнюю половину из нуля

18

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\alpha + j2\pi(f - kF_g)}$$

ДВПФ: ? $\delta[n] \Leftrightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi f 0 T_g} = 1$

$$\boxed{\delta[n] \Leftrightarrow 1}$$

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f T_g}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j2\pi f n T_g} = 1 + ae^{-j2\pi f T_g} + a^2 e^{-j4\pi f T_g} + \ldots$$

$$\{a < 1\} = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f T_g}}$$

$$X_\Delta(f) = \frac{AT_g}{1 - 0{,}6\, e^{-j\pi 2 f T_g}} \sim =$$

$$= \frac{AT_g}{2} \frac{1 + ae^{-j2\pi f T_g}}{1 - ae^{-j2\pi f T_g}}$$

Лекция 02.03

Дискретизация периодических сигналов

Дискретный периодический сигнал

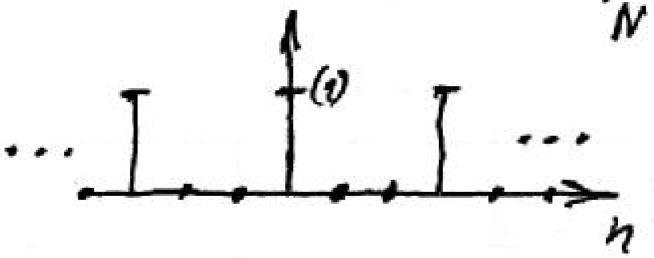
$s[n]$

$s_N[n]$

N – период (в кол-ве отсчётов)

N – 1, 2, 3, 4 $N \geq 1$

$$\{\underbrace{s[0],\ s[1],\ \ldots,\ s[N-1]}_{N \text{ штук}}\}$$



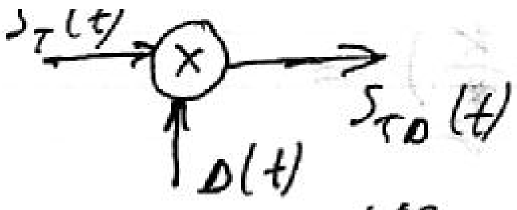
$N = 3$

$\{1, 0, 0\}$

$x[n] = \cos[n]$ – непериодич., т.к. не повторяется

$$x_N[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right)$$

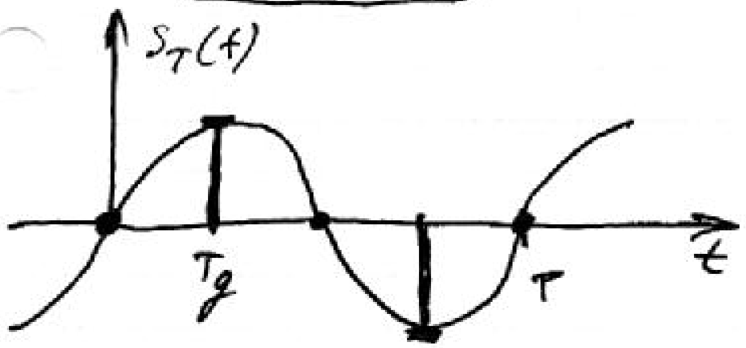
Дискретизация непрер. периодич. сигнала



$$s_{TD}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\cdot\delta(t - nT_д)$$

$$s[n] = T_д \cdot s_T(nT_д)$$

$$\boxed{T/T_д = N}$$ - цел. число



$$s_N[n] = T_д \cdot s_T(nT_д)$$

Если момент дискр. попадёт на разрыв периодич. сигнала то за его значение надо принять полусумму левого и правого пределов.

Спектр дискретного периодического сигнала

$$s_T(t) \Leftrightarrow S_T(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_T[m]\cdot\delta\Big(f - \underbrace{\frac{m}{T}}_{mF}\Big)$$

$$S_T[m] = \frac{1}{T}\underbrace{S\Big(\frac{m}{T}\Big)}$$

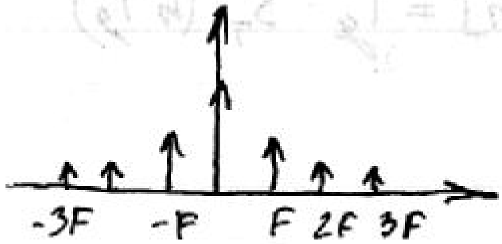
$S(f)$ - спектр. один. сигн.

$$s_\Delta(t) \Leftrightarrow S_\Delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{k}{T_g}\right) =$$

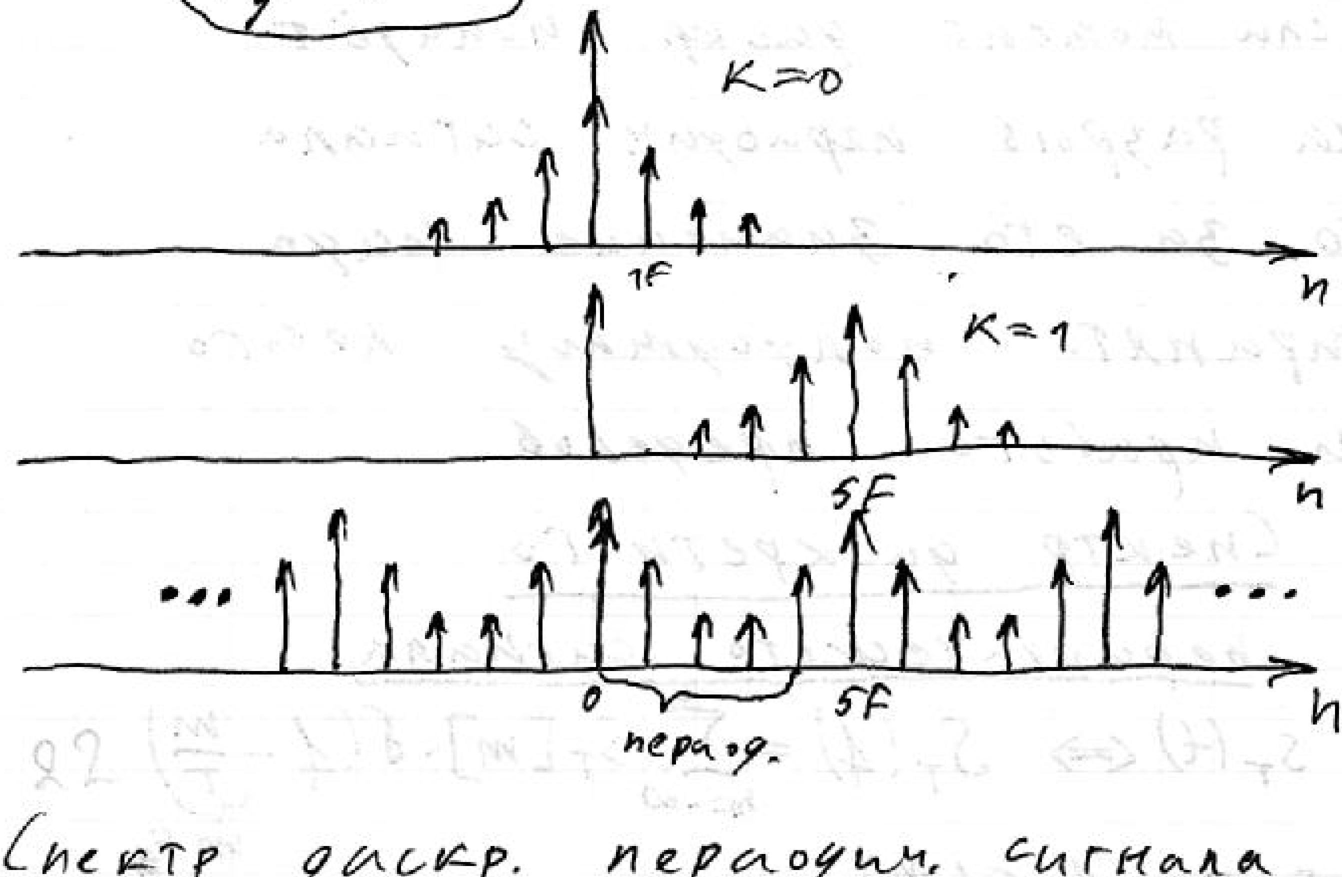
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - kF_g)$$

$$\frac{T}{T_g} = N = \frac{F_g}{F}$$

$$S_{T\Delta}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_T(f - kNF)$$



$$F_g = 5F$$



Спектр дискр. периодич. сигнала будит дискретным и периодическим

$S_N[m] = \{S_N[0], \ldots, S_N[N-1]\}$

$$S_{T\Delta}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_N[m] \cdot \delta(f - mF)$$

$S_N[n] \rightarrow N$ ячеек памяти.

$S_N[m] \rightarrow N$ ячеек

Дискретное Преобраз. Фурье (FFT)

$$S_N[m] = \sum_{n=0}^{N-1} S_N[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot m\cdot n}$$

$? \ \frac{1}{NT_g} = \frac{1}{T}$

$$S_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} S_N[m]\, e^{+j\frac{2\pi}{N}\cdot m\cdot n}$$

T_g

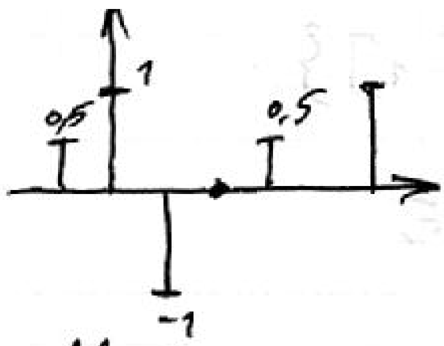
$\boxed{e^{\pm\frac{2\pi}{N}}}$ – ядро ДПФ

$(a)^{m\cdot n\cdot x} = (a^x)^{m\cdot n}$

$N = 2^L \Rightarrow$ ДПФ $\rightarrow$ БПФ

$2^{10} \approx 10^3$

$1024 \approx 1000$



$N = 4$

$$x_N[n] = \{1; -1; 0; 0,5\}$$

$$X_N[m] = \{0,5; 1+1,5j; 1,5; 1-1,5j\}$$

$$X_N[0] = \sum_{n=0}^{3} x_N[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N} 0\cdot n} =$$

$$= 0,5$$

$$X_N[1] = \sum_{n=0}^{3} x_N[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N} 1\cdot n} = 1\cdot 1 + (-1)(-j) + 0 + 0,5j =$$

$$= 1 + 1,5j$$

$$N = 4;\; e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$X_N[2] = \sum_{n=0}^{3} x_N[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N} 2\cdot n} = 1\cdot 1 + (-1)1 + 0 + 0,5(-1) =$$

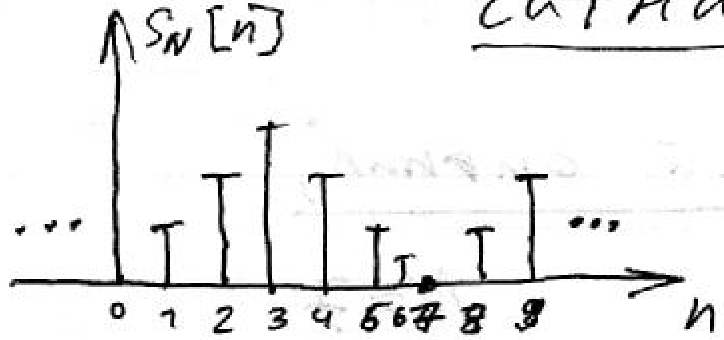
$$= 1,5$$

$$X_N[3] = \sum_{n=0}^{3} x_N[n] \underbrace{(-j)^3}_{+j}{}^{\cdot n} =$$

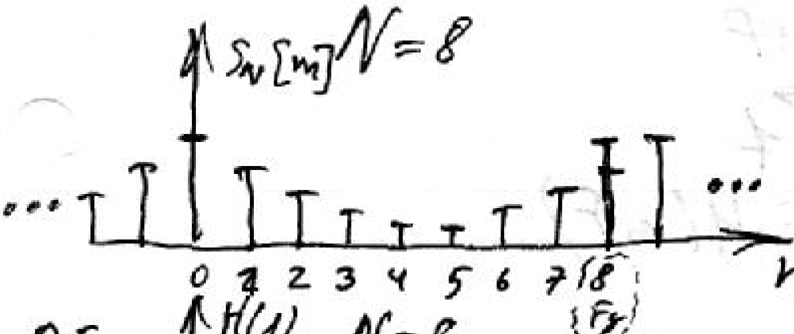
$$= 1\cdot 1 + (-1)\cdot j + 0 + 0,5(-j) = 1 - 1,5j$$

Лекция 10.03

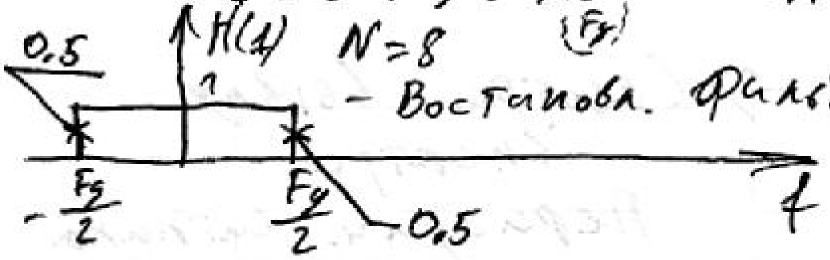
Восстановление периодического сигнала



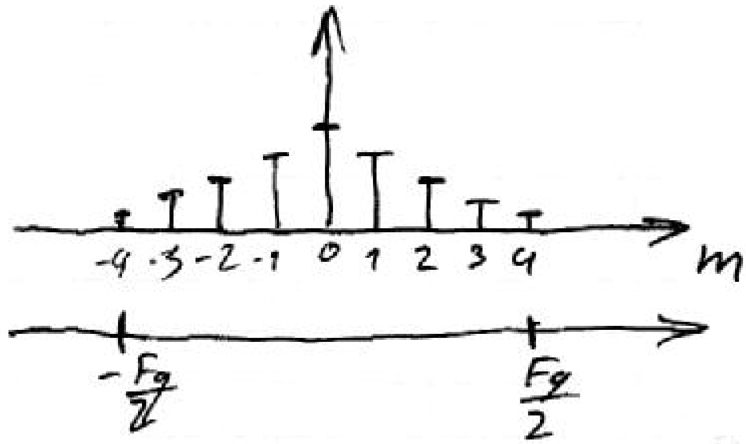
$$S_N[m] \overset{ДПФ}{\Longleftrightarrow} S_N[n]$$



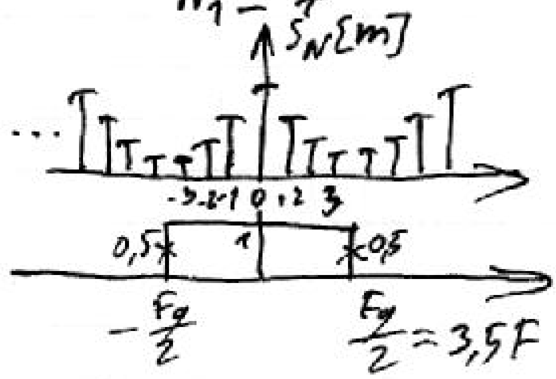
$f = mF \quad F = \frac{1}{T} = \frac{1}{N T_0}$



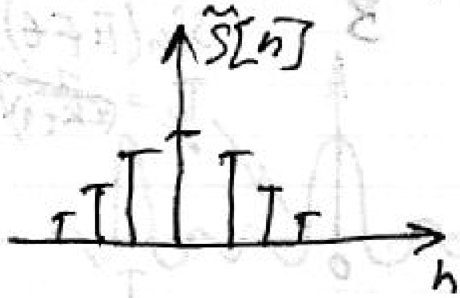
– Восстановл. фильтр. $\frac{F_д}{2} = \frac{\overset{=8}{N}\cdot F}{2} = 4F$



$N_1 = 7$

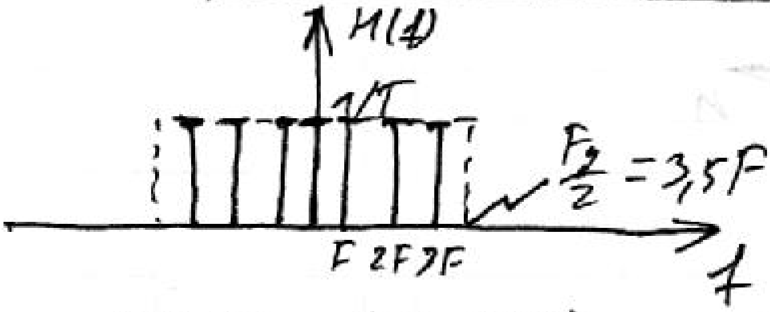


$\rightarrow$



$N = 2^L \quad N\uparrow \left(\begin{smallmatrix}512\\1024\end{smallmatrix}\right)$

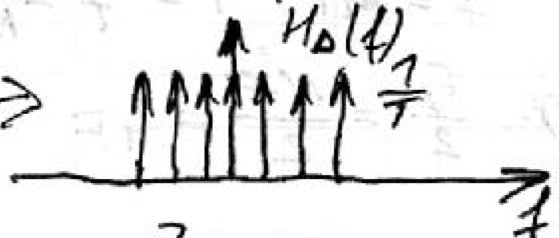
ИХ Восстанавливающего Фильтра (Периодический сигнал)



$\frac{F_g}{2} = 3,5F$

$N = 7$

$$H[m] = \frac{1}{T} H\left(\frac{m}{T}\right) = F\,H(mF)$$



→ Смотри вывод спектра периодич. сигнала

$7 = 2\cdot3+1$

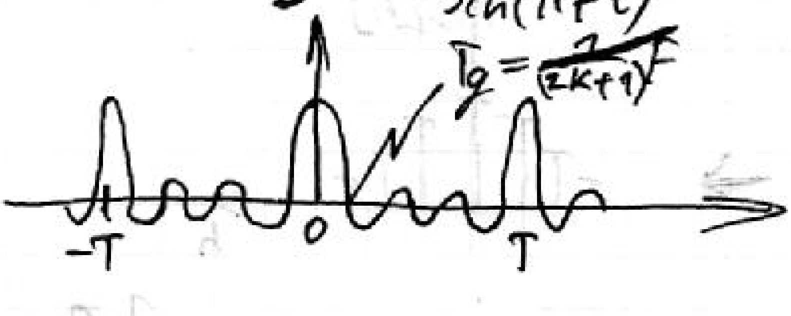
Симетр. пачка из $N = 2k+1$ δ-фуй

$$h_0(t) = \frac{1}{k}\frac{\sin(kx)}{\sin(x)}$$

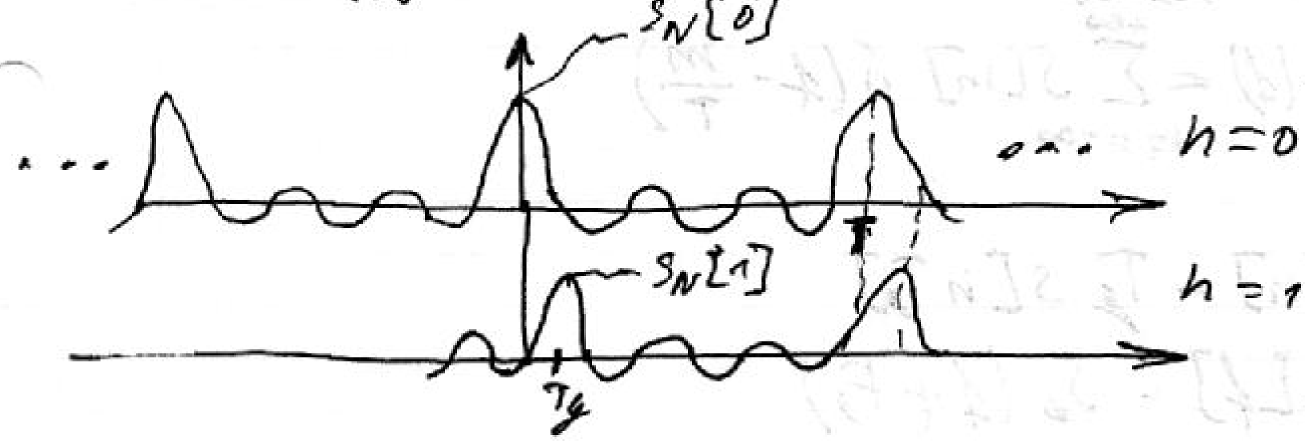
$$x = \pi F t$$

$$h_0(t) = \frac{1}{3}\frac{\sin(3\pi F t)}{\sin(\pi F t)}$$

$$T_g = \frac{1}{(2k+1)F}$$



$$\tilde{S}_T(t) = \sum_{n=0}^{N-1} S_N[n]\cdot h_D(t - nT_g)$$



Обобщенная теорема отсчётов

Преобразование Фурье для различных типов сигналов

Периодические — Не периодические

Сигналы

Дискретный (Цифровой) — Аналоговый ~~Цифровой~~

Аналоговый Не периодич.

$$S(t) \overset{ПФ}{\Leftrightarrow} S(f)$$

периодич. повторение:

$S_T(t) \overset{РФ}{\Leftrightarrow} S[m]$

Аналог. период.

Дискретизация:

$S[n] \overset{ДВПФ}{\Leftrightarrow} S_D(f)$

Дискр. непериод.

— Повт. с период. N

дискр.

$$S_N[n] \overset{ДПФ}{\Leftrightarrow} S_N[m]$$

Периодич. дискретный

$$S_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(t-kT)$$

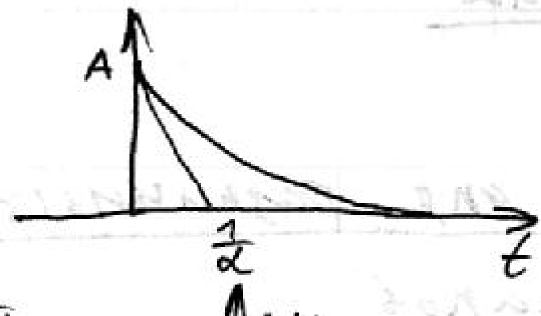
$$S_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} S[m]\,\delta\left(t-\frac{m}{F}\right)$$

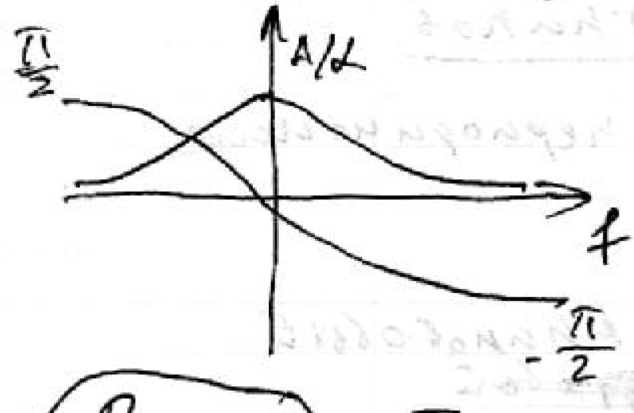
$$S[n]=T_д\,S[nT_д]$$

$$S_д[f]=S_д(f+F_д)$$

РФ дуально ДВПФ

$$s(t)=Ae^{-\alpha t}u(t)$$





Путь 1 T — компромисс.

$T=3/\alpha$ $(?=\frac{2}{\alpha})$

Дискретиз. влечёт искаж. спектра за счёт перекрытия копий спектра, а периодич. повт. ведёт к искаж. сигнала, за счёт перекрытий копий сигн.

Чтобы искажение было минимально: $T\uparrow$ $F_д\uparrow$ $(T_д\downarrow)$

$\frac{T}{T_д} = N\uparrow\uparrow \Rightarrow$ увелич. периода дискр. сиг. и уменьш. быстродействия

Квантование

$$15_{10} = \underbrace{\boxed{1}\times 10^1 \ \boxed{5}\times 10^0}_{\Sigma}$$

$$15_{10} = 1\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0$$

$$387_{10} = 3\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0$$

2	0,	1,	10,	11	100
10	0	1	2	3	4

$$101_2 = 1\cdot 10_2^2 + 0\cdot 10_2^1 + 1\cdot 10_2^0 =$$
$$= 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 4+0+1=5$$

$$\underbrace{1011_2}_{8+4+2+1} = 11_{10}$$

$$47_{10} = ?_2$$

47	2
23	1
11	1
5	1
2	1
1	0

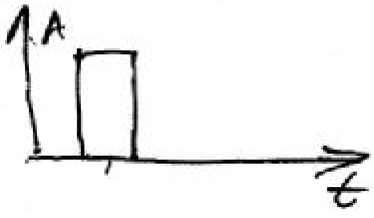
$$47_{10} = 101111_2$$

$\left[0,1 = \frac{1}{10}\right]_{10}$

$0,1_2 = \frac{1}{10_2} = \frac{1}{2}$

$(0,1)_2 = (0,5)_{10}$

$(0,11)_2 = (0,75)_{10}$



1) $A = 3,5$ В

2) $A = 3,47$ В $\Rightarrow$ Для записи числа в цифр. форме нужно задать некотр. точность.

3) $A = 3,472$ В

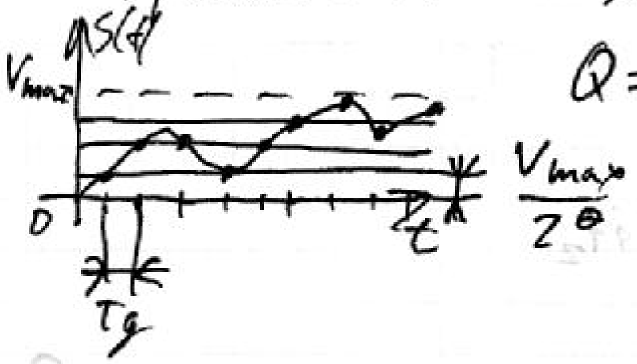
$\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}}_{Q}$

$0 .. 2^Q - 1$

$11_2 = 3_{10}$

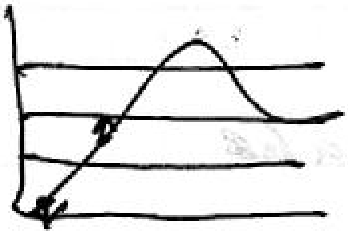
$111_2 = 7_{10}$

Ограничить возм. размах напряж.



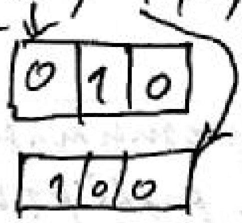
$Q = 3$ - разрядность АЦП (12 .. 14)

Старый метод квантования (снос вниз)



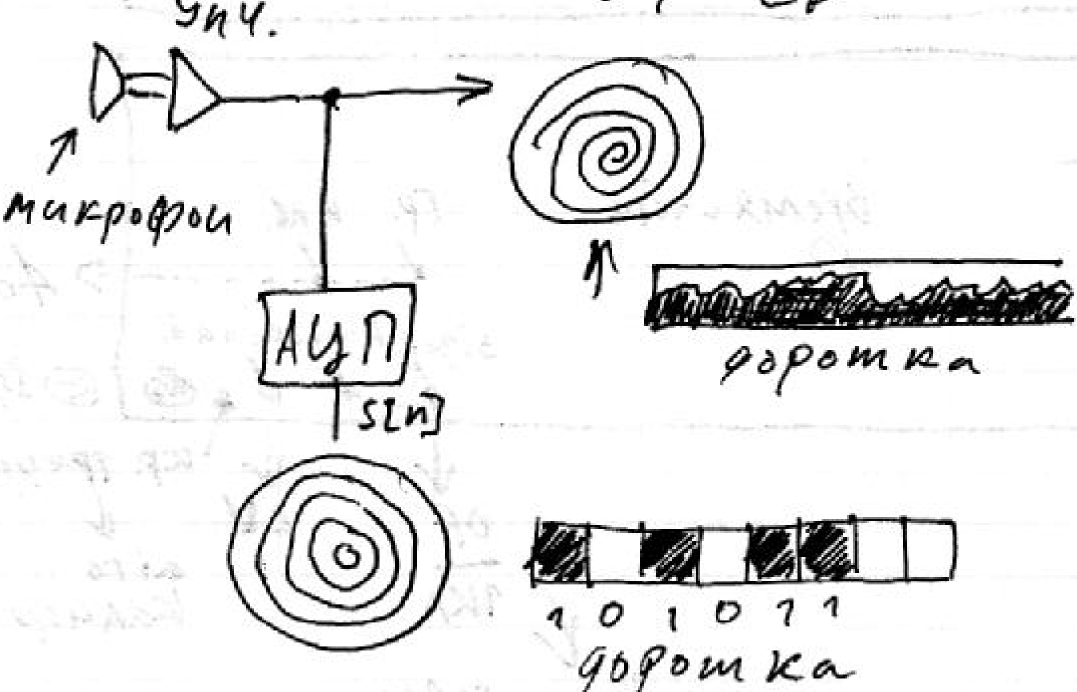
Совр. метод. (снос к ближайшему)

$\{2, 4, 2, 3, 4 \ldots\}$



Квантование проявляется в округлении фактических значений

Задача! Отличие грампластинки от CD



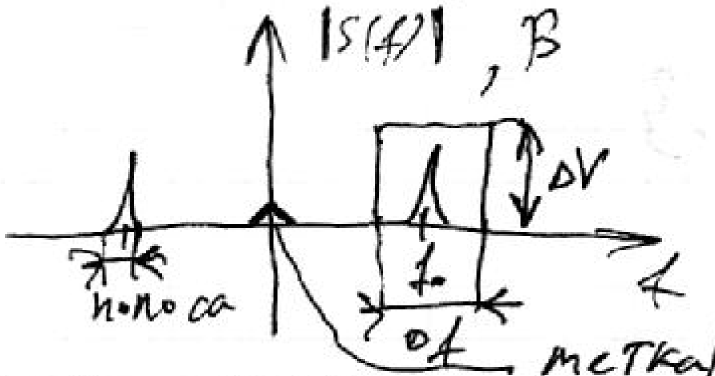
ЛР 1 20.03

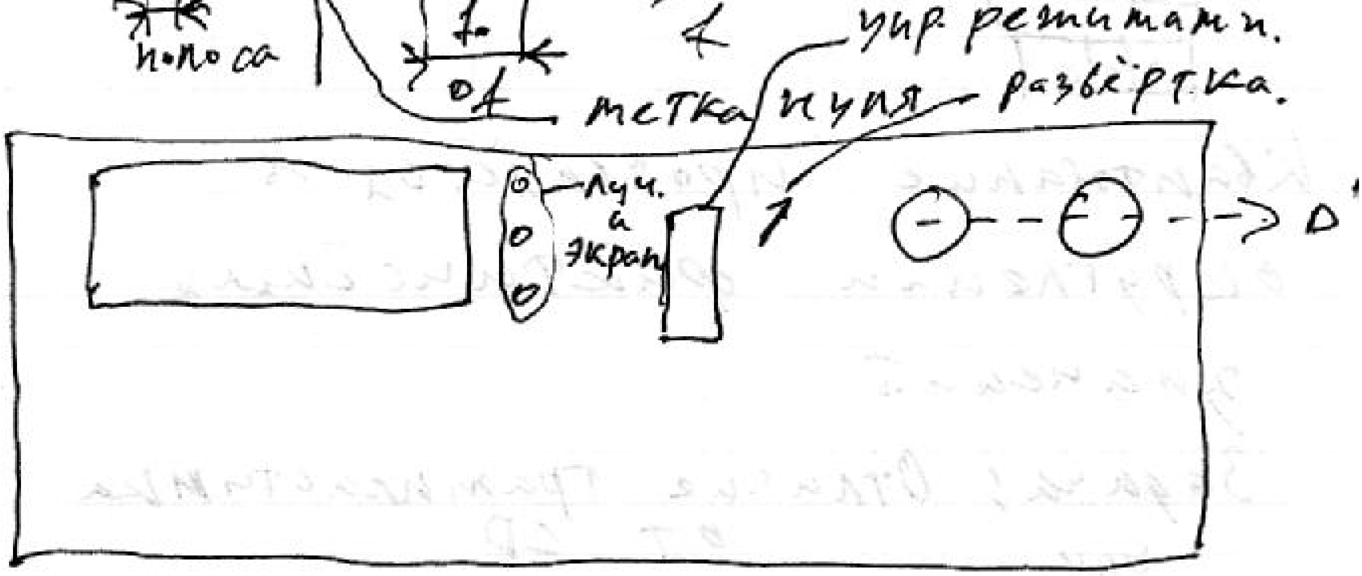
Дискретизация сигналов

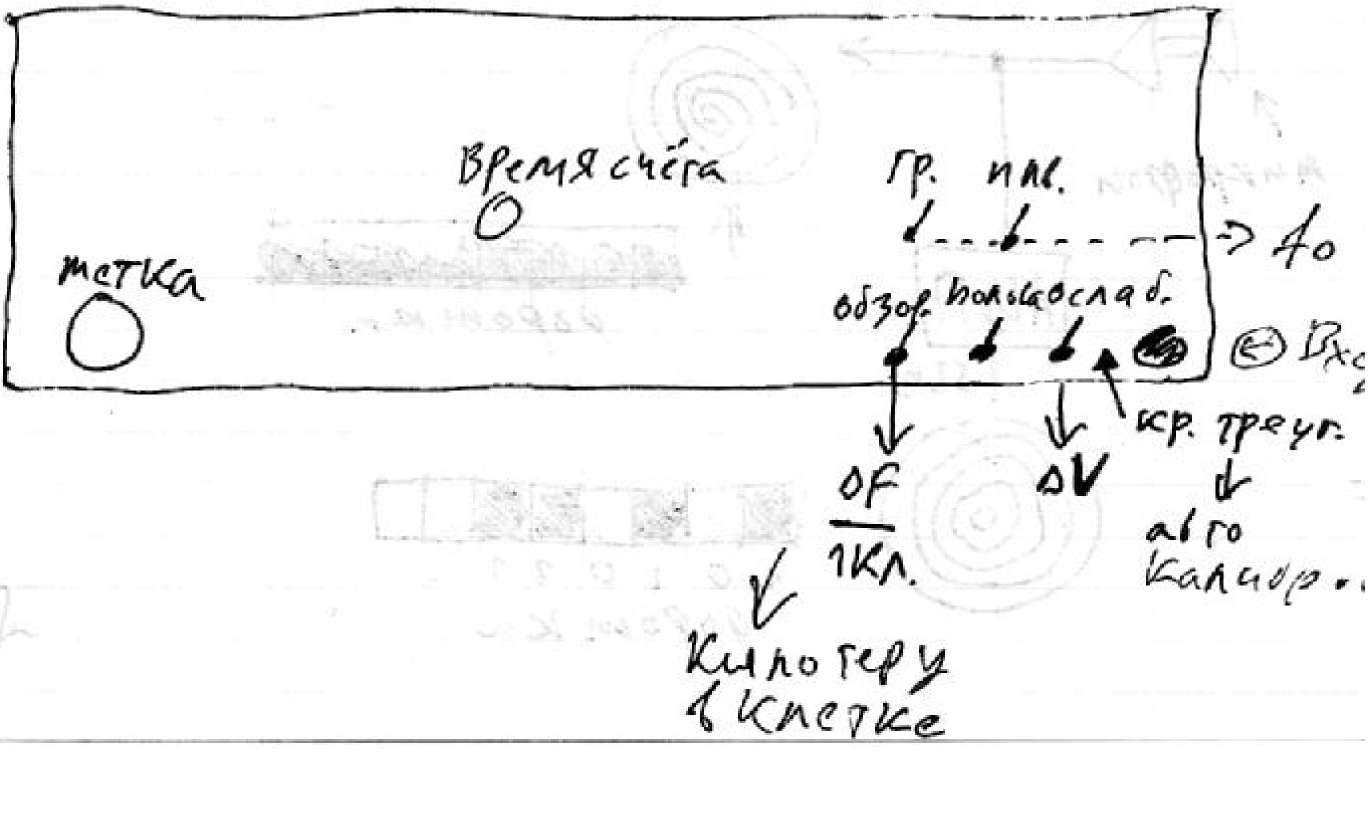
Спектроанализатор

1) Спектры периодич. сигналов

2)







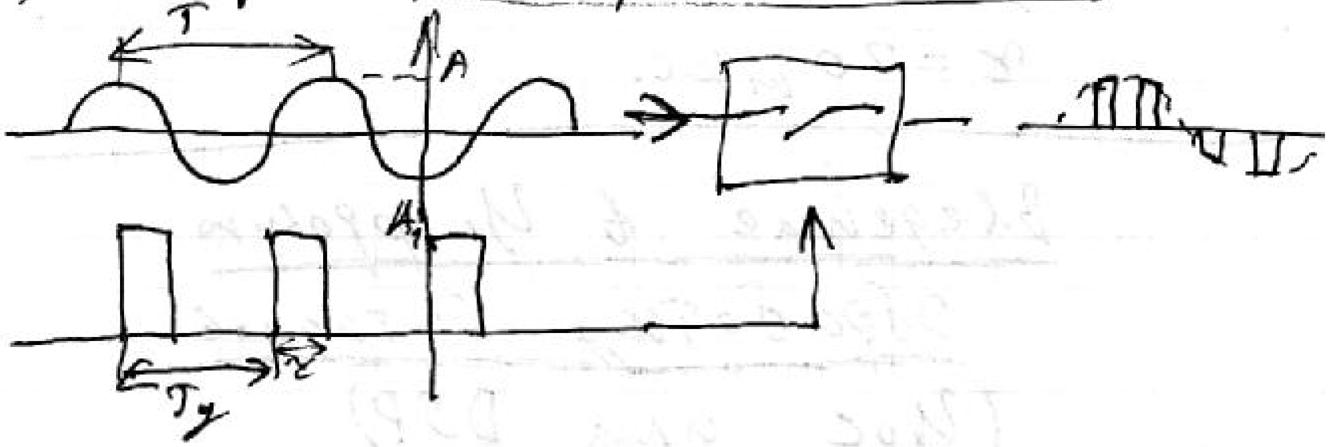
Метки: нуля и чирасястая

$A\cos(\omega t)$

↓

осц.

<u>Дискр. гарм. прямоуг. имп.</u>



$A = 0{,}1 \ldots 2$ В

$F = 1$ кГц $\quad T = \frac{1}{F}$

$T_д = \frac{1}{F_д} \quad F_д = 10$ кГц $\quad T_д = 0{,}1$ мс

100 мкс

$\tau = \frac{T_д}{Q} = \frac{T_д}{10} = 10$ мкс $\quad A_i = 5 \ldots 10$ В

(I) Зарисовать аналог. сигн. и его спектр.

$s(t)$, $d(t)$, $s(f)$, $D(f)$

(II) $S_д(t)$, $S_б(t)$

(III) а) $F = 2$ кГц $S_д(\cancel{t})$, $S_д(t)$

б) $\tau = 20$ мкс

в) $F_д = 5$ кГц

$T_д = 200$ мкс

$\tau = 20$ мкс.

Введение в Цифровую Обработку Сигналов (ЦОС или DSP)

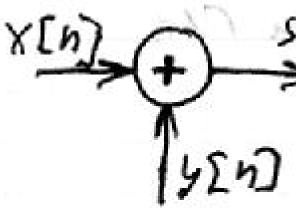
Линейная Нелинейная

Основные цифровые блоки

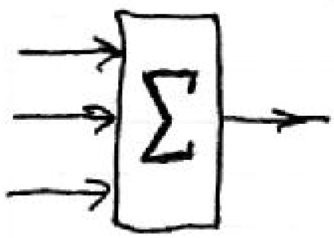
$\xrightarrow{x[n]}$ линия распр.

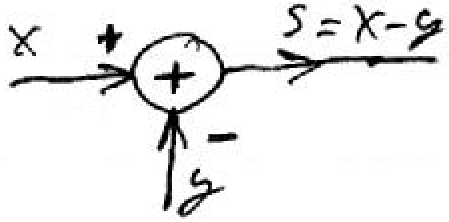
$x[n] \xrightarrow{a} y[n]$ умножитель на константу

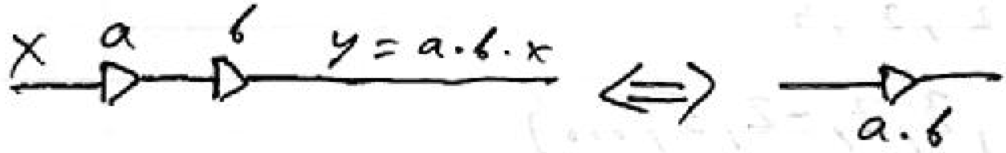
$y[n] = a \cdot x[n]$

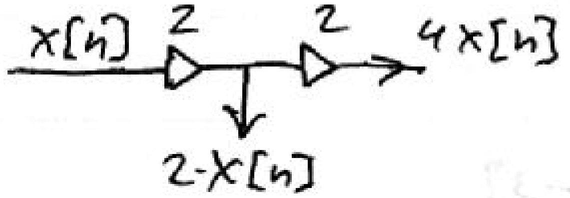


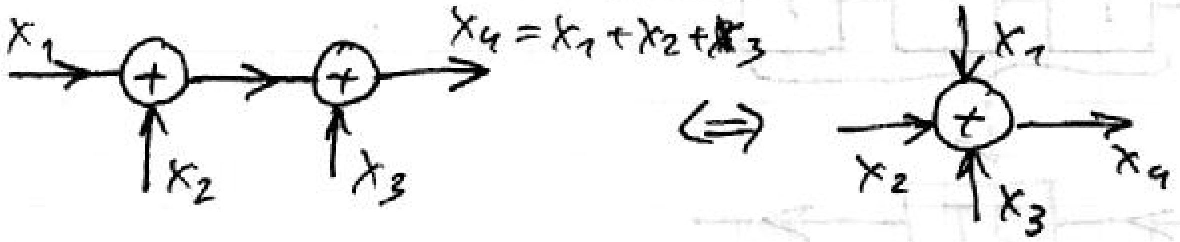
$s[n] = x[n] + y[n]$ } сумматор

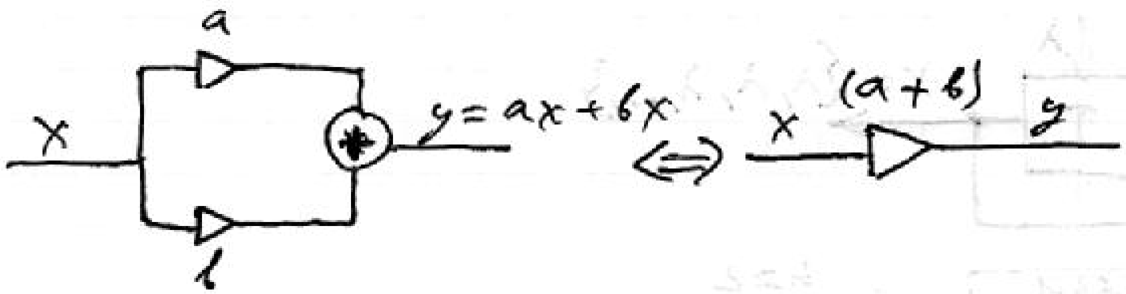






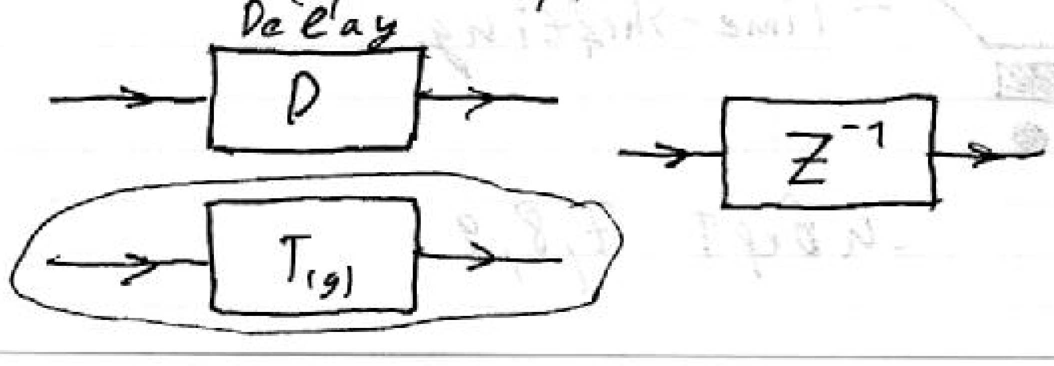


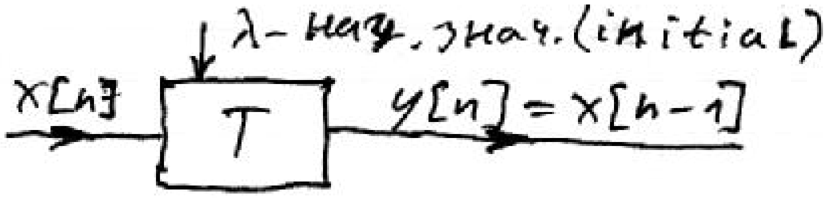




– безынерционные (устр. без памяти) сигналы на вх/вых сущ. одновременно (устр. раб. мгновенно)

Линия задержки, яч. памяти (регистр.)

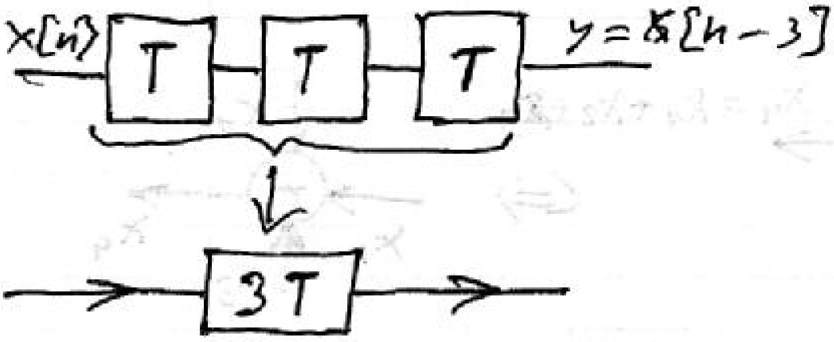


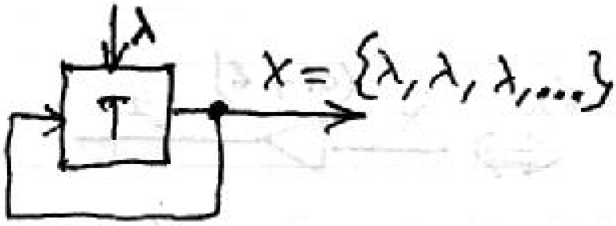


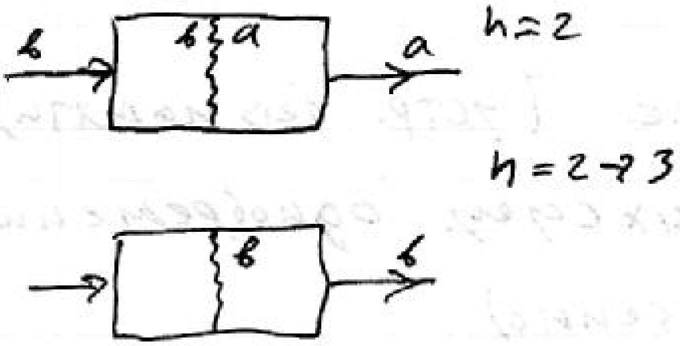
$$x[n] = \{1, 3, 7, -2, 5\}$$
$$n \quad 0, 1, 2, 3, 4$$

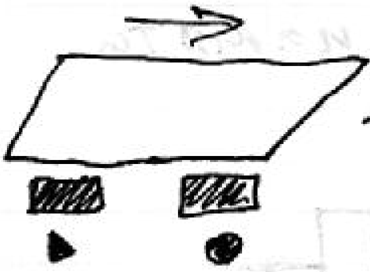
$$y[n] = \{\lambda, 1, 3, 7, -2, 5, \dots\}$$

$$\boxed{\lambda_{умолч.} = 0}$$









– Time-shifting

Сиберт 7, 8, 9

Задача о банковском кредите

(задача о сложных процентах)

P - стоимость квартиры

$P = 7000$ т.р. $= 7.000.000$

r - процент по кредиту

$r = 12\%/$год. $\Rightarrow 1\%/$мес. $= 0{,}01$

$[T_д = 1$ мес.$]$

q - ежемес. выплата - аннуитет

N - (мес.) = 10 лет, 20 лет, 30 лет

120 мес. 240 мес. 360 мес.

n - текущий месяц

$p[n]$ - текущий остаток на кр. счет (долг. банку)

$p[n \cancel{<} 0] = 0$ ⚠

$p[0] = P$

$p[1] = P + P\cdot r - q = P(1+r) - q$

$p[2] = p[1]\cdot P(1+r) - q = P(1+r)^2 - q(1+r) - q$

⚠ $p[n] = p[n-1](1+r) - q$

$$p[3] = P(1+r)^3 - q(1+r)^2 - q(1+r) - q =$$
$$= P(1+r)^3 - q\{(1+r)^2 + (1+r) + 1\}$$
$$p[n] = P(1+r)^n - q\underbrace{\{(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} \dots (r+1) + 1\}}_{*}$$

$$* = 1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1} =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} (1+r)^m$$

$*$ – сумма геометр. прогрессии.

$$* = \frac{1 - (1+r)^n}{1 - (1+r)}$$

член, идущий ЗА последним ⚠

перв. член

основание прогрессии

$$* = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$p[n] = P(1+r)^n - q\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$P[N] = 0$ – выплата кредита за N мес.

$$P(1+r)^N - \frac{q}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$$

$$q = P \cdot r \frac{(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}$$

$$N = \log_{(1+r)} \frac{q}{-Pr+q}$$

$N > 1$

$q = P(1+r)$

$N = \infty$

$q = P \cdot r = q_{min}$

$q_{min} = 70\,000 = 70\text{т.р.}$

$q = q_{min} \cdot K[n] \qquad K[n] > 1$

$S = q \cdot N$

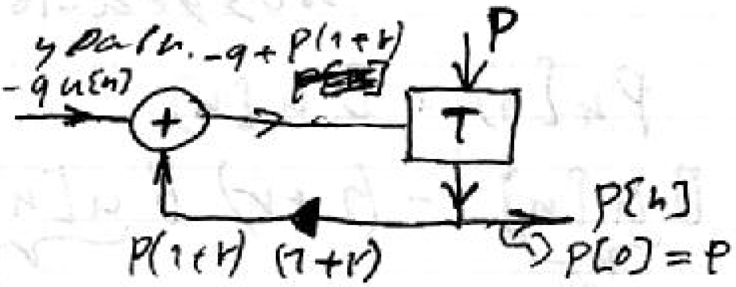
$(1+x)^{\alpha} \simeq 1 + x\alpha$

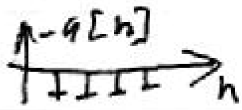
$|x\alpha| \ll \alpha$

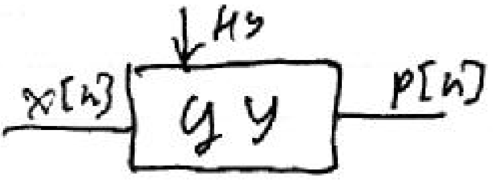
N	10 л. 120	20 л. 240	30 л. 360
$K(N)$	1,435	1,1	1,03
q	100,4 т.р.	77 т.р.	72 т.р.
S млн.	12,1	18,5	25,9
перепл. в раз.	1,7	2,6	3,7

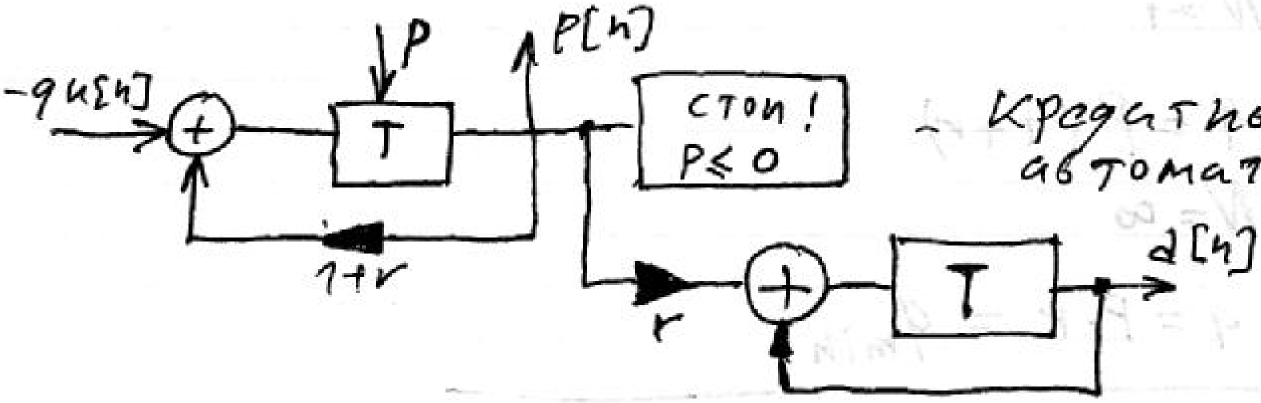
$P[n] = P[n-1](1+r) - q \quad , n > 1$

– разностное урав.









– кредитный автомат

d[n] – доход банкира.

$$p[n] - (1+r)\,p[n-1] = -q\,u[n]$$

Н.Р.У $(-q u[n] \neq 0)$

$$p[n] = \underset{\text{соб.}}{p_{\text{одн.}}[n]} + \underset{\text{части}}{p_{\text{неодн.}}[n]}$$

О.Р.У. $$P[n] - (1+r)\,p[n-1] = 0$$

$$\frac{p[n]}{p[n-1]} = (r+1)$$

$$p_c[n] = A\cdot(1+r)^n$$ – сумма эксп. с произв. коэф.

Частное реш ищется в форме воздейств.

$$p_ч[n] = B\,u[n]$$

$$B\underbrace{u[n]}_{1} - (1+r)\,B\underbrace{u[n-1]}_{1} = -q\underbrace{u[n]}_{1}$$ при $n \geq 1$

$$B - (1+r)B = -q$$

$$B = \frac{q}{r}$$

$$P_u[n] = \frac{q}{r}\, u[n]$$

$$P[n] = P_0 + P_u = \left\{A(1+r)^n + \frac{q}{r}\right\} u[n]$$

$A = ?$ $\quad P[0] = P$ – НУ

$$P[n]\Big|_{n=0} = A + \frac{q}{r} = P$$

$$A = P - \frac{q}{r}$$

$$P[n] = \left(P - \frac{q}{r}\right)(1-r)^n + \frac{q}{r}, \quad n \geq 0$$

Идите вы ... к Сиберту

Методы анализа линейных цифровых устройств (ЛЦУ)

$x[n] \to$ ЛЦУ (ЛЦФ) $\to y[n]$

$x(t) \to$ АФ $\to y(t)$

Типичная задача!

Есть аналоговый фильтр (АФ), созд. которого затрудн.

$x(t) \to$ АЦП $\xrightarrow{x[n]}$ ЛЦФ $\xrightarrow{y[n]}$ ЦАП $\to \tilde{y}(t)$

Wish! $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$

Получение цифрового эквивалента аналогово фильтра.

$x[n] \longrightarrow \boxed{ЦФ} \longrightarrow y[n]$

$x(t)$

ДВПФ ИХ: $h[n]$ $\quad Y(f)$

ЧХ: $H(f)$

$\boxed{РУ:}$

$\tilde{X}(z)$ СФ: $\tilde{H}(z)$ $\quad \tilde{Y}(z)$

цифровая линейная свёртка

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Лекция 30.03 Z-преобразование

$$\{1,\ 7,\ -3,\ 2\} \Leftrightarrow 1+7x-3x^2+2x^3$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{array}$$

$s[n]$

$$s_д(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\,\delta(t - nT_д)$$

$$s_д(t) \equiv 0, \quad t<0$$

$$s[n] \equiv 0, \quad n<0$$

$$L\{s_д(t)\} = \int_{+0}^{+\infty} s_д(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \int_0 \Big\{ \sum_{n=0} s[n]\,\delta(t-nT_g) \Big\} e \; dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big\{ \int_0^{+\infty} s[n]\, \underbrace{\delta(t-nT_g)\, e^{-pt}}_{e^{-pnT_g}\cdot\delta(t-nT_g)} dt \Big\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} s[n]\, e^{-pnT_g} \int_0^{1} \underbrace{\delta(t-nT_g)\, dt}_{"1"} =$$

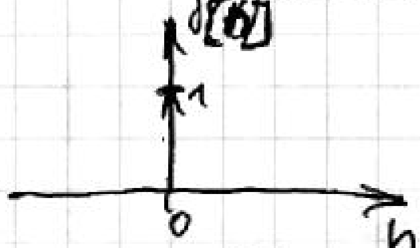
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} s[n] \left(e^{-pT_g}\right)^n = \left\{ e^{pT_g} = z \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} s[n]\; z^{-n} = \tilde{S}(z)$$

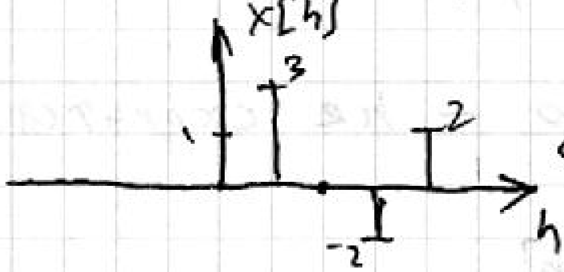
$$s[n] \Leftrightarrow \tilde{S}(z)$$

$$Z\{s[n]\} = \tilde{S}(z)$$

$$\boxed{\tilde{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s[n]\cdot z^{-n}}$$

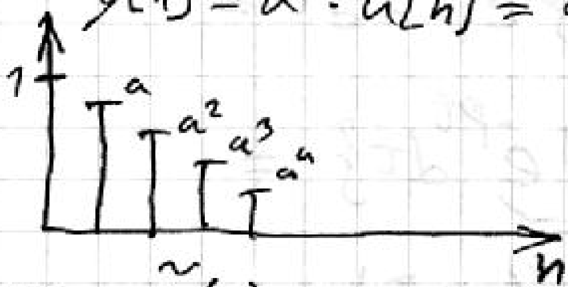


$\Longleftrightarrow$ "1"



$$\Longleftrightarrow \tilde{X}(z) = 1 + 3z^{-1} + 0\cdot z^{-2} + (-2)z^{-3} + 2\cdot z^{-4}$$

$y[n] = a^n \cdot u[n] = a^n, \; n > 0$



$y[n] \Leftrightarrow \tilde{Y}(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \left\{ \overset{\text{пусть:}}{|az^{-1}| < 1} \right\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

область сходимости

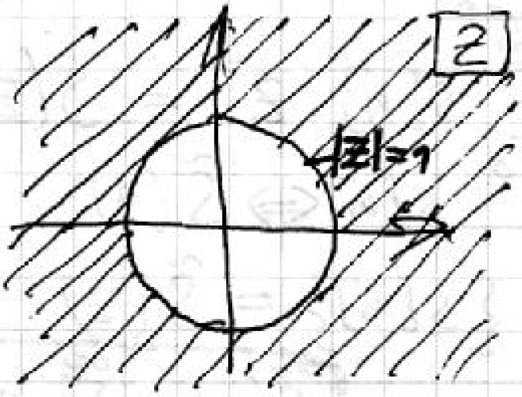
$\tilde{Y}(z)$ - компл. ф-я

$|az^{-1}| < 1$

$|z^{-1}| < |a^{-1}|$

$\left|\frac{1}{z}\right| < \left|\frac{1}{a}\right|$

$|z| > |a|$



Пр. $a = 0,8$

$\tilde{Y}(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-0,8} = 5$

$\tilde{Y}(z)\Big|_{z=2} = \frac{2}{2-0,8} = \frac{5}{3} = 1,667$

$\tilde{Y}(z)\Big|_{z=0,6} = \frac{0,6}{0,6-0,8} = \infty$ - не сходится

$b[n] = u[n] = 1^n u[n]$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

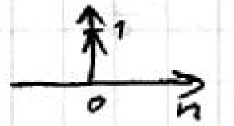
Линейность

1) $s[n] \Leftrightarrow \tilde{S}(z)$

$x[n] \Leftrightarrow \tilde{X}(z)$

$\alpha \cdot s[n] + \beta \cdot x[n] \Leftrightarrow \alpha \cdot \tilde{S}(z) + \beta \cdot \tilde{X}(z)$

2) Задержка

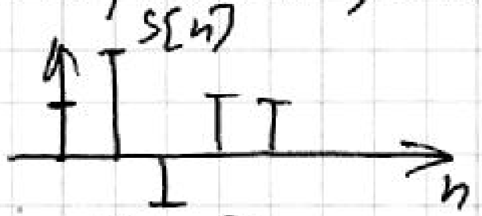
$s[n] \Leftrightarrow \tilde{S}(z)$  $\Leftrightarrow 1$

$s[n-1] \Leftrightarrow z^{-1} \tilde{S}(z)$  $\Leftrightarrow z^{-1}$

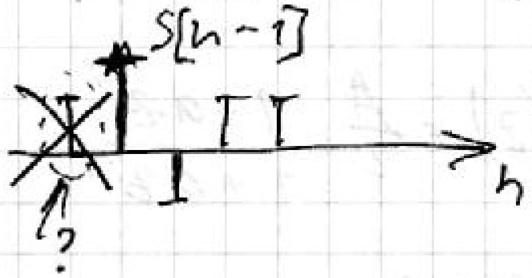
3) $n \cdot s[n] \Leftrightarrow -z \dfrac{d\tilde{S}(z)}{dz}$

4) $a^n \cdot s[n] \Leftrightarrow \tilde{S}(a^{-1}z)$

5) Опережающий сдвиг



$s[n+1] \Leftrightarrow (\tilde{S}(z) - s[0])z$

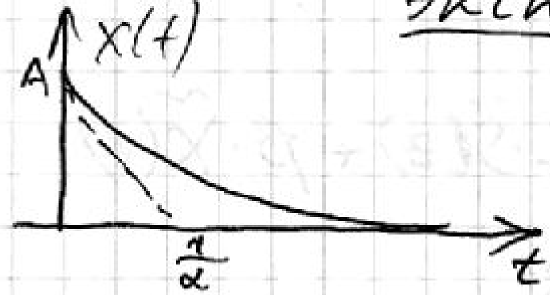


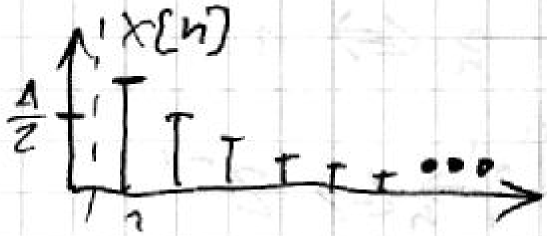
$\xrightarrow{N}$ $s[n-N] \Leftrightarrow z^{-N} \tilde{S}(z)$

$\xleftarrow{N}$ $s[n+N] \Leftrightarrow z^{N} S(z) - s[0] z^{N} - s[1] z^{(N-1)} \ldots -$

$- s[N] \cdot z$

Продискретизированная экспонента

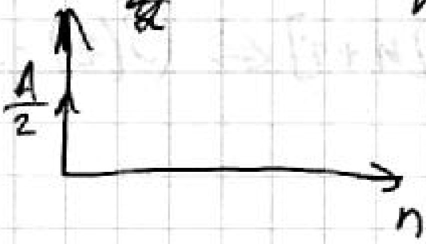




$$x[n] = \begin{cases} \frac{A}{2}, & n=0 \\ A\cdot a^n, & n>0 \end{cases}$$

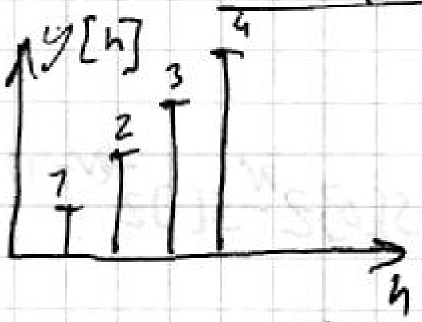
$$\tilde{X}(z) = \frac{A}{2} + A\cdot a \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot z^{-1} = \frac{A}{2} \frac{1+az^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$$x[n] = A a^n u[n] - \frac{A}{2}\delta[n]$$



$$\tilde{X}(z) = \frac{A}{2} \frac{1+az^{-1}}{1+az^{-1}}$$

Лин.-возр. ф-я



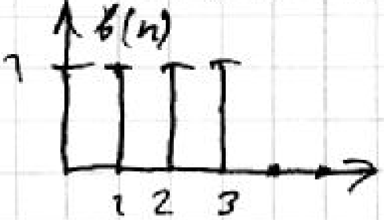
$$y[n] = n\cdot u[n] \Leftrightarrow$$

$$\boxed{u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}}$$

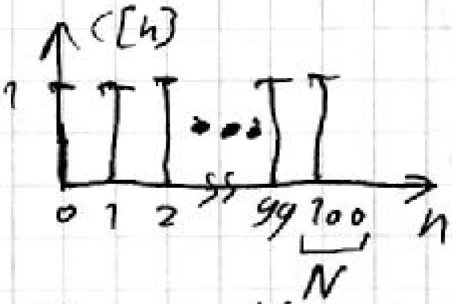
$$\tilde{Y}(z) = -z\frac{d\left(\frac{z}{z-1}\right)}{dz} = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' =$$

$$= -z \frac{1(z-1) - 1\cdot z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

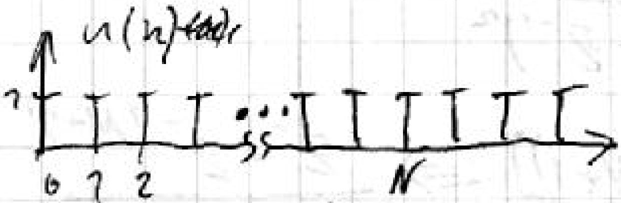
Цифровой пр. импульс



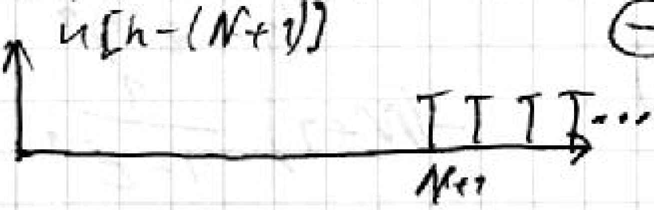
$$\tilde{B}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$



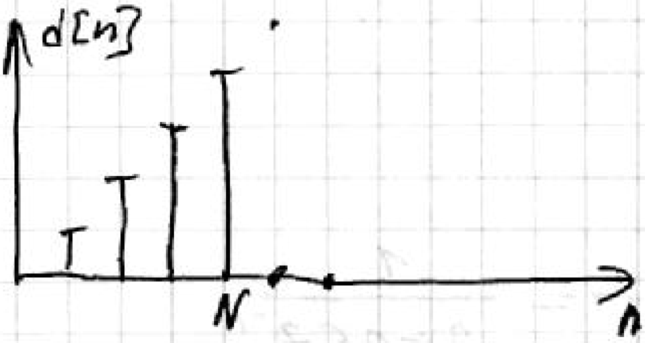
$$\tilde{C}(z) = \sum_{n=0}^{N} z^{-N} = \frac{1 - z^{-(N+1)}}{1 - z^{-1}}$$

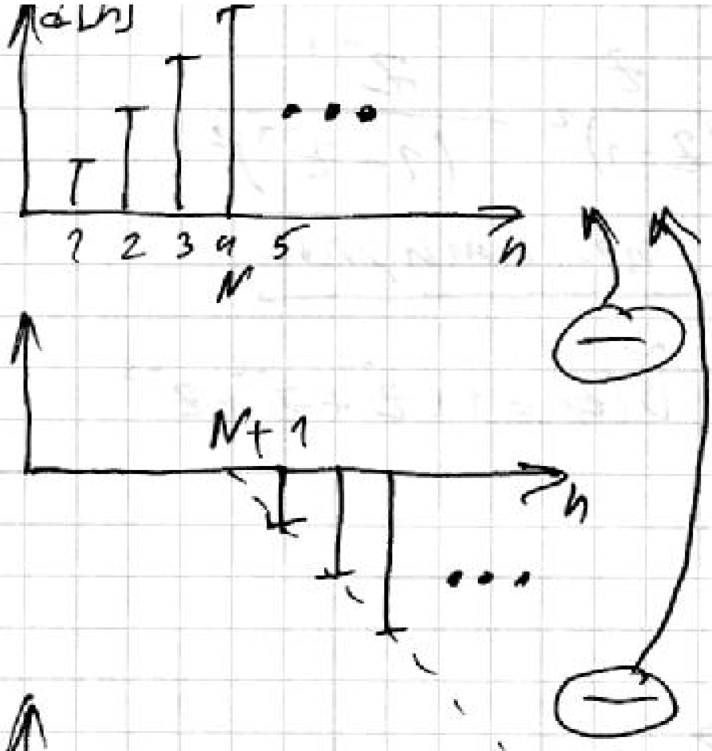


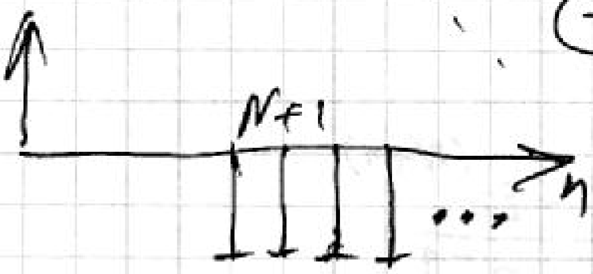
$$\frac{1}{1-z^{-1}}$$



$$- \qquad \frac{1}{1-z^{-1}} z^{-(N+1)}$$







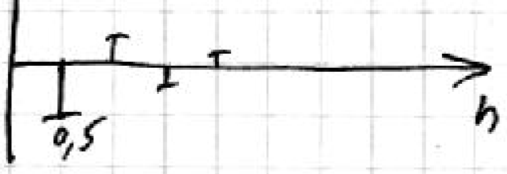
d[n]

$$n \cdot u[n] \Longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$-\ (n-(N+1))\,u[n-(N+1)] \Longleftrightarrow \frac{z^{-1} \cdot z^{-(N+1)}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$(N+1)\cdot u[n-(N+1)] \qquad -(N+1)\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$e[n] = (-0{,}5)^n u[n]$$



$$\tilde{E}(z) = \frac{1}{1-(-0{,}5)z^{-1}} = \frac{1}{1+0{,}5z^{-1}}$$

$$Z^{-1}(\tilde{S}(z)) = s[n]$$

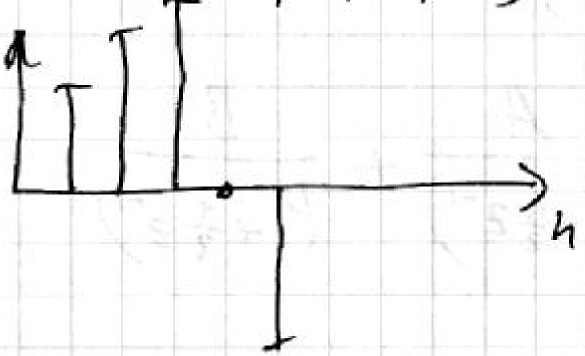
$$s[0] = \lim_{z \to \infty} \tilde{S}(z)$$

$$s[\infty] = \lim_{z \to 1} \{\tilde{S}(z) \cdot (z-1)\}$$

$$\hat{X}(z) = 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2} - 3z^{-4}$$

$$x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] + 4\delta[n-2] - 3\delta[n-4]$$

$$\{2, 3, 4, 0, -3\}$$



$$\hat{y}(z) = \frac{2z}{z-2}$$

$$\begin{array}{l|l} 2z & z-2 \\ \hline -(2z-4) & 2 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + 16z^{-3} \ldots \longrightarrow \\ \quad 4 & \\ \quad -(4 - 8z^{-1}) & \\ \quad\quad 8z^{-1} & \\ \quad\quad -(8z^{-1} - 16z^{-1}) & \\ \quad\quad\quad 16z^{-1} & \\ \quad\quad\quad \ldots & \end{array}$$

$$\{2, 4, 8, 16, \ldots,\}$$

$$2 \cdot 2^n \cdot u[n] = 2^{n+1} u[n]$$

$$\tilde{S}(z) = \frac{5}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$$ – дробь [illegible]

z – пр. прав.

$$1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}=0$$

$$6z^2-z-1=0$$

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12}=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)=0$$

$$\frac{5}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{A}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}+\frac{B}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

A, B – вычеты

$$A=\left[\tilde{S}(z)\cdot\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\right]\Bigg|_{\substack{1-\frac{1}{2}z^{-1}=0\\ z=\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{5}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=3=A$$

$$B=\left[\tilde{S}(z)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\right]\Bigg|_{z=-\frac{1}{3}}=\frac{5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=-\frac{1}{3}}=2=B$$

$$\tilde{S}(z)=\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$$s[n]=3\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\quad n\geq 0$$

$s[0] = 5$

$s[1] = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

$s[2] = \frac{3}{4} + \frac{2}{9} = \frac{35}{36}$

$$
\begin{array}{l|l}
5 & 1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2} \\
\hline
\underline{5 - \frac{5}{6} z^{-1} - \frac{5}{6} z^{-2}} & 5 + \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{35}{36} z^{-2} \\
\frac{5}{6} z^{-1} + \frac{5}{6} z^{-2} & \\
\underline{\frac{5}{6} z^{-1} - \frac{5}{36} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-36}} & \\
\frac{35}{36} z^{-2} &
\end{array}
$$

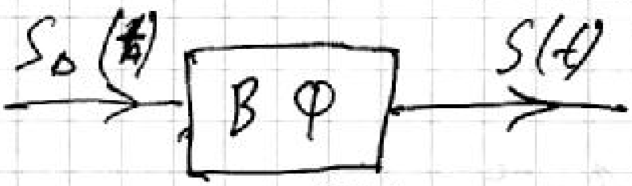
$$\tilde{X}(z) = \frac{11 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}} = 6 + \frac{11 - z^{-1} - z^{-2} - 6\left(1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}\right)}{1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}} =$$

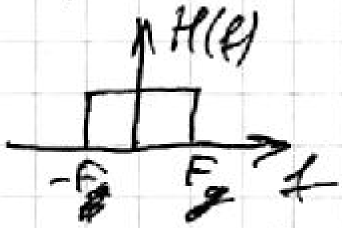
$$= 6 + \frac{5}{1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}}$$

$$x[n] = \underbrace{6\delta[n]}_{n=0} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

ЛР2 03.04

Восстановление сигналов

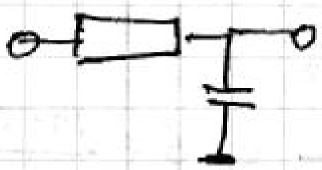


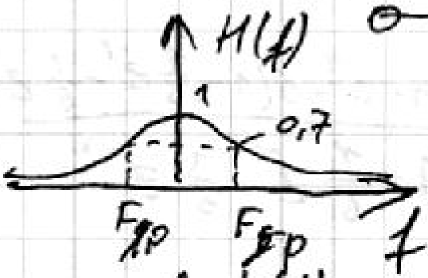


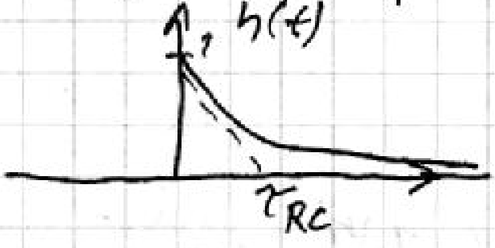
ИФНЧ

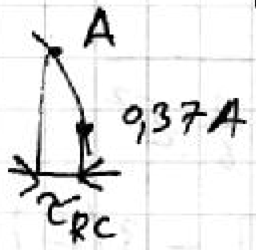
$$F = \frac{F_д}{2}$$

ФНЧ-I





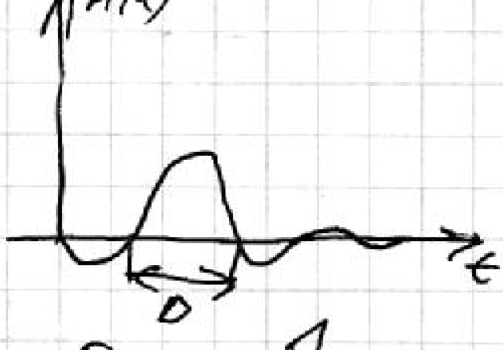




$$F_{гр} = \frac{1}{2\pi\,\tau_{RC}}$$

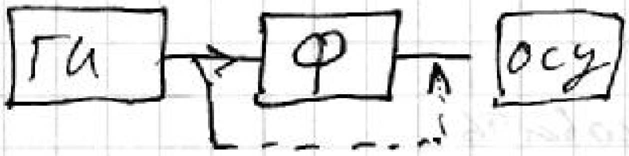
ФНЧ-II

Полюсов > 3



$$F_{гр} \approx \frac{1}{2\Delta}$$

1. Снятие ИХ ФНЧ I



$F_{гр} < 10$ кГц

4–6

$\tau_и < 20$ мкс

$A_и \uparrow$

$T > 600$ мкс

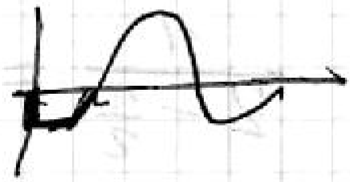
$V(t) \approx S_и \cdot h(t) =$

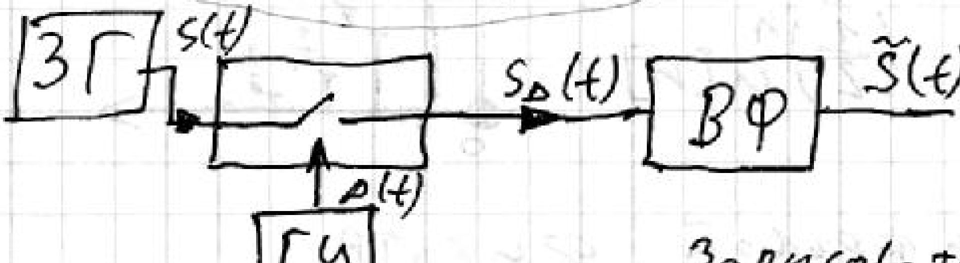
$= A \cdot \tau_и \cdot h(t)$

2. Снятие ИХ ФНЧ II

$F_{гр I} = \frac{1}{2\pi \tau_{RC}}$

$F_{гр II} = \frac{1}{2D}$





Зарисовать:

$F = 1$ кГц — $S_D(t)$, $|S_D(f)|$

$T_и = 10$ кГц — $S_I(t)$, $|S_I(f)|$

$A = 1-2$ В — $S_{II}(t)$, $|S_{II}(f)|$

3. $F_{гарм} = 9$ кГц

$S(t)$ $|S(f)|$ – зарисовать

$S_{\Pi}(t)$ $|S_{\Pi}(f)|$

$T = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}$

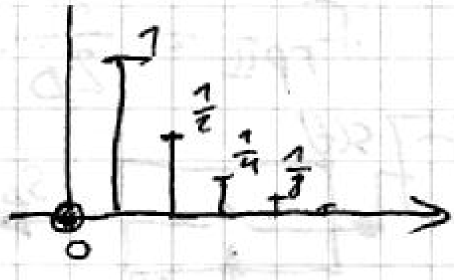
$F = \frac{1}{4 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}25$ кHz

Лекция 06.09

$e^{n} u[n]$ $\qquad \frac{1}{1-az^{-1}}$

$$\cancel{\frac{1}{z-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}-z}}$$

$$\frac{1}{z-\frac{1}{2}} = z^{-1}\underbrace{\frac{z}{z-\frac{1}{2}}}_{\Updownarrow \; \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]\, u[n-1]$$



Цифровой фильтр

Оппенгейм „Цифровая обработка сигналов"

$$x[n] \longrightarrow \boxed{ЦФ} \longrightarrow y[n]$$

УФ устанавливает связь вход-выход в виде разностного уравнения

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \ldots a_k y[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \ldots + b_m x[n-m]$$

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$ - нормальная форма

$a_0 = 1$

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = \frac{1}{3} x[n] + \frac{2}{3} x[n-1]$$

Порядок фильтра $N = \max(K, M)$

$$y[n] = -\frac{1}{2} y[n-1] + \frac{1}{3} x[n] + \frac{2}{3} x[n-1]$$

$$\underbrace{y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] + \sum_{k=1}^{K} (-a_k) y[n-k]}_{\text{Рекурентная формула}}$$

(Правило расчёта текущего по уже расчитанному предыдущему)

Пр: $y[0] \Leftarrow \{y[-1], y[-2], \ldots, y[-K]\}$

$$\boxed{\text{начальные значения} \quad \text{default} \equiv 0}$$

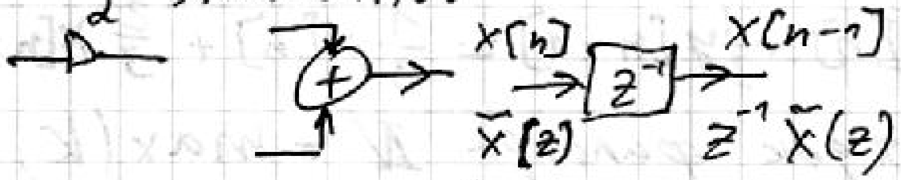
Расст. фильтра наз. реализуемыми Ф

$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = -2 \cdot x[n+1]$ –

– чтоб расчитать текущее знач., нужно исп. след. входн. знач.

Исп. возм при заранее известном $x[n]$, иначе фильтр построить нельзя

Реализуемый Ф сост. из 3х типов элементов



Р.У. не изменится при 3х операциях

1) $\times\alpha \quad \alpha \neq 0$

2) $\overset{+}{\leftrightarrow}$

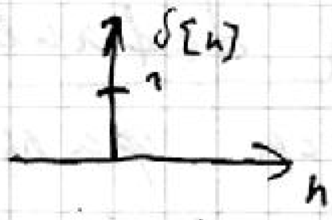
3) смещение времени.

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = \frac{1}{3} x[n] + \frac{2}{3} x[n-1]$$

$$y[n+1] + \frac{1}{2} y[n] = \frac{1}{3}[x+1] + \frac{2}{3} x[n]$$

Импульсная характеристика цифрового фильтра (ИХЦФ)

$$h[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]}$$



Сигнал - это набор своих отчётов

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,\delta[n-m]$$

$$\delta[n-k] \Rightarrow h[n-k]$$

$$\alpha \cdot \delta[n] \Rightarrow \alpha \cdot h[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,h[n-m] = x[n] * h[n]$$

ИХ!

<u>По импульсной характеристике</u>

<u>классифицируют ЦФ</u>

<u>Ограничения</u>: 1) условие каузальности

$$h[n<0] \equiv 0$$

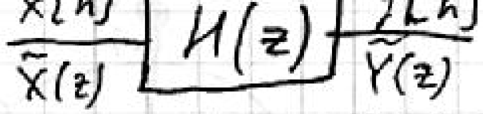
2) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = E = \infty$ условие устойчивости

$$\Downarrow$$

$$|h(n\to\infty) \to 0|$$

<u>Системная ф-я</u>

<u>цифрового фильтра</u>



$$\boxed{\tilde{X}(z)\,\tilde{H}(z) = \tilde{Y}(z)}$$

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_k y[n-k] =$$
$$= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_m x[n-m]$$

$$\tilde{Y}(z) + a_1 z^{-1}\tilde{Y}(z) + \ldots + a_k z^{-k}\tilde{Y}(z) =$$

$$= b_0 \tilde{X}(z) + b_1 z^{-1}\tilde{X}(z) + \ldots + b_m z^{-m}\tilde{X}(n-m)$$

$$\tilde{Y}(z)(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}) = \tilde{X}(z)(b_0 + z^{-1}b_1 + \ldots + z^{-m}b_m)$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{\tilde{Y}(z)}{\tilde{X}(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{k}} =$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{K} a_k z^{k}}$$

<u>Нули $H(z)$:</u> $b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m} = 0$

корни!

Пр: $1 + 2z^{-2} = 0 \qquad z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$

<u>Полюса $\tilde{H}(z) = \infty$</u>

$1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k} = 0$

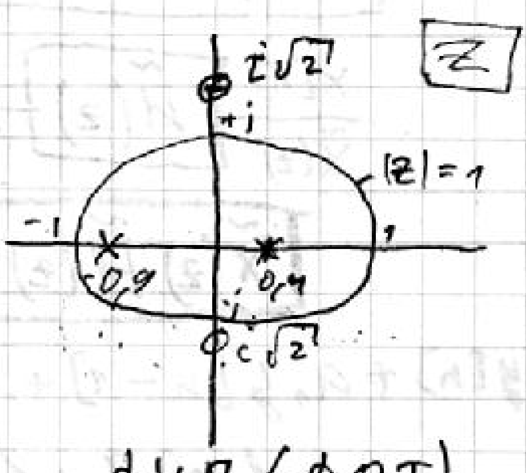
корни!

Пр: $1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} = 0 \;\Big|\cdot 6z^2$

$6z^2 + 3z - 2 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{12}$$

$z_{1,2} = -0{,}9;\ 0{,}4$



ЗНП (ФОТ)

ЛФ и ИХ

$$\xrightarrow[\text{"1"}]{\delta[n]} \boxed{H(z)} \xrightarrow[\tilde{h}(z)]{h(n)}$$

$$\boxed{H(z) = Z\{h[n]\}}$$

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - z_{п1} z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z_{п2} z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - z_{п3} z^{-1}} + \ldots$$

$z_п$ – полюса (корни знаменателя)

$A_1 \cdot (z_{п1})^n u[n]$

$|z_{п1}| < 1$

$h[n]$

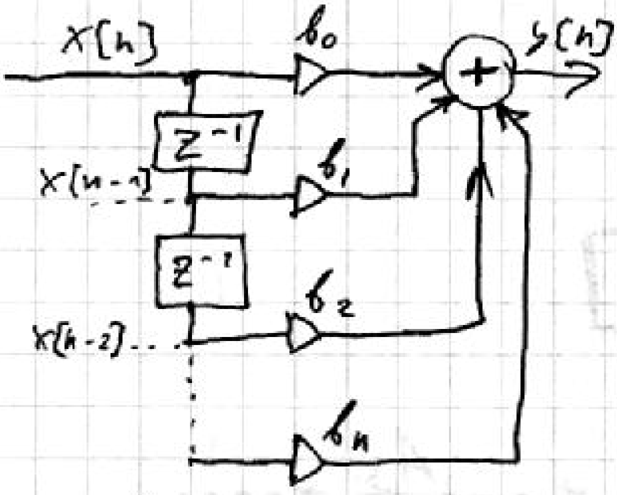
КИХ	БИХ
конечная ИХ	бесконечная ИХ
$h[n]\big\rvert_{n>N_1} \equiv 0$	IIR
$h[n]\big\rvert_{n<N_2} \equiv 0$	
FIR	

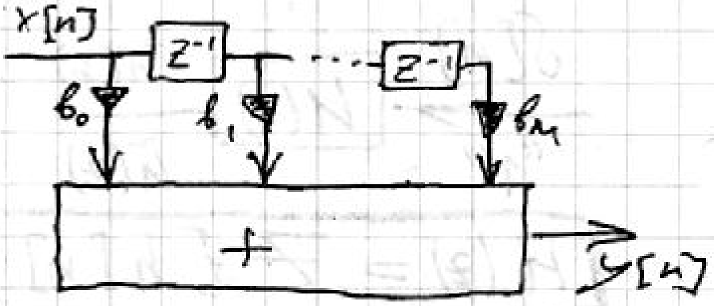
КИХ – фильтр

(трансверсальный фильтр)

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M]$$

$$y[n] \leftarrow f\{x\}$$





Пусть НУ ≡ 0

ИХ: $\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

n	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	...	$y[n]$
0	1	0	0		b_0
1	0	1	0		b_1
2	0	0	1		b_2
3	0	0	0		b_3
4	0	0	0		⋮
⋮	⋮	⋮	⋮		

$$h[n] = b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2] + \ldots + b_M\delta[n-M]$$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}$$ – полюсов нет

⇓

КИХ фильтр устойчив

Нет ни одной обратной связи (сигнал с выхода назад в фильтр не возвращается)

$$y[n] = \frac{1}{3}x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$

Фильтр скользящего среднего (СС)

БИХ – фильтры

БИХ

↙ Рекурс ↘ Общ. вид

Рекурс: ↙ авторекурсионные ↘ общ.

Фильтр авторегрессии

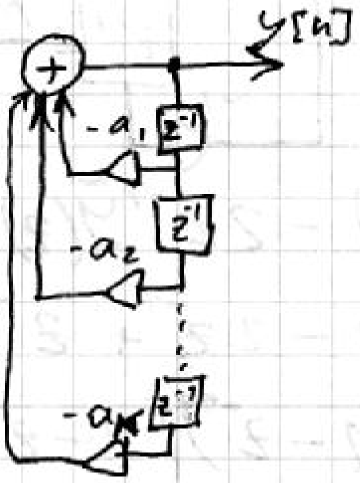
$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \ldots + a_k y[n-k] = 0$$

$$x[n] = 0$$

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \ldots - a_k y[n-k]$$

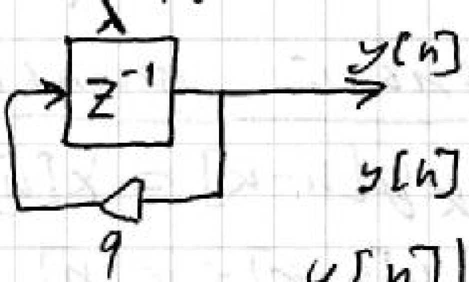
необходимо k отсчётов

$$НУ = 0 \Rightarrow y[n] \equiv 0$$



Пр.: 1) Геометрич. прогрессия

$$y[n] = q\,y[n-1]$$



$$y[n] - q\,y[n-1] = 0$$

$$y[n]\Big|_{n=0} = A = \lambda$$

$$y[n] = \lambda \cdot q^n$$

Пр.: 2) Арифметическая прогрессия

$$y[n] = y[n-1] + d$$

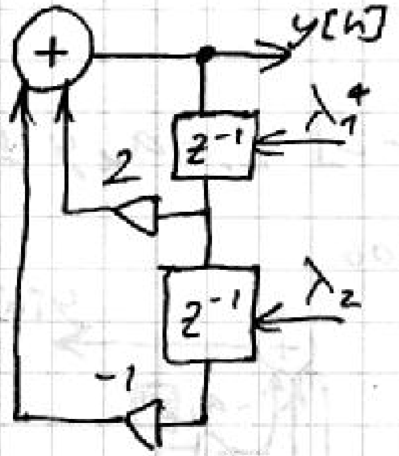
$$y[n-1] = y[n-2] + d$$

$$d = y[n-1] - y[n-2]$$

$$y[n] = y[n-1] + y[n-1] - y[n-2]$$

$$y[n] = 2y[n-1] - y[n-2]$$

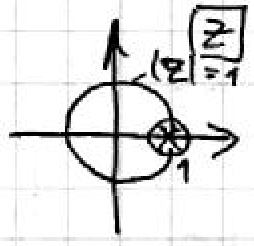
$$y[n] - 2y[n-1] - y[n-2] = 0$$



$$\tilde{y}(z) - 2z^{-1}\tilde{y}(z) + z^{-2}\tilde{y}(z) = 0$$

$$1 - 2z^{-1} + z^{-2} = 0$$

$$(1 - z^{-1})(1 - z^{-1}) = 0$$



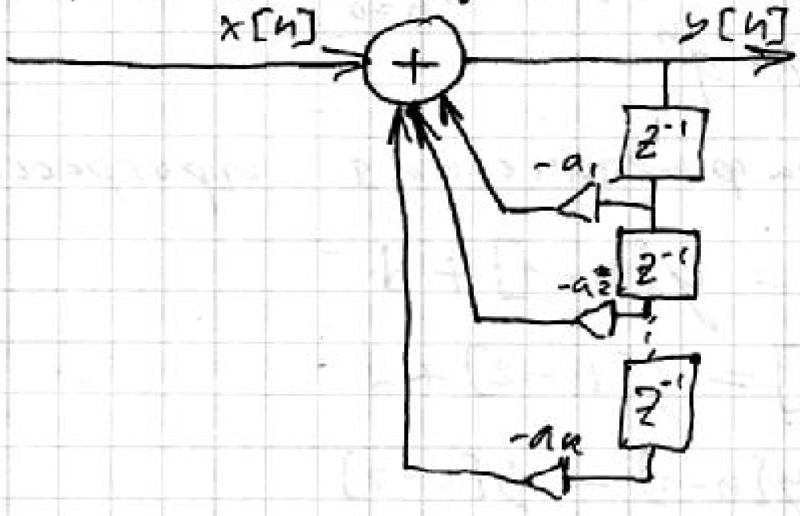
$$z_{1,2} = 1$$

$$y[n] = (C_1 n + C_2) 1^n u[n] = C_1 n + C_2$$

Рекурсивный фильтр

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_k y[n-k] = x[n]$$

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + \ldots + a_k y[n-k] + x[n]$$



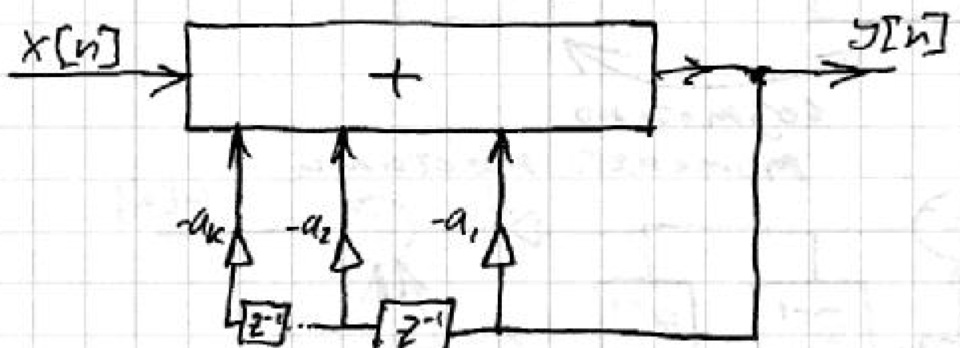
$$\tilde{Y}(z)(1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\ldots+a_k z^{-k}) = \tilde{X}(z)$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{\tilde{Y}(z)}{\tilde{X}(z)} = \frac{1}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\ldots+a_k z^{-k}}$$

Нет нулей (только полюса)

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$$

$$\{z_{n1}, z_{n2}, \ldots, z_{nk}\} - |z_n| < 1$$

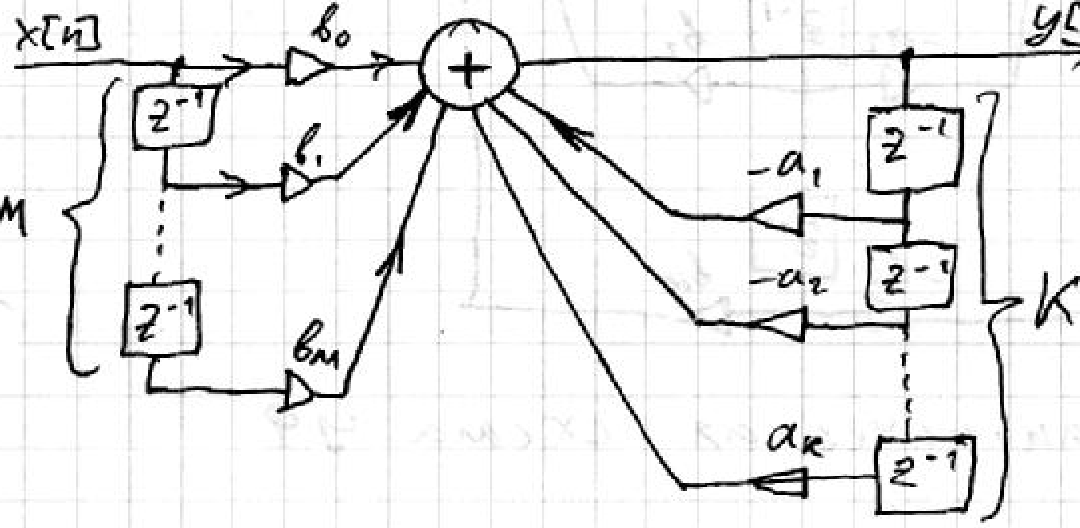


Фильтр общего случая

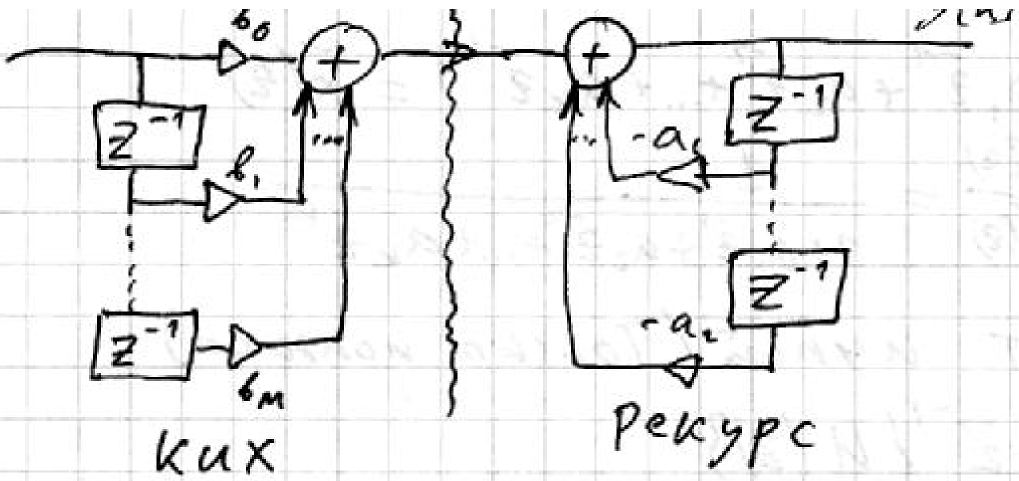
$$\sum_{k=0}^{K} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

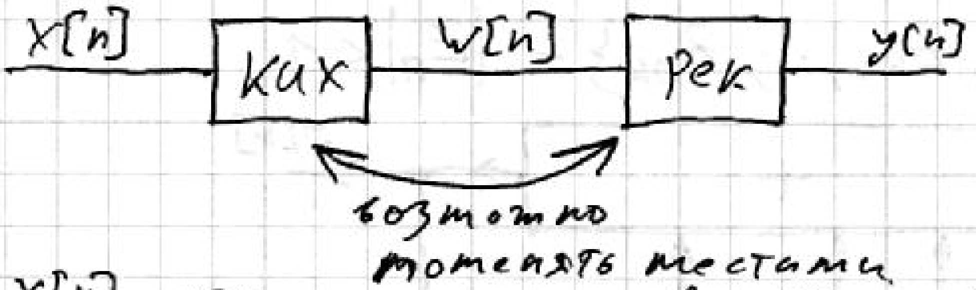
$$a_0 = 1$$

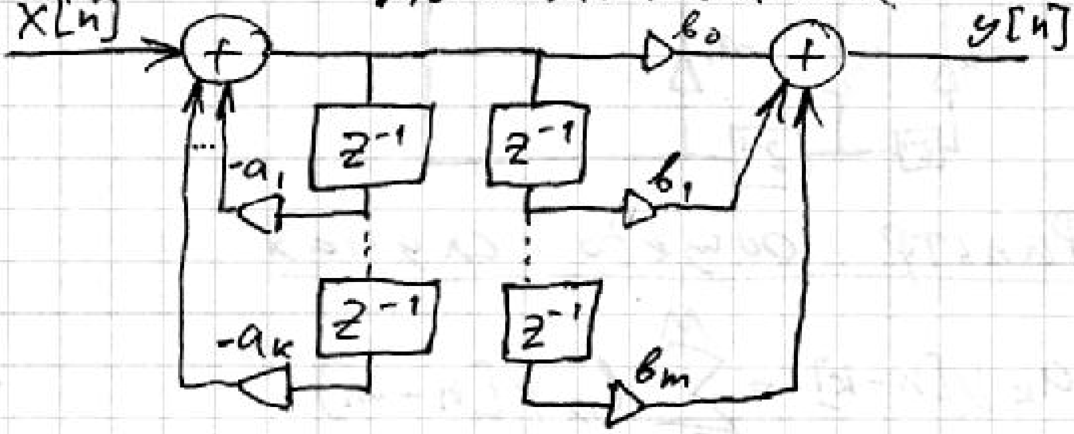
$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] + \sum_{k=1}^{K} (-a_k) y[n-k]$$

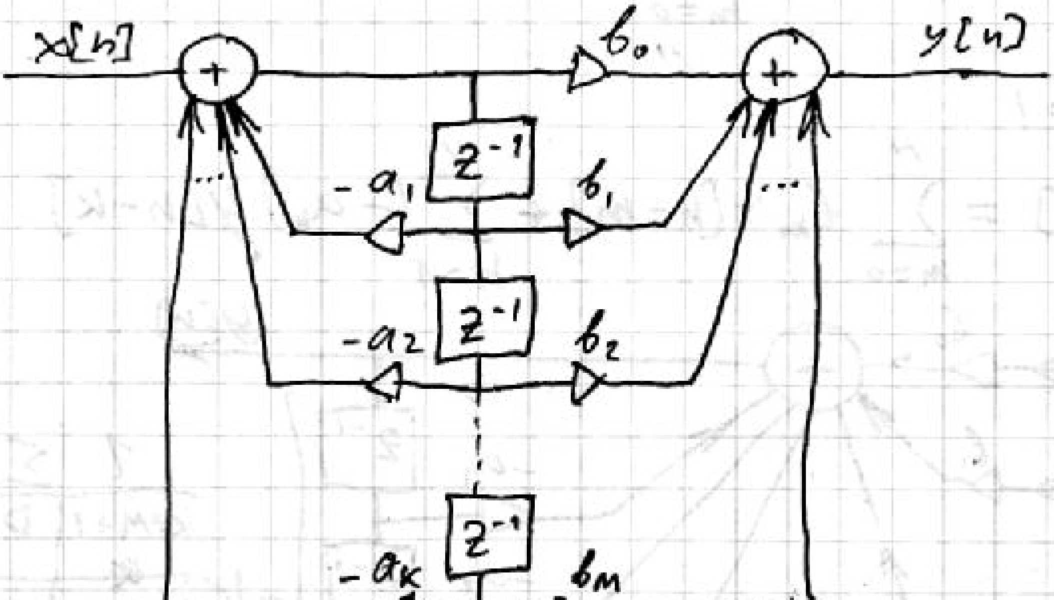


1	Σ
K+M+1	D
M+K	z^{-1}



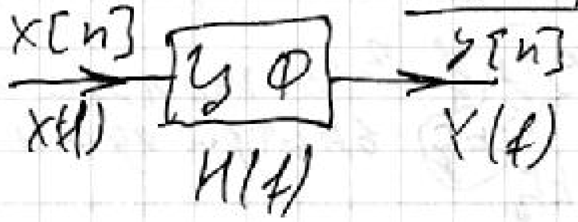






Каноническая схема ЦФ

Лекция 13.04 Частотные характеристики цифровых фильтров



$$X(f)\cdot H(f) = Y(f)$$

$X(f), Y(f)$ – период. ф-и $\frac{1}{T_д} = F_д$

$\Downarrow$ $H(f)$ – периодич. $\frac{1}{T_д} = F_д$

$X(f) =$ ДВПФ $x[n]$

$H(f) =$ ДВПФ $h[n]$

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n T_д}$$

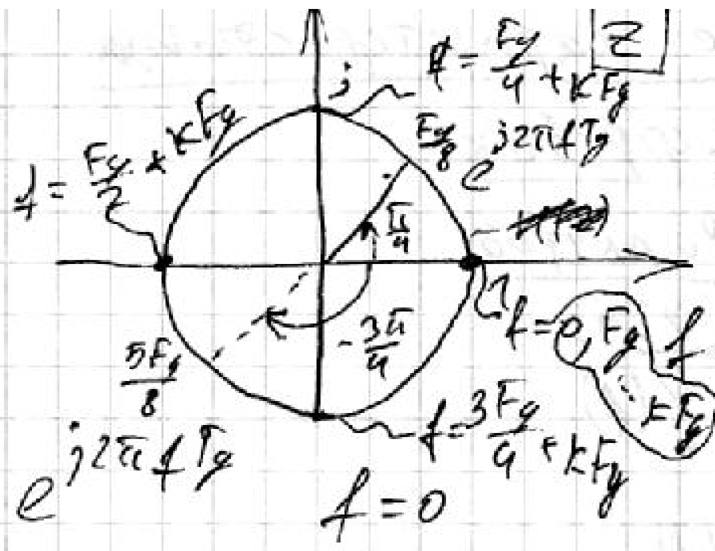
$\sum_n |h[n]| \leq E < \infty$ – необх. усл. $*$

$$\tilde{H}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n]\, z^{-n}$$

$$\boxed{H(f) = \tilde{H}(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f T_д}}}$$

Усл. устойчивости (только уст. фильтр обл. ЧХ)

Все полюса внутри един. окр.



$f=0$

$$f=\frac{F_д}{4}$$

$$\left.e^{j2\pi f T_д}=e^{j2\pi \frac{f}{F_д}}\right\}\varphi \qquad \varphi=2\pi\frac{f}{F_д}$$ - знач. частот превр. в знач. углов

$\frac{f}{F_д}=\theta$ - нормир. частота.

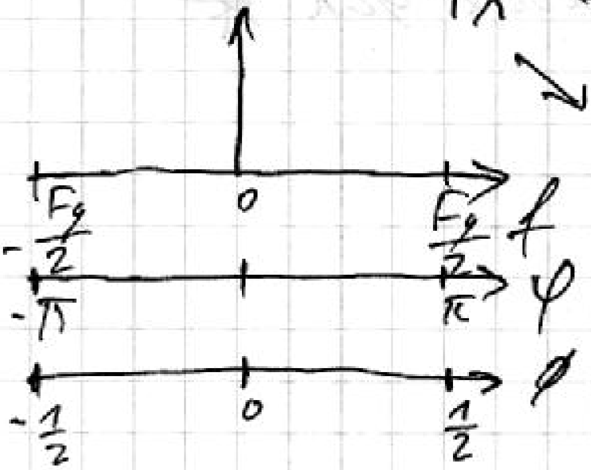
$$H(f)=H(f+F_д)$$
$$H(\theta)=H(\theta+1)$$

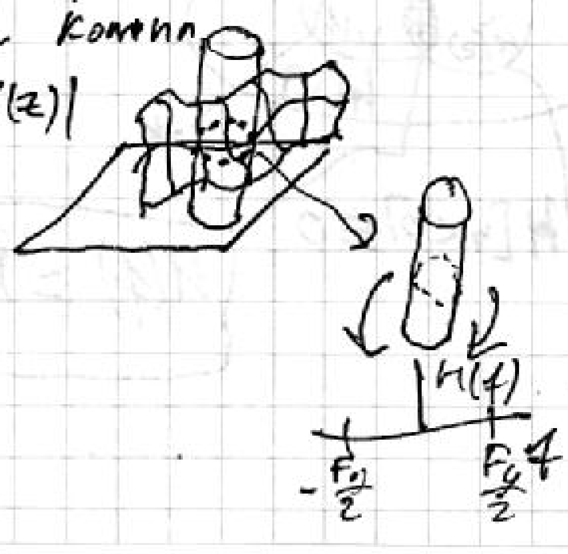
ЧХ → $|\ |$, АЧХ

↘ arg, ФЧХ

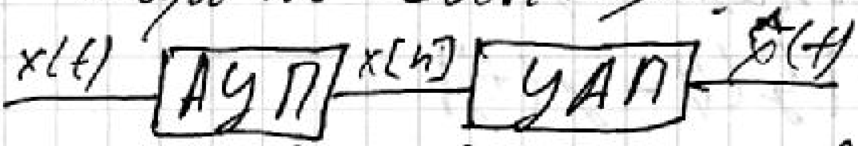
$H(z)$ ← компл.

↓ $|H(z)|$ ↑ компл.

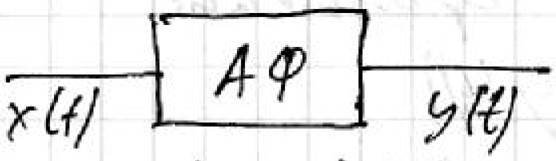




Задача синтеза:



$x(t) \neq \hat{x}(t)$, $\hat{x}(t) \to x(t)$, $\hat{x}(t) \approx x(t)$



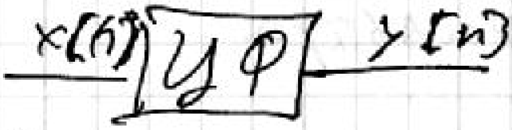
1) ИХ $h(t)$ $\quad y(t) = x(t) * h(t)$

2) ЧХ $H(f)$ $\quad Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

3) СФ $H(p)$ $\quad Y(p) = X(p) \cdot H(p)$

ДОГ/ДНП

4) ДУ



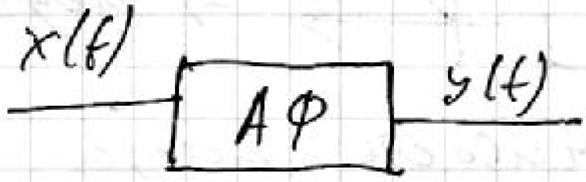
у.сл.

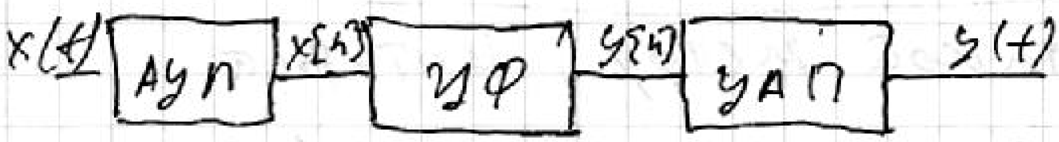
1) ИХ $\quad y[n] = x[n] * h[n]$

2) ЧХ $\quad y[f] = x[f] \cdot h(f)$

2) СФ $\quad y[z] = X(z) \cdot H(z)$

3) Р.У.





Дискр (квантов) ← Ошибка — ошибк. восстан.

ошибка ЦФ ← АФ

1) Визуальная оценка

2) $\varepsilon = \max\limits_t |\hat{y}(t) - y(t)|$

3) Среднеквадр. сравнение

$$e(t) = |\hat{y}(t) - y(t)|$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^2(t)\,dt = Э_e$$

$$\Sigma = \frac{Э_e}{Э_y} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t) - \hat{y}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt}$$

Методы синтеза УФ

Устойчивость фильтра

вход $\boxed{Ф}$ выход

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt = C < \infty \\ &\sum_n |x[n]| = D < \infty \end{aligned}\right\}$$ Ф. устойчивый если для огранич. входа даёт огран. выход.

→ неуст.

Устойчивость метода

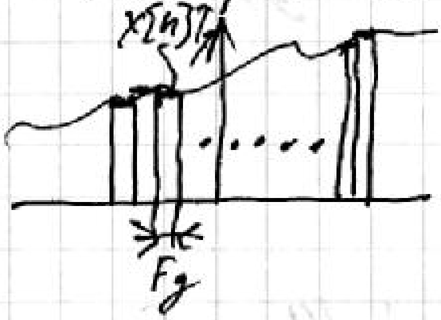
– это такой метод, который превращ. уст. аналоговый ф. в уст. цифровые

Глобальная устойчивость: при любом $\underline{\underline{T_д}}$

<u>Метод инвариантной ИХ</u>

(<u>ИИХ</u>)

Инварианты – постоянные



$$\int_{a}^{b} x(t)\,dt \simeq \sum_{n} x[n\cdot T_д]\cdot T_д$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau =$$

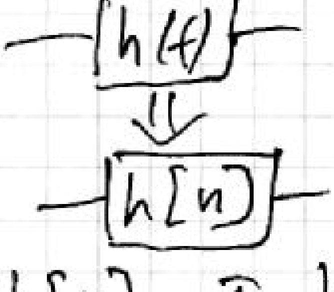
$$= \begin{Bmatrix} \tau = m\cdot T_д \\ t = n\cdot T_д \end{Bmatrix} = \sum_{m} x(mT_д)\cdot h(nT_д - mT_д)\,T_д$$

$$y[n] = T_д\, y(nT_д)$$

$$x[n] = T_д\, x(nT_д)$$

$$h[n] = T_д\, h(nT_д)$$

$$y[n] = T_д\, y(nT_д) = \sum_{m} \underbrace{T_д\, x(mT_д)}_{x[m]}\ \underbrace{h(nT_д - mT_д)\,T_д}_{h[n-m]}$$



$$h[n] = T_д\, h(nT_д)$$

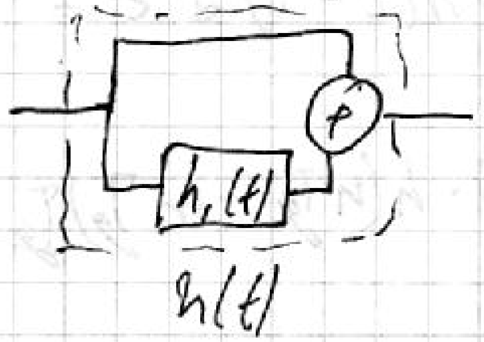
Если момент дискретизации попадает на разрыв, то берется полусумма правого и левого предела.

$$U_{УФ}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_{АФ}(f - mF_д)$$

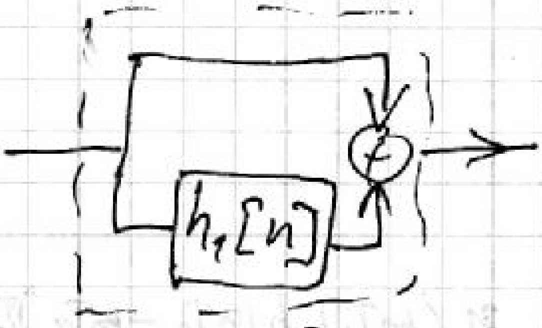
искажение ЧХ

Особенности:

АФ: $h(t) = \delta(t) + h_1(t)$ – $h_1(t)$ – обычная ф-я без особенностей



УФ: $h[n] = \delta[n] + \underbrace{T_д h_1[nT_д]}_{h_1[n]}$



$$x(t) \to \boxed{\int} \to y(t)$$

$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt} \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = y(0) + \int_{0}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx (\Delta t \to 0) \approx \frac{y(t+\Delta t) - y}{\Delta t}$$

Метод Эйлера - вперёд

ЭВ

$$x(t) \approx \frac{y(t+T_g) - y(t)}{T_g}$$

$$T_g\, x(t) = y(t+T_g) - y(t) \;\Big|\; t = n \cdot T_g,\ \times T_g$$

$$T_g\, x[n] = y[n+1] - y[n]$$

$$y[n] - y[n-1] = T_g\, x[n-1] \;\Big|\; Z\{\}$$

$$\tilde{Y}(z)(1 - z^{-1}) = T_g\, \tilde{X}(z)\, z^{-1}$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{\tilde{Y}(z)}{\tilde{X}(z)} = \frac{T_g z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$А\Phi:\ X(p) = p \cdot Y(p) \qquad H_{a\varphi} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{T_g z^{-1}}{1 - z^{-1}} \qquad p = \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1} T_g} = \frac{z - 1}{T_g}$$

$$С\Phi:\ \tilde{H}(z) = H(p)\Big|_{p = \frac{z-1}{T_g}}$$

$p = \frac{z-1}{T_g}$ $\qquad z = 1 + pT_g$

для особых точек

АФ: для полюсов

$Re(P) < 0$

УФ: $|z| < 1$

$z = |1 + pT_g| = |1 + T_g \operatorname{Re} P + i T_g \operatorname{Im} P| =$

$= \sqrt{(1 + T_g \operatorname{Re} P)^2 + (\operatorname{Im} P)^2} = \sqrt{1 + T_g^2 \operatorname{Re} P^2 + 2T_g \operatorname{Re} P +}$

$\overline{+ T_g^2 \operatorname{Im}^2 P} = \sqrt{1 + 2T_g \operatorname{Re} P + |p|^2 T_g^2}$

$|z| < 1$

$|z|^2 < 1 \qquad \cancel{1} + 2T_g \operatorname{Re} P + |p|^2 T_g < \cancel{1}$

$2T_y \operatorname{Re} P + |p|^2 T_g < 0 \; | : T_g$

$T_g |p|^2 < -2 \operatorname{Re} P$

$\boxed{T_g < \frac{-2 \operatorname{Re} P}{|p|^2}} \qquad T_g < T_{g\,кр.}$

Метод Эйлера - назад

ЭИ

Неявный метод Эйлера

$x(t) = \frac{y(t) - y(t - T_g)}{T_g}$

$x(t)T_g = y(t) - y(t-T_g)|_{t=nT_g}$; $\times T_g$

$x[n]\,T_g = y[n] - y[n-1]$

$y[n] - y[n-1] = x[n]\cdot T_g$

$\tilde{y}(z)(1-z^{-1}) = T_g\,\tilde{x}(z)$

$H(z) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{T_g}{1-z^{-1}}$

$\frac{1}{p} = \frac{T_g}{1-z^{-1}}$ $\boxed{p = \frac{1-z^{-1}}{T_g}}$

$z = \frac{1}{1-pT_g}$ $|z| < 1$

$\left|\frac{1}{1-pT_g}\right| < 1$ $|1-pT_g| > 1$

$|1-pT_g|^2 > 1$

$\mathrm{Re}\,p + i\,\mathrm{Im}\,p = p$

$(1-T_g\,\mathrm{Re}\,P)^2 + (T_g\,\mathrm{Im}\,P)^2 > 1$ — Тождеств. $\mathrm{Re}P < 0$

Метод устойчив глобально

<u>Метод Трапеций</u>

<u>(Метод Билинейного Z-преобр)</u>

ЭВ (БZ) ЭН

$x(t) = \frac{y(t+T_g) - y(t)}{T_g}$ $x(t) = \frac{y(t) - y(t-T_g)}{T_g}$

$$x(t-T_g) = \frac{y(t)-y(t-T_g)}{T_g} \qquad \text{ЭИ}$$

$$\times \frac{1}{2} \qquad\qquad \times \frac{1}{2}$$

$$+$$

$$\frac{1}{2}\left(x(t) + x(t-T_g)\right) = \frac{y(t)-y(t-T_g)}{T_g} \quad \Big| \; t = nT_g, \; \times T_g$$

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{2} T_g \left(x[n] + x[n-1]\right)$$

$$\tilde{y}(z)\left(1 - z^{-1}\right) = \frac{T_g}{2}\tilde{x}(z)\left(1 + z^{-1}\right)$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{T_g}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\boxed{p = \frac{2}{T_g}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$pT_g\left(1 + z^{-1}\right) = 2\left(1 - z^{-1}\right)$$

$$pT_g + pT_g z^{-1} = 2 - 2z^{-1}$$

$$\left(2 + pT_g\right) z^{-1} = 2 - pT_g$$

$$\boxed{z = \frac{2 + pT_g}{2 - pT_g}}$$

Метод глоб. устойчив

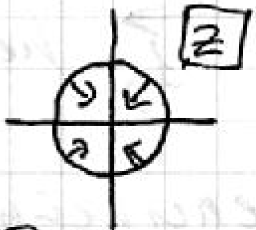
Лекция 20.04

$$p = \frac{2}{T_g}\,\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_g}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$z = \frac{2+pT_g}{2-pT_g}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\,P < 0}$$

$$|z| < 1$$



$$\left|\frac{2+\mathrm{Re}\,pT_g + j\,\mathrm{Im}\,p\,T_g}{2-\mathrm{Re}\,pT_g - j\,\mathrm{Im}\,pT_g}\right| < 0$$

$$\boxed{\frac{(2+\mathrm{Re}\,pT_g)^2 + (\mathrm{Im}\,pT_g)^2}{(2-\mathrm{Re}\,pT_g)^2 + (\mathrm{Im}\,pT_g)^2} < 1}$$

Выполн. при $\mathrm{Re}\,p < 0$

Трансформация частотной оси при методе БZ

$$p = j\omega_a = j2\pi f_a$$

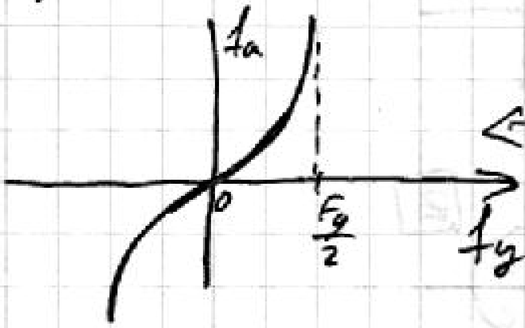
$$z = e^{j2\pi f_g T_g} = e^{j\omega_g T_g}$$

$$e^{j\omega_0 T_g} = \frac{2+j\omega_a T_g}{2-j\omega_a T_g}$$

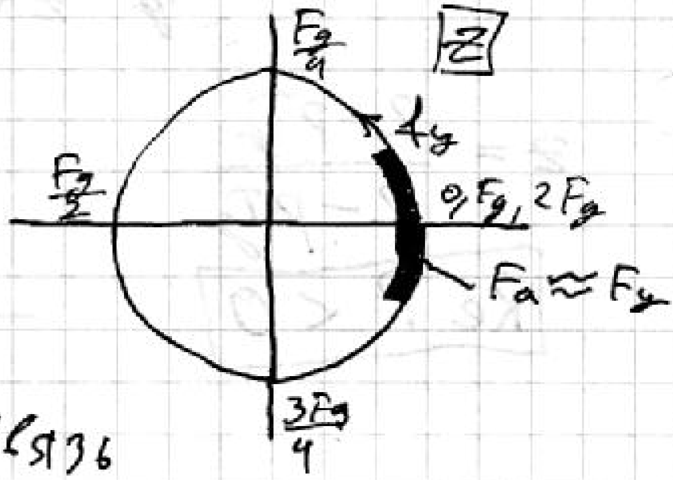
$$\omega_a = \frac{2}{T_g} tg\left(\frac{\omega_y T_g}{2}\right)$$

$$f_a = \frac{1}{\pi T_g} tg\left(\pi f_y T_g\right)$$

$$tg\left(0 \ldots \frac{\pi}{2}\right) = \left(0 \ldots +\infty\right)$$



← связь нелинейна



Т.к. связь нелинейна ($f_a \neq k \cdot f_y$), то происх. трансформ. оси.

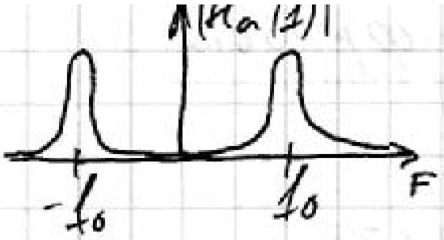
$f_y \to 0 \quad f_y \approx 0$

$tg\, x \approx x \quad , x \approx 0$

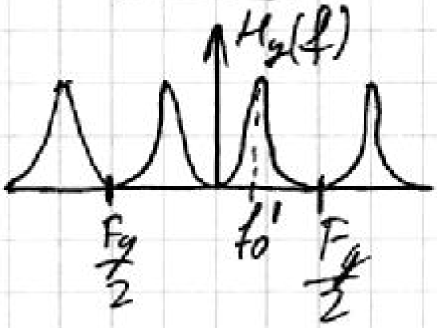
$f_y \to 0 \quad f_a \approx f_y$

$F_y = \frac{F_g}{4} \qquad f_a \approx 1{,}25 f_y$

	ИИХ	БZ
1) Принцип	$h[n] = T_g h(nT_g)$	$p = \frac{2}{T_g} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
2) Преобр. ЧХ	$H(f_y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(f-kF_g)$	$f_a = \frac{1}{\pi T_g} tg(\pi f_a T_g)$
3) Св. с. ф-ия	$z = e^{pT_g}$	ИХ: $Z^{-1}\{\tilde{H}(z)\}$

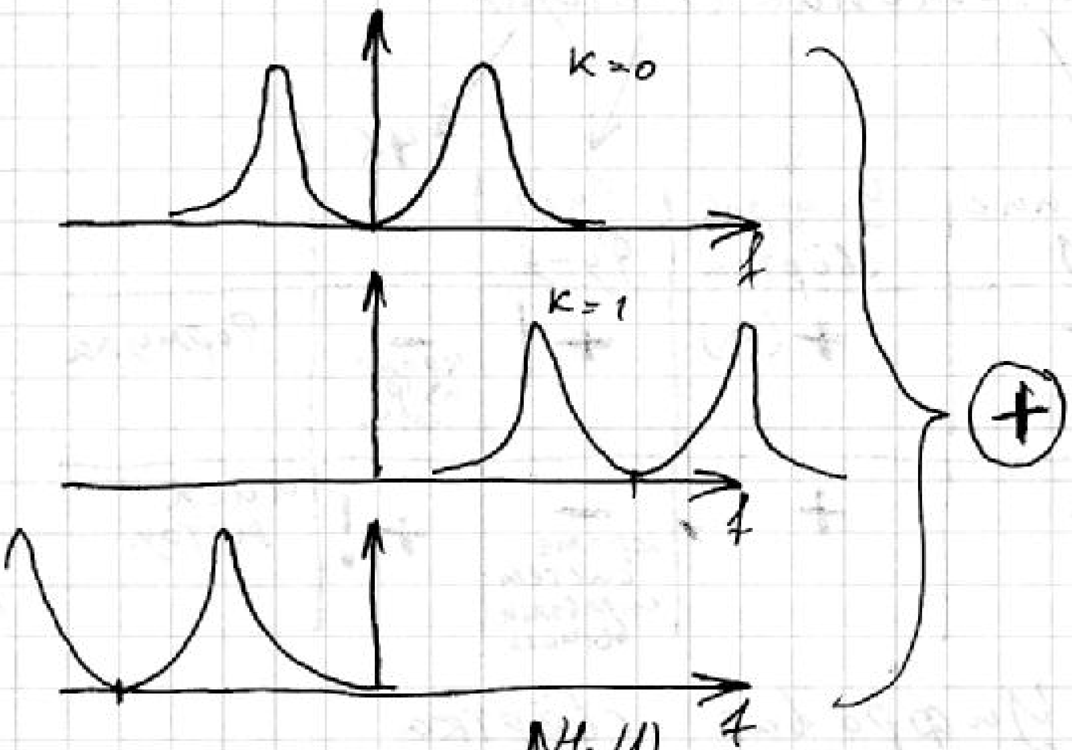


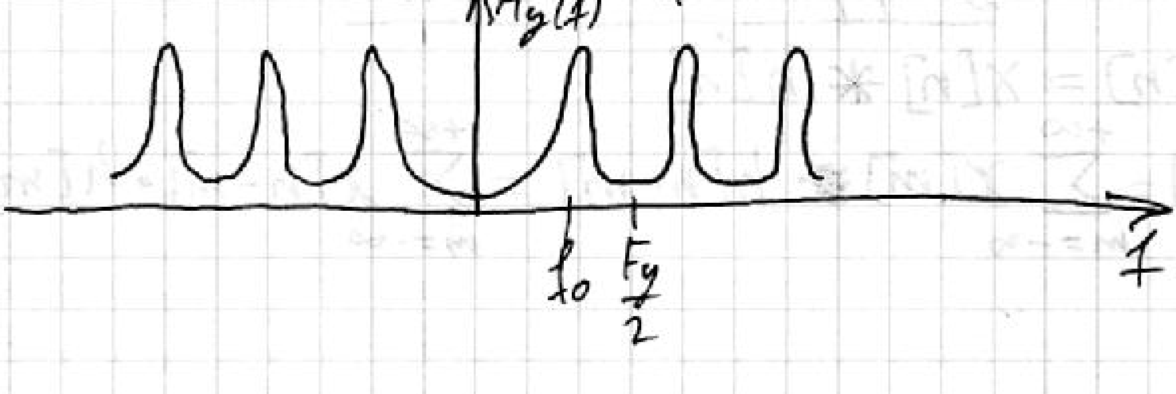
БZ:



$\boxed{f_0' < f_0}$ $\quad |f| < \frac{F_g}{2} \to$ ok!

ИИХ





Прохождение цифровых сигналов через цифровые фильтры

$$x[n] \to \boxed{ЦФ} \to y[n]$$

Дано: $x[n]$, ЦФ

Найти: $y[n]$

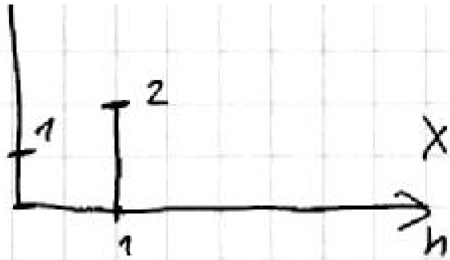
Решение (Методы)

По схеме	Решение РУ	Цифров. свёртка	Сист. ф-я	ЧХ	
−	+	+ (сп)	+ !	− кроме избр. случ.	Формула
+	+	+	− кроме систем символьн. вычисл.	+ !	Числ. метод.

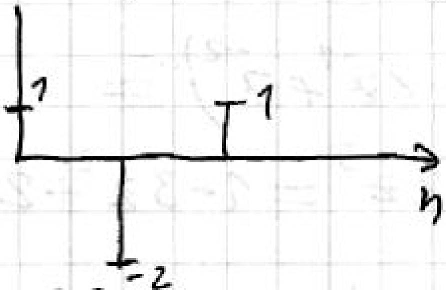
Цифровая свёртка

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

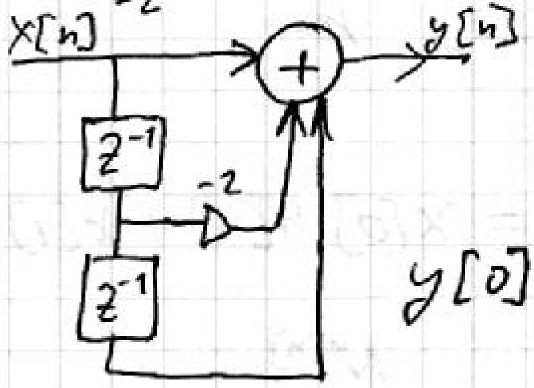
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m] \cdot h[m]$$



$x = \{1, 2\}$



$h = \{1, -2, 1\}$



$$y[n] = \sum_{m=0}^{1} x[m] \cdot h[n-m]$$

↑уточнение пределов

$$y[0] = x[0] \cdot h[0-0] + x[1] \cdot h[0-1] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$y[1] = x[0] \cdot h[1-0] + x[1]\, h[1-1] = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$$

$$y[2] = x[0]\, h[2-0] + x[1]\, h[2-1] = 1 \cdot (1) + 2 \cdot (-2) = -3$$

$$y[3] = x[0]\, h[3-0] + x[1]\, h[3-1] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$y[4] = x[0]\, h[4] + x[1]\, h[3] = 0$$

$y = \{1, 0, -3, 2\}$

$Lenght\{x\} = N_x \quad Lenght\{h\} = N_h$

$Lenght\{y\} = N_y = N_x + N_h - 1$

Сравним с СФ

$\tilde{X}(z) = 1 + 2z^{-1}$

$\tilde{H}(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$

$\tilde{Y}(z) = \tilde{X}(z)\tilde{H}(z) = (1+2z^{-1})(1-2z^{-1}+z^{-2}) =$

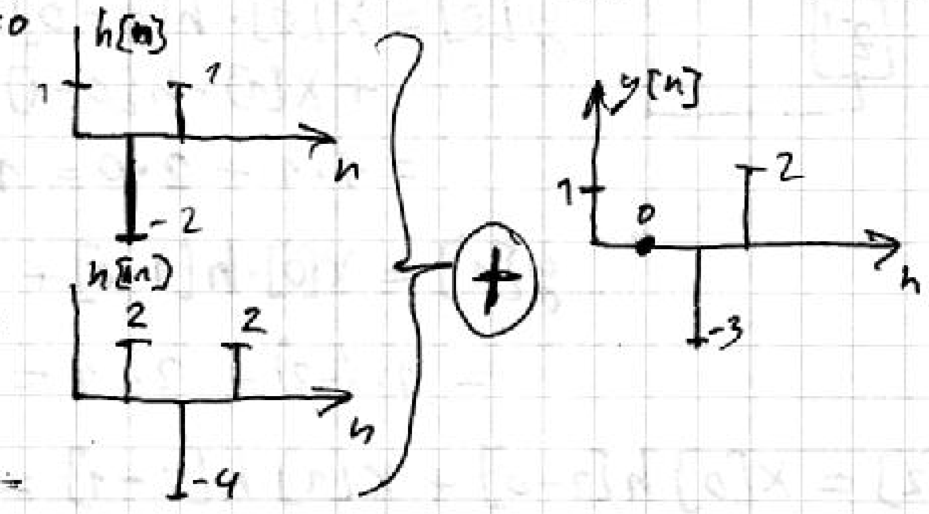
$= 1 + \cancel{2z^{-1}} - \cancel{2z^{-1}} - 4z^{-2} + z^{-2} + 2z^{-3} = 1 - 3z^{-2} + 2z^{-3}$

↑ Вычислительный взгляд на свёртку

$y[n] = \sum_{m=0}^{1} x[m]\, h[n-m] = x[0]\, h[n] + x[1]\, h[n-1$

$x[0] \rightarrow$

$x[1] \rightarrow$



Метод лент

$x[n]$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |

$h[n-m]$ | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$n=0$ 0 0 1 0 0 0 → 1 $(n=0)$

$n=1$ | 0 | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 |

0 0 -2 2 0 0 → 0 $(n=1)$

$n=2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | 1 | 0 |

0 0 1 -4 0 0 → -3 $(n=2)$

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} = x[0]\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ 0 \end{bmatrix} + x[1]\begin{bmatrix} 0 \\ h[0] \\ h[1] \\ h[2] \end{bmatrix} =$$

$$= \overset{H}{\begin{bmatrix} h[0] & 0 \\ h[1] & h[0] \\ h[2] & h[1] \\ 0 & h[2] \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix}} = \overset{Y}{\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix}}$$

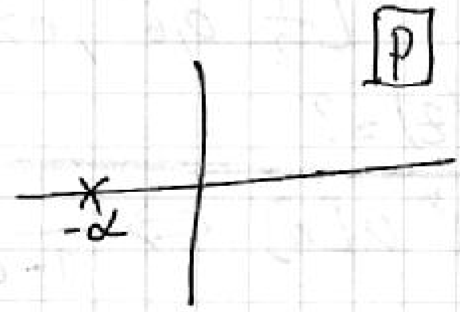
$$H \cdot X = Y$$

↑ изв, а ост. частично изв
— обращение свёртки.

Примеры синтеза УФ

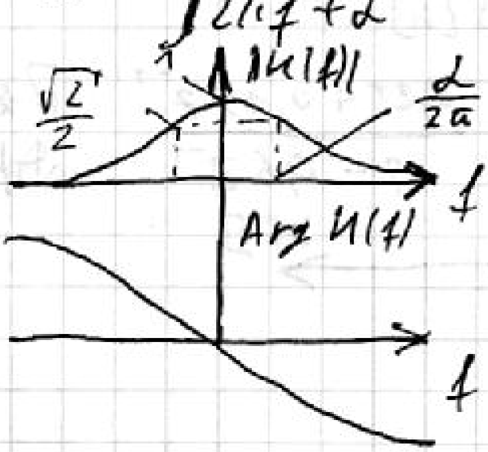
ФНЧ-1
(RC-цепь)

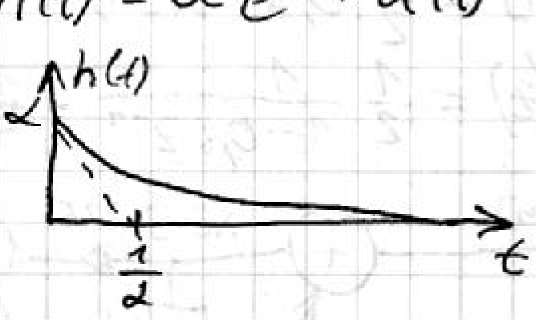
$$H(p) = \frac{\alpha}{p+\alpha}$$



$$H(f) = \frac{\alpha}{j2\pi f+\alpha}$$

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} \cdot u(t)$$





ИИХ

$$T_g = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1/2}{2}$$

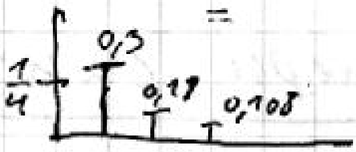
$$h[n] = T_g\, h(n T_g)$$

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{\alpha \cdot T_g}{2}, & n = 0 \\ \alpha T_g \cdot e^{-\alpha n T_g} & n > 0 \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1/4 & n = 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}}, & n > 0 \end{cases}$$

$$e^{-1} = 0{,}37$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = 0 \\ \frac{1}{2}\, 0{,}6^{n}, & n > 0 \end{cases}$$

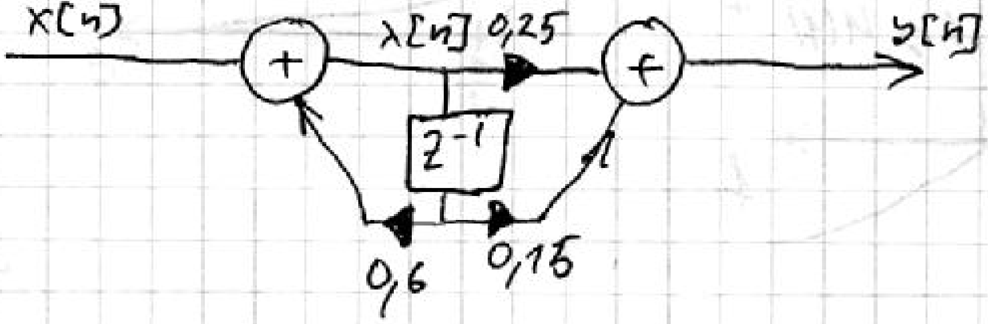


$$\tilde{H}(z) = ?$$

$$\boxed{a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}}}$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\, 0{,}6^{n} u[n] - \frac{1}{4} \delta[n]$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 0{,}6 z^{-1}} - \frac{1}{4} = \frac{0{,}25 + 0{,}15 z^{-1}}{1 - 0{,}6 z^{-1}}$$ П к тр. ФНП



$$H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f T_д}} = H(f)$$

$$H(f) = \frac{0{,}25 + 0{,}15\,e^{j2\pi f T_д}}{1 - 0{,}6\,e^{j2\pi f T_д}}$$ — построить в маткаде

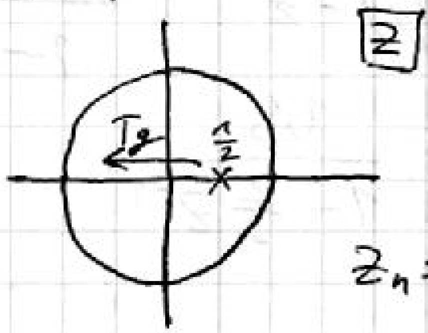
<u>ЭВ</u>

$$p = \frac{z-1}{T_д}$$

$$H(p)\Big|_{p=\frac{z-1}{T_д}} = \frac{\alpha}{\frac{z-1}{T_д} + \alpha} = \frac{\alpha T_д}{z - 1 + \alpha T_д} =$$

$$= \frac{\alpha T_д z^{-1}}{1 - (1 - \alpha T_д) z^{-1}} = \tilde{H}(z)$$

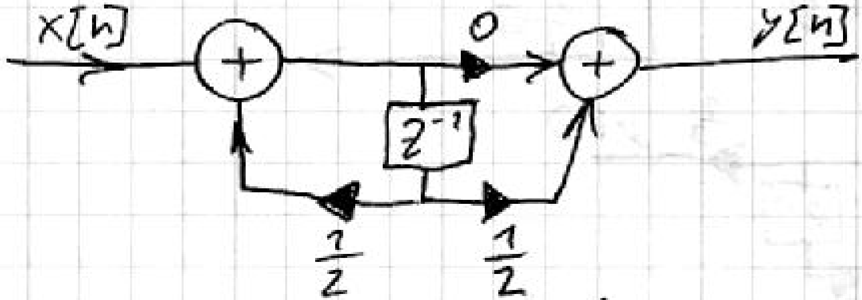
$$\tilde{H}(z) = \frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

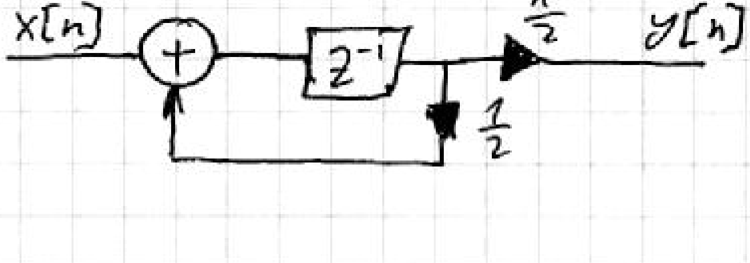


$$z_п = 1 + p_п T_д$$

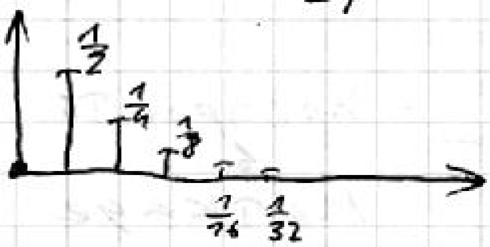
Если $T_д = 2/\alpha$ $z_п = -1$

$T_д > \frac{2}{\alpha}$ $z_п < -1$ $|z_п| > 1$





$$h[n] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$



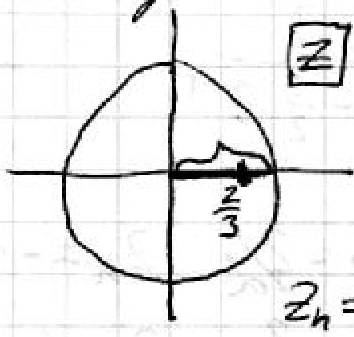
Э.Н.

$$p = \frac{z-1}{z\,T_g}$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{\alpha}{\frac{z-1}{z\,T_g}+\alpha} = \frac{\alpha z T_g}{z-1+\alpha z T_g} =$$

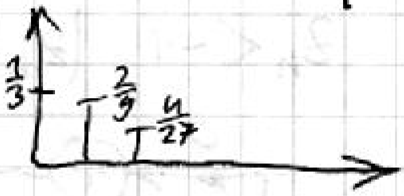
$$= \frac{\alpha T_g}{(1+\alpha T_g) - z^{-1}} = \frac{\frac{\alpha T_g}{1+\alpha T_g}}{1-\frac{1}{1+\alpha T_g} z^{-1}}$$

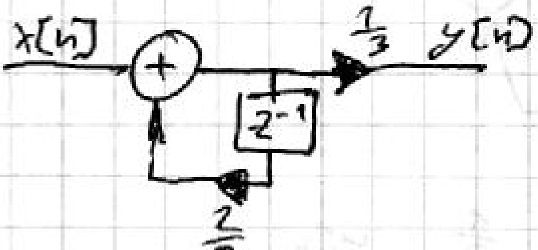
$$\tilde{H}(z) = \frac{1/3}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$



$$z_n = \frac{1}{1-p_n T_g}$$

$$h[n] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$



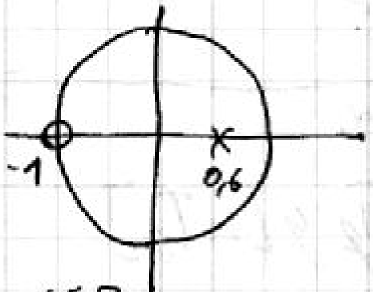


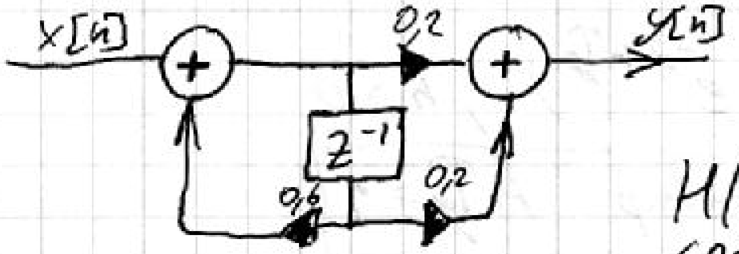
Dz

$$H(p)\Big|_{p=\frac{2}{T_g}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\alpha}{\frac{2}{T_g}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha T_g(1+z^{-1})}{2-2z^{-1}+\alpha T_g(1+z^{-1})} = \frac{\alpha T_g}{2+\alpha T_g}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{2-\alpha T_g}{2+\alpha T_g}z^{-1}}$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{0{,}2+0{,}2z^{-1}}{1-0{,}6z^{-1}}$$





$H(f) = ?$
сравн с $H(f)$ с иих

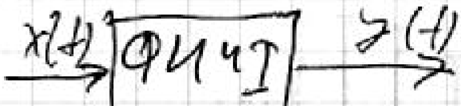
Лекция 27.04

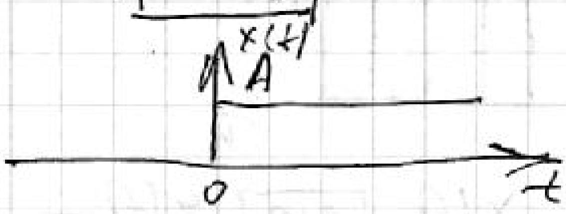
$\boxed{\text{Пересдача 28.04 на каф.}}$

$$H(p) = \frac{\alpha}{p+\alpha}$$

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t}\cdot u(t)$$

$$x(t) = A\,u(t)$$





$$X(p) = \frac{A}{p+0} \qquad Y(p) = X(p)\cdot K(p)$$

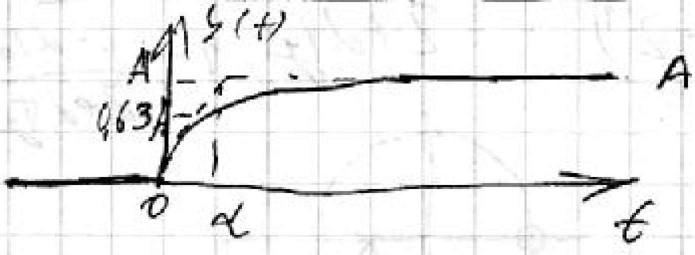
$$Y(p) = \frac{A\alpha}{p(p+\alpha)} = \frac{B_1}{p} + \frac{B_2}{p+\alpha}$$

$$B_1 = \frac{A\alpha}{p+\alpha}\Big|_{p=0} = A \qquad B_2 = \frac{A\alpha}{p}\Big|_{p=-\alpha} = -A$$

$$y(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p+\alpha}$$

$$y(t) = A\cdot u(t) - Ae^{-\alpha t}u(t) = A(1-e^{-\alpha t})u(t) - y(t)$$

$$\boxed{\text{Самостоят. решить методом свёртки}}$$



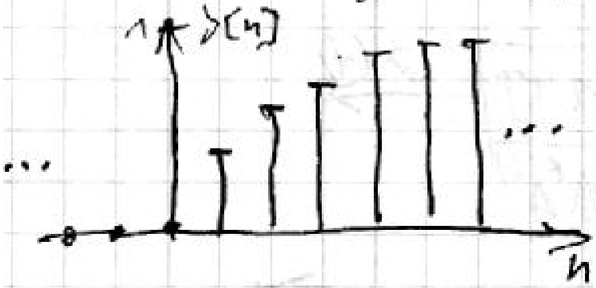
$$y[n] = T_g\, y[nT_g] \qquad T_g = \frac{1}{2\alpha}$$

$$y[n] = AT_g\left(1 - e^{-\alpha n T_g}\right), \ n \geq 0$$

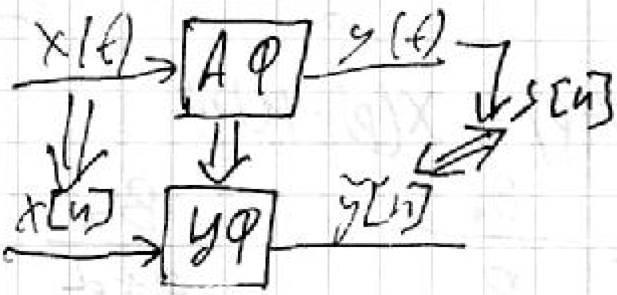
$$\boxed{A = \frac{1}{T_g} \Leftarrow \text{Пример} \quad AT_g = 1}$$

$$y[n] = 1 - e^{-\frac{n}{2}}, \ n \geq 0$$

$$y[n<0] = 0$$

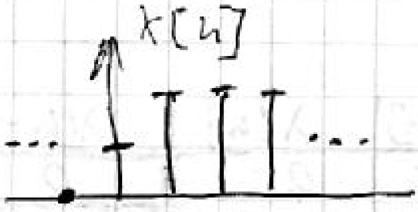


n	y[n]
0	0
1	0,39
2	0,63
3	0,78
4	0,87
5	0,92
6	0,95
7	

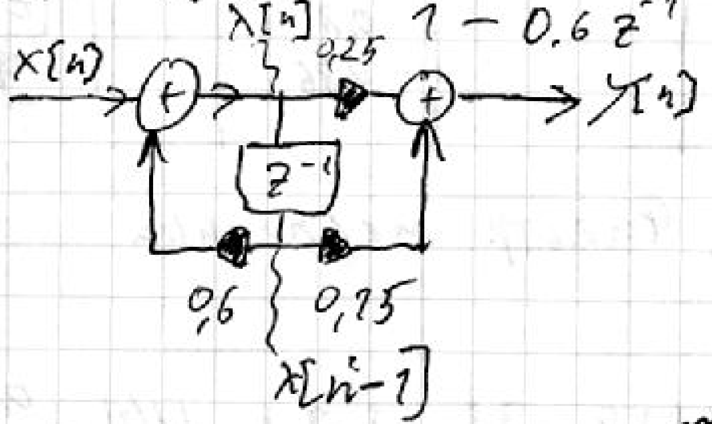


$x[n] = T_g\, x[nT_g]$

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ \frac{1}{2} & n=0 \\ 1 & n>0 \end{cases}$$



ИИХ $\quad H(z) = \dfrac{0{,}25 + 0{,}15 z^{-1}}{1 - 0.6 z^{-1}}$



нулевое состояние

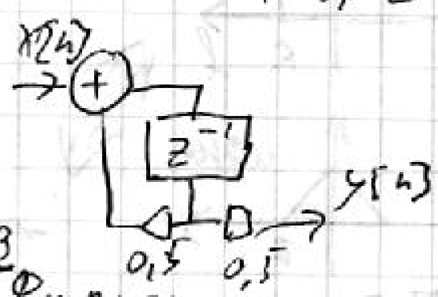
n	x[n]	λ[n]	λ[n-1]	y[n]	
0	0,5	0,5	$\boxed{0}$	0,125	
1	1	1,3	0.5	0.4	$1{,}3 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}5 \cdot 0{,}15$
2	1	1,78	1,3	0,64	$1{,}78 \cdot \frac{1}{4} + 1{,}3 \cdot 0{,}15$
3	1	2.07	1.78	0.78	
4	1		2.07	0.87	
5	1			0,92	
6	1			0,95	

ИИХ: хорошо повт. аналог. цепи, но в некот. точках имеет особенности (n=0 в данном примере)

ЭВ

n	X[n]	λ[n]	λ[n-1]	y[n]
0	0,5	0,5	$\boxed{0}$	0
1	1	1,25	0,5	0,25
2	1	1,625	1,25	0,625
3	1			0,81
4	1			0,9
5	1			0,95
6	1			
7	1			

$H(z) = \dfrac{0.5 z^{-1}}{1 - 0{,}5 z^{-1}}$

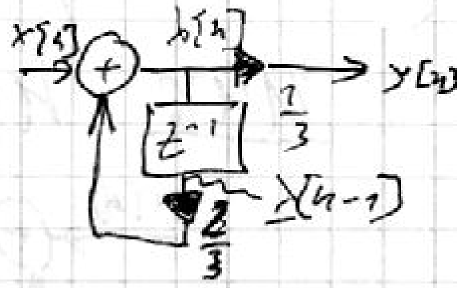


ЭВ фильтр спешит

ЭИ

n	x[n]	λ[n]	λ[n-1]	y[n]
0	0,5	0,5	$\boxed{0}$	0,17
1	1	1,33	0,5	0.44
2	1	1.89	1,33	0.56
3	1			0,7
4	1			0,8
5	1			0.86
6	1			

$$H(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

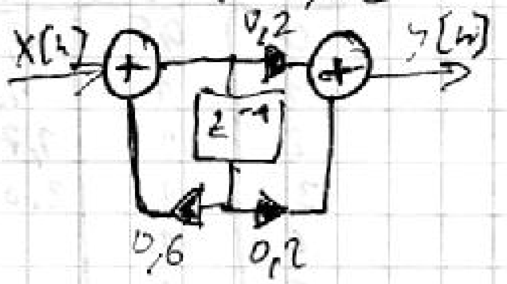


ЭИ: Ошибка в 0. Фильтр. медленный

БZ

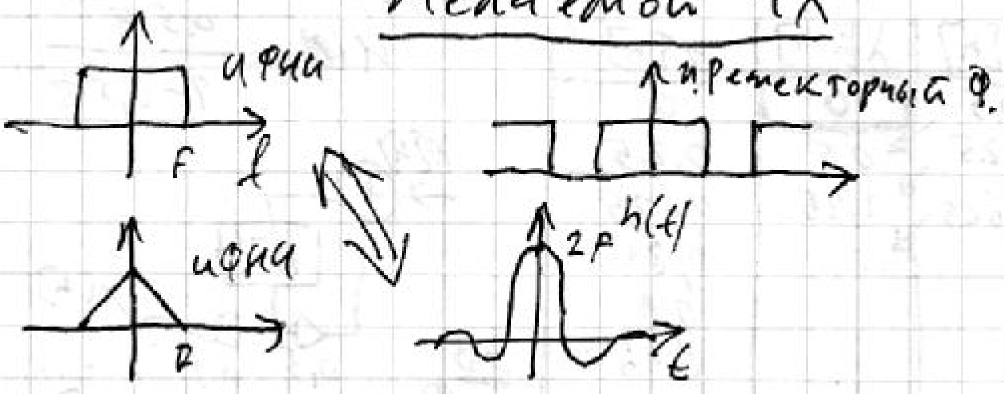
n	x[n]	λ[n]	λ[n-1]	y[n]
0	0,5	0,5	$\boxed{0}$	0,1
1	1	1,3	0,5	0,36
2	1	1,78	1,3	0,6
3	1		1,78	0,77
4	1			0,86
5	1			0,92
6	1			0,95

$$H(z) = \frac{0,2+0,2z^{-1}}{1-0,6z^{-1}}$$



В 0 ошибка, но наименьшая

Синтез ЦФ по желаемой ЧХ



ИФ → $f \to \infty$ $H(f) \to 0$ (I)
↘ $f \to \infty$ $H(f) \to const$ (II)

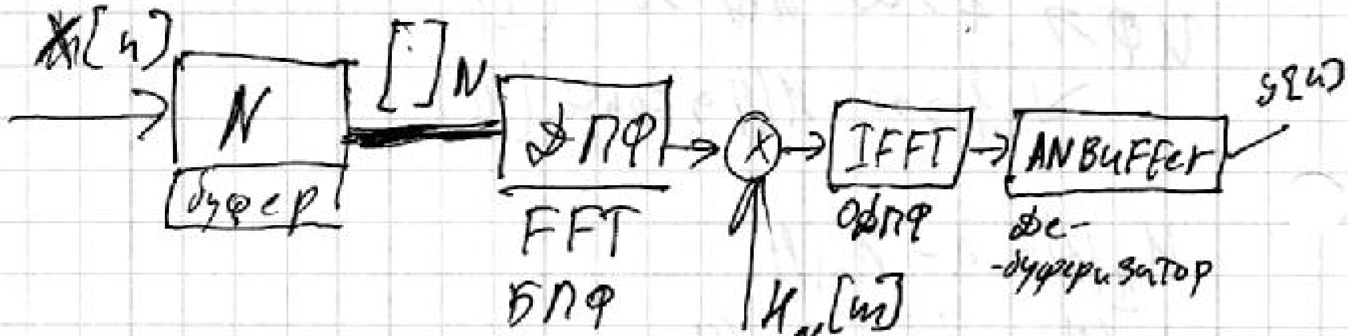
$H_{II}(f) = 1 - H_{I}(f)$
$h_{II}(t) = \delta(t) - h_{I}(t)$

Цифровой эквивалент
идеального фильтра

ИИХ (мод) | ЦФХ | КИХ реализация (ИИХ мод.) / Real-Time

1) ИИХ
$H(f) \xrightarrow{\text{ОПФ}} h(t) = T_g\, h[nT_g]$
$h[n] \xrightarrow[\text{повт.}]{\text{период}} h_N[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n - mN]$
$h_N[n] = \underbrace{(\ldots\ldots)}_{N \text{ знач.}} \xrightarrow{\text{ДПФ}} H_N[m]$
$x[n] \xrightarrow{\text{ДПФ}} X_N[m]$
$y[n] \xrightarrow{\text{ДПФ}} X_N[m]\, H_N(m)$

1) Фильтр нельзя реализовать в виде схемы
2) Для ДПФ нужно накопить N знач. сигн.

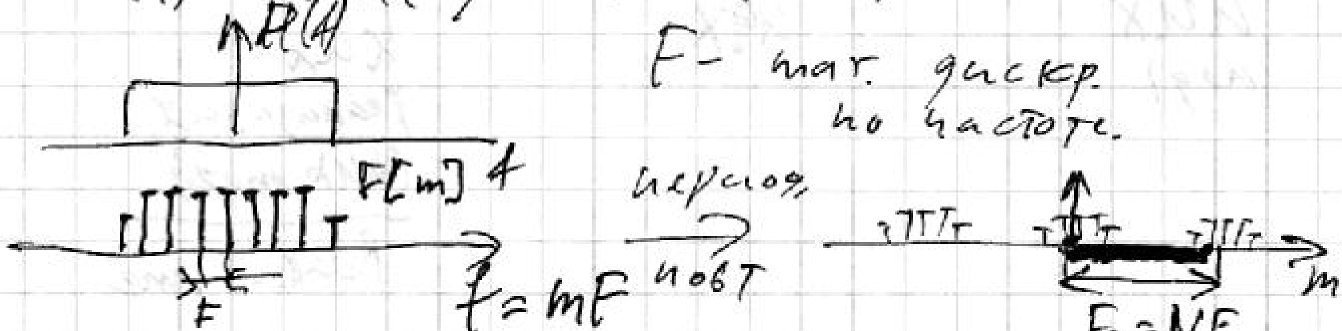


$\boxed{\min\ \text{зад}\ N}$ Восс. совпад. АЧХ

2) ИЧХ

$H(f) \rightarrow H(m) = F \cdot H(m \cdot F)$

F – шаг. дискр. по частоте.



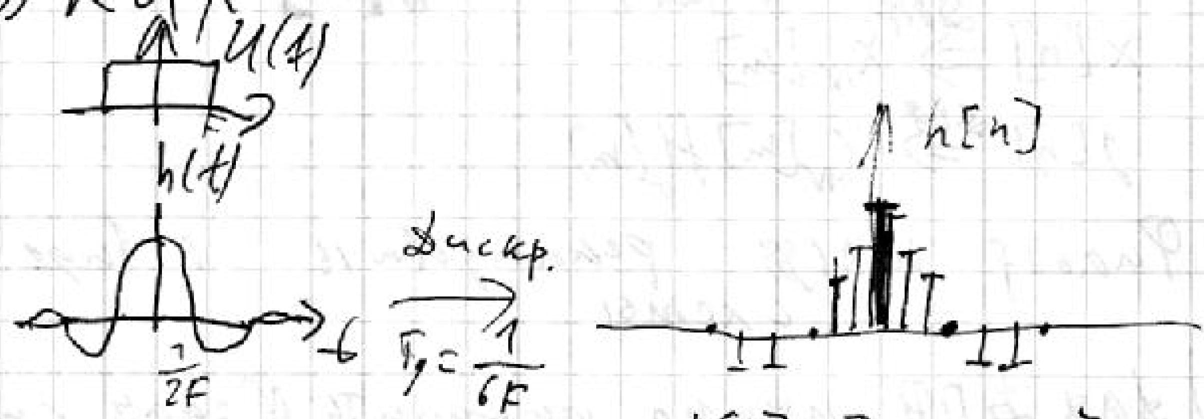
0 ... N-1

$H_N[m]$

1) Исслед. сделать схему

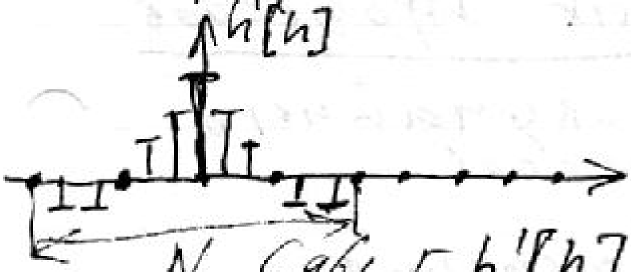
2) Полес качеств. ЧХ

3) КИХ



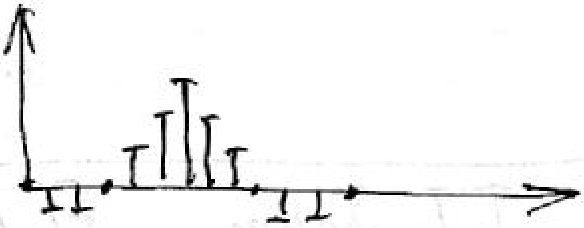
$h[n] = T_д\, h[nT_д]$

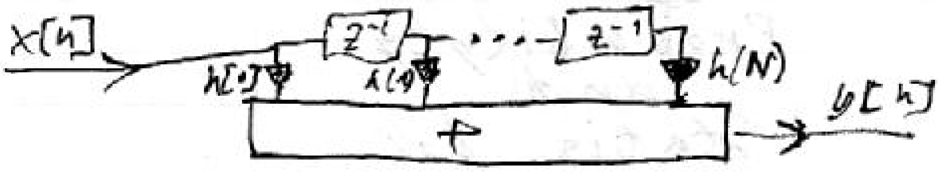
Ограничим h[n]



Сдвиг h'[n]

$h''[n] = h'[n] + \frac{N}{2}$





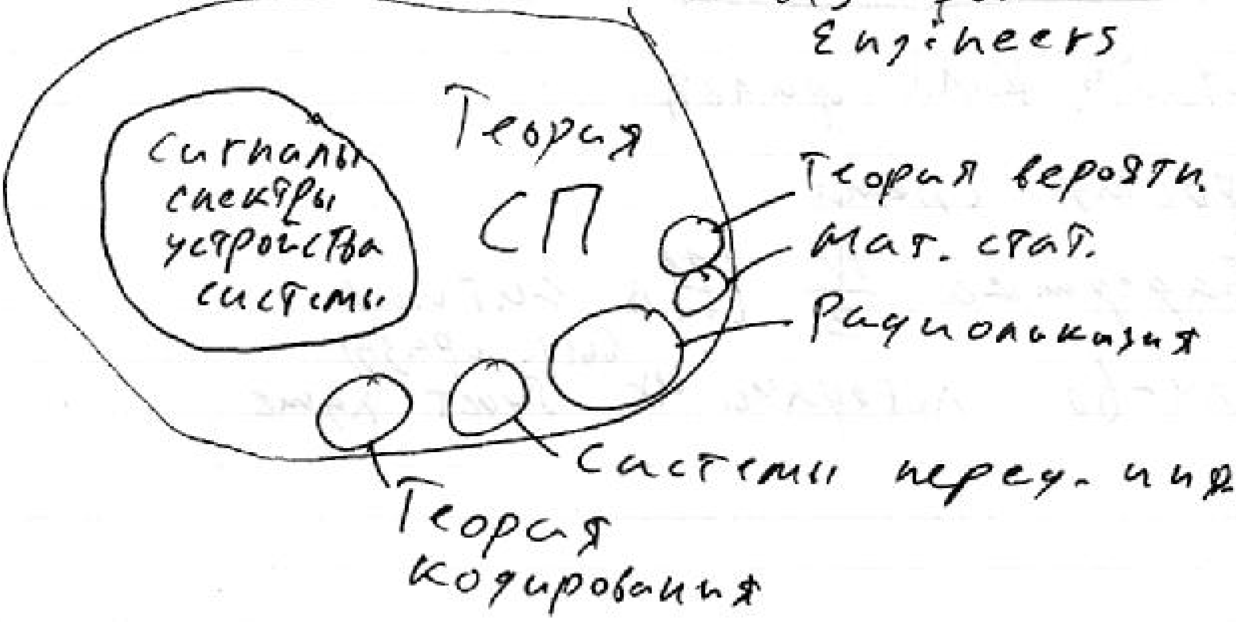
1) Устойч. КИХ фильтр.
2) Простая схема
3) Задержка $\frac{N}{2}$ (Но сигнал выч. сразу)
4) Кач-во передачи АЧХ будет хуже

Введение

в теорию случайных процессов

Левин Б.Р. Теория случайных процессов и её применение в радиотехнике

T.T. Soong Fundamentals of Probabilyty and Statis for Engineers



Определение

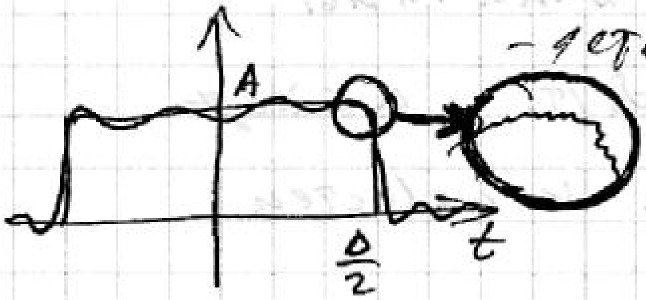
Процесс – это развитие явления во времени.

(человек получ. информацию о процессе путём наблюдения и измерения его проявлений)

Если известны все закономерности измен. процесса, то процесс наз. <u>детерминированным</u>

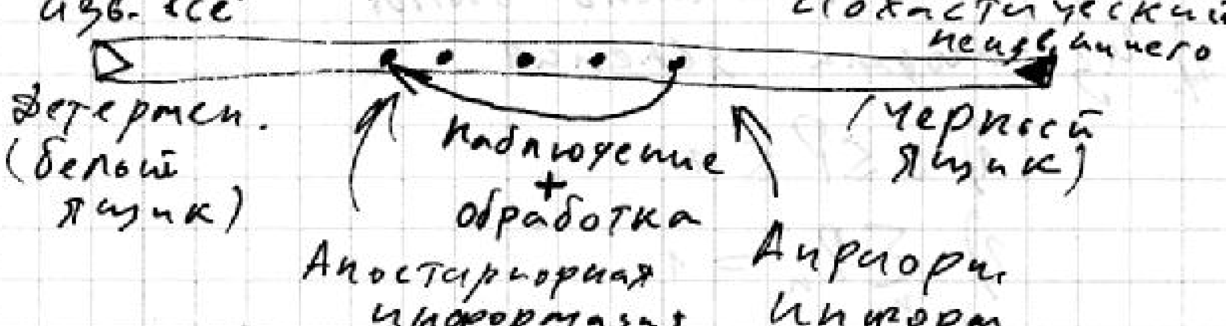
Причины отсутств. детерм. процессов

1) Неполная познаваемость мира



Модели часто создаются на основе детерминированных процессов.

Если знания о процессе неполные, то такой процесс наз. случайным (вероятностный / стохастический)



Если процесс явл. детерминированным, то при его наблюд. никакой <u>новой</u> информ. получ. не удастся

Наблюд. детерм. проц. не дает никакой информ

Цель наблюд.

Задача обнаружения

Задача распознования

Задача измерения

Случ. события и величины

Случ. событ. – событ., исход которого заранее неизвестен

A

$$\Omega = \{ \underbrace{A_1, A_2, A_3 \ldots A_N}_{N\text{-исходов}} \}$$

$P_1, P_2, P_3 \ldots P_N$ – вероятность

1) $P \approx P^* = \frac{m}{N}$ m – благопр. исход, N – число опытов.

2) Из модели явления

1) $0 \le P \le 1$

2) $\sum_n P_n = 1$

3) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

A_1 и A_2 – несовмест.

<u>Случайные величины</u>

ξ – случ. величина (знач. кот. неизвестно)

$F(x) = P(\xi \le x)$ – закон распред. (ф-я вероятности)

$F(-\infty) = 0$ $F(x)$ – не убывает

$F(+\infty) = 1$

Человеку более интересно

каким знач. чаще всего

прин. величина ξ

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du$$

$$dF(x) = p(x)\,dx \qquad 1)\ P(x) \geqslant 0$$

$$\Delta F(x) \approx p(x)\,\Delta x \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dx = 1$$

$[\xi] = B$

$[x] = B$

$$[P, F(x)] = [\text{б}/\text{р}]$$

$$[P(x)] = \frac{1}{B} = B^{-1}$$

$$P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)\,dx$$

<u>Хар. СВ</u>

Моменты СВ

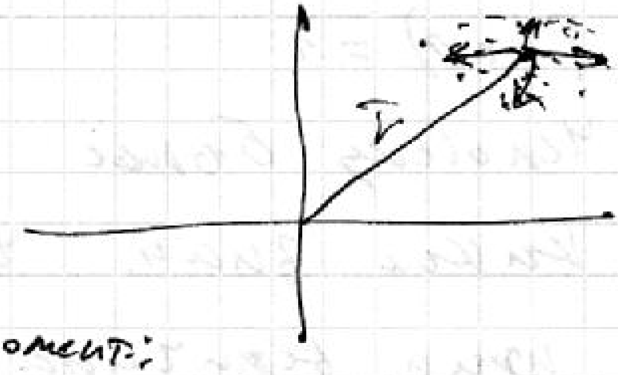
Нач. моменты: $$V_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx$$

$$V_1 = m_x = \overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,dx$$ –

– мат. ожидание, ср. знач.

$$\nu_2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty} x^2 p(x) dx$$

ср. квадрат



$$\{\underbrace{\xi - \bar{x}}\} = 0$$

отклонение
(девиация)

центр. моменты:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^k p(x) dx$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 p(x) dx$$ - дисперсия средн. квадр. отклон.

показ группир. вокруг среднего

$$D_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$ - дисперсия средний квадрат минус кв. среднего

$[D_x] = B^2$ $\sqrt{D_x} = G_x$ - среднеквадр. откл.

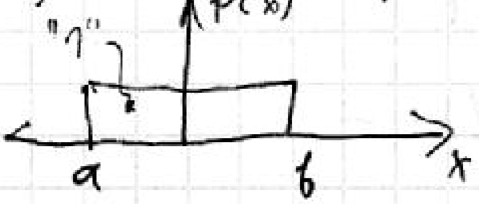
$[G_x] = B$

$(D_x \geq 0 \quad G_x \geq 0)$

Законы распределения СВ

Классифиц. по $p(x)$

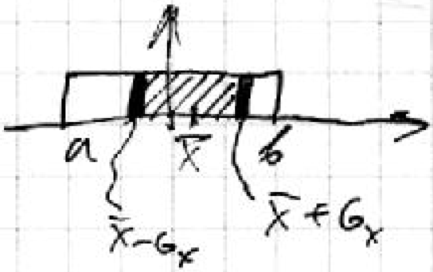
1) Равновероятный (равномерный)



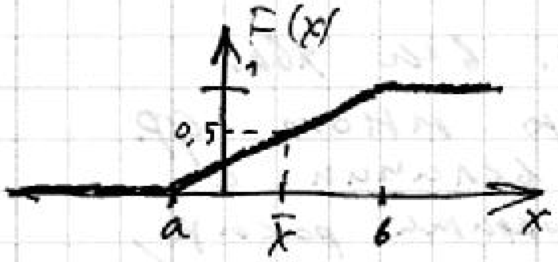
$$p(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{ост. } x \end{cases}$$

a, b - опр. закон. $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{b-a}{2} \Big/ \sqrt{3} \approx 0{,}6\,\frac{(b-a)}{2}$$



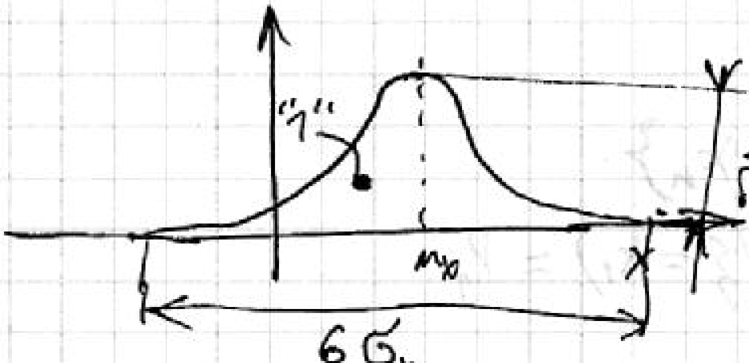
$$P(\bar{x}-\sigma_x < \xi < \bar{x}+\sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}6$$



Гаусовский закон (Нормальный)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

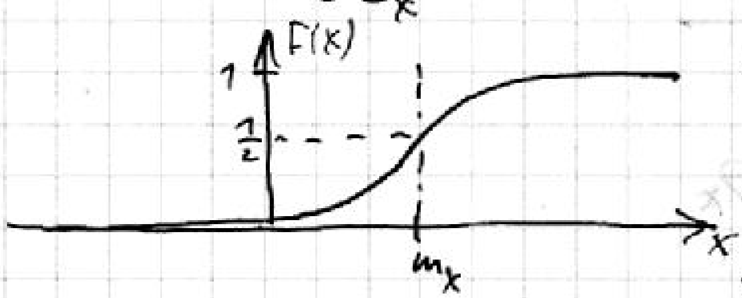
σ_x, m_x - параметры и хар.



$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}$

$m_x \updownarrow \Rightarrow \leftrightarrow$

$\sigma_x \updownarrow$ сжатие и растяж. по гор. и верт.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{(u-m_x)^2}{2\sigma_x}\right) du$$

$\int e^{-u^2} du$ - не берётся

Ф. Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)$$

$$\boxed{\Phi(-x) = -\Phi(x)}$$

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b p(x)\,dx =$$

$$= F(b) - F(a) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right)$$

$$\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \ \dots \ \xi_N$$

$\Psi = \sum\limits_n \xi_N$ – если случ. вел. явл. совокупностью множ. др. независ. величин с люб. законами распр., то её закон стр. к гауссовскому.

Дискретная случ. величина.

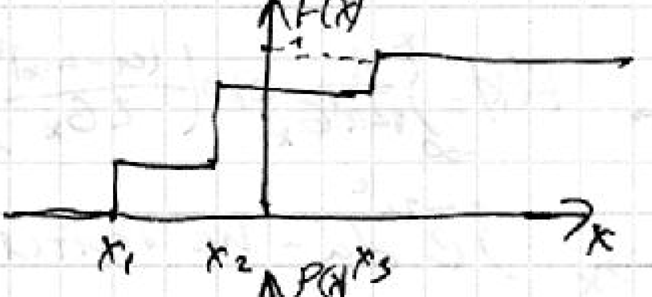
Если СВ непрерывная

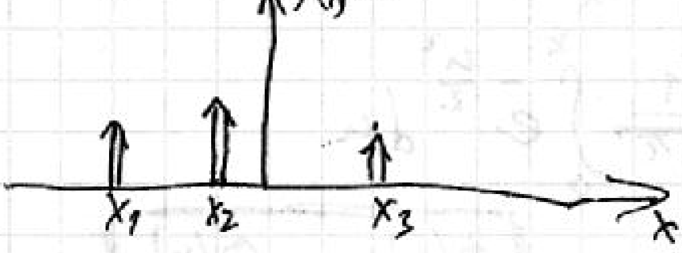
$$P(\xi = y) = 0$$

ξ – дискретная?

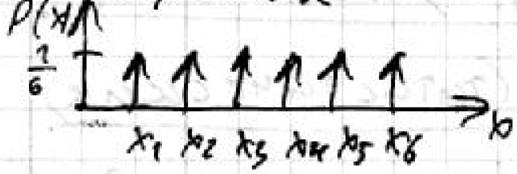
$$\xi = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$$

$$P(\xi = x_1) \neq 0, \quad P(\xi = x_1) = P_1$$





Пр. кубик



$$\bar{x} = m_x = \sum_n x_n P_n$$

$$\bar{x} = 3,5$$

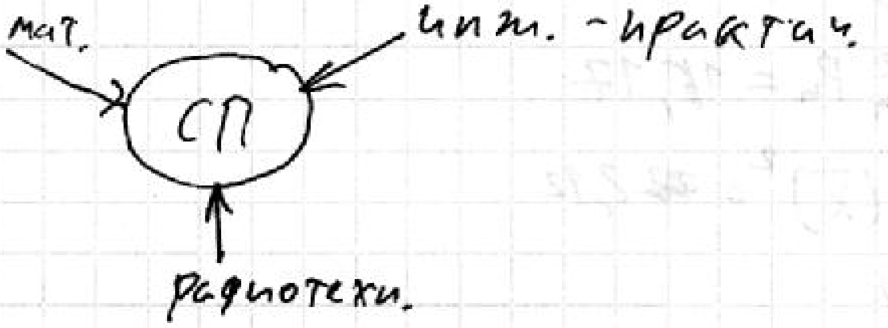
$$\overline{x^2} = \sum_n x_n^2 P_n = 15,17$$

$$D_x = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 2,92$$

$$\sigma_x = 1,71$$

Лекция 11.05 Случайные процессы (СП)

Свойства СП. Статистические, временные и частотные хар. СП



Случайные процессы

Их реализации

Def: Эксперимент м.б. повторён

Рез. каждого эксп.

$$\xi(t) = \{\xi^1(t), \xi^2(t), \dots, \xi^N(t)\}$$

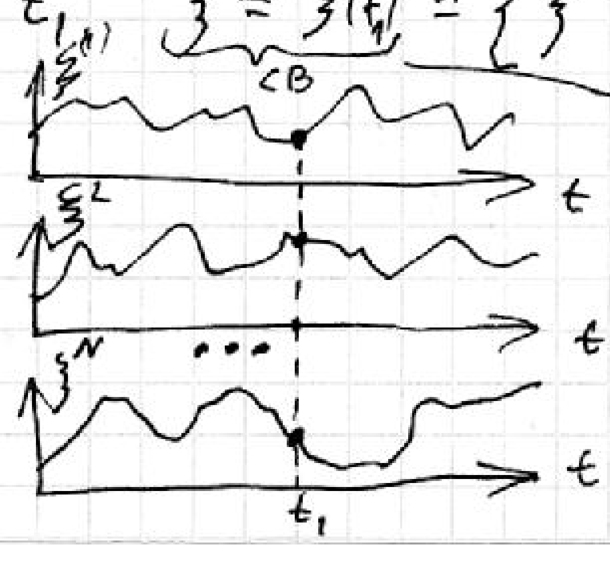
$N \to \infty$

знания о СП ↑

Совокупность всех реализаций СП наз. Ансамблем

$$t_1 \quad \underbrace{\xi = \xi(t_1)}_{СВ} = \{\xi^{(1)}(t_1), \xi^{(2)}(t_1), \dots, \xi^{(N)}(t_1)\} \to P(x) \leftarrow \xi$$

плотн. вероятн.



Знач. СП в фикс. момент време- - случ. величина

$\xi(t_1) \doteq p(x,t_1)$

СП $\xi(t) \to P(x,t)$ завис. от t

По известной или измер. $P(x,t)$ можно всегда опр. все остальные характеристики. (M_x, D_x и др.)

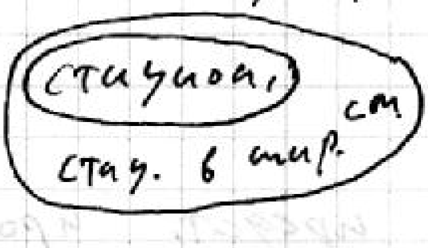
Стационарность СП

Фу-я плотн. вероятн. одинакова при любом t

$$p(x,t_1) = p(x,t_2) = \ldots = p(x,t) = p(x)$$

$$\{\xi(t) - \text{стационарный СП}\} \Rightarrow p(x)$$

Говорят что процесс стационарный „в широком смысле" если M_x и D_x для $\xi(t)$ не зав. от t



Выбор и обраб. результ. практ. измерений, наз. усреднением по ансамблю

Свойства эргодичность

Стац. процесс наз. эргодическим, если его люб. хар (статист. $P(x)$, M_x, D_x; врем или частотная) получ. усреднением по множ. реализаций м.б. получ усреднением по <u>одной</u> реализации

за длит. промеж. времени.

(Усреднение по ансамблю можно

заменять усредн. по времени)

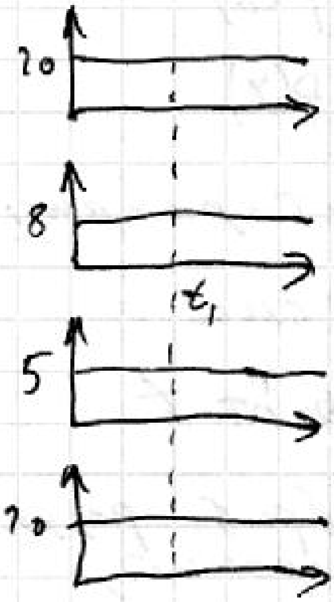
Усреднение по времени оказ.

часто предпочтительней, т. к.

требует <u>одного</u> но длит. экспер.

Пример неэргодич. процесса

Включ. случ. постоянного напряж.



$$\{5; 8; 10\}$$

$$p: \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$$

$$m_x = \frac{5}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} \approx 7{,}67\text{ В}$$

На практ. стараются предст. проц.

эргодическими

Определение P(x) эргодич. случ. процесса

Будем наблюдать в течение дост. долгого $t = T$ одну реализацию эргодического СП

Определим суммарное время пребывания СП внутри некоторого интервала. $(x, x+\Delta x)$

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_N$

$\Delta t(T)$

$$\lim_{t \to T} \underbrace{\frac{\Delta t(T)}{T}}_{\text{относительное время пребывания}} = P(x < \xi \leq \Delta x + x)$$

Отн. врем. пред. сходится к вер. преб. в коридоре.

$$P(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$P_{exp}(x) \leftrightarrows P(x) \Leftarrow T\uparrow \; \Delta x\downarrow$

время экспер $\uparrow$ — точность измерителя $\uparrow$

Э. С. П.

$x(t)$ - случ. сигнал.

<u>Определение статист. хар.</u>

<u>для Э.С.П.</u>

Опр. $P(x)$ Э.С.П. может оказатся трудоёмким, но точное знание $P(x)$ требуется далеко не всегда.

m_x D_x

$\langle x \rangle$ - усредн. по времени.

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \leftarrow$$ пост. составляющая

$$\langle x(t)\rangle = X_{=} = m_x = \bar{X}$$

$$\langle x^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt$$ - полная ср. мощность СП

$$\langle x^2(t)\rangle = \nu_2$$

$$x(t) = \underbrace{X_{=}}_{\text{пост. сост.}} + \underbrace{X_{\sim}(t)}_{\text{перем. сост.}}$$

104

$$\langle x_\sim^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_\sim^2(t)\,dt$$ – ср. мощн. перем. составл.

$$D_2 = \overline{x^2} = \bar{x}^2 + D_x$$

$$\langle x^2(t)\rangle = (\langle x(t)\rangle)^2 + \langle x_\sim^2(t)\rangle$$

$$D_x = \langle x_\sim^2(t)\rangle$$

$$D_x = P_{cp.} - P_= = P_{cp} - (\bar{x})^2$$

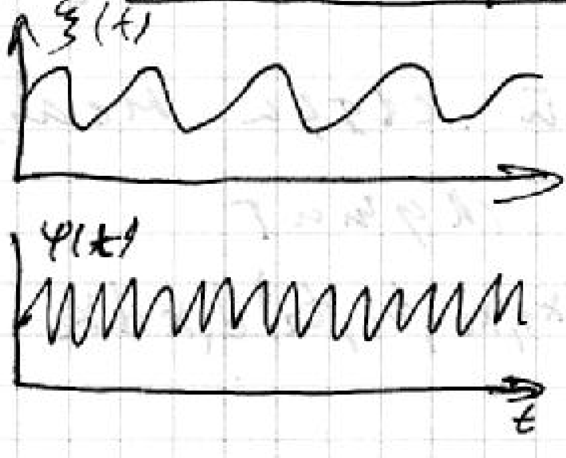
$$P_{cp}$$

$$P_\sim + P_=$$

$$\bar{x}^2 \qquad D_x$$

$$m_x^2$$

Врем. хар. случ. процессов



$P_\xi(x)$
$||$
$P_\varphi(x)$

Несмотря на то, что в некот. момент врем. знач. случ. процесса случайно (м.б. опис. с пом. P(x)) между знач. в разн. мом. врем есть закономерность их появл.

Колич. связь между знач. в разных мом. врем. анализ.
с помощью двумерной плотн. вероятн.

$P(x_1, x_2, t_1, t_2)$

$\xi(x_1)$ $\xi(x_2)$

Двумерная ПВ несёт информ. больше чем одномерная

На практи огран. двумерной ПВ

СП стацион. $\Rightarrow$ $P(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(x_1, x_2, \tau)$
$\tau = t_2 - t_1$

Упрощенной мерой связи между знач. $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ служит

$$R(t_1, t_2) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \, p(x_1, x_2, t_1, t_2) \, dx_1 dx_2$$

$\xi(t)$ - стацион.

$$R(\tau) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \, p(x_1, x_2, \tau) \, dx_1 dx_2$$

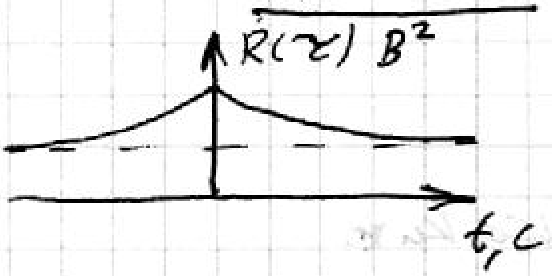
$\xi(t)$ - эргодич.

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t-\tau) dt$$

Корелляционная ф-я СП

106

КФ СП



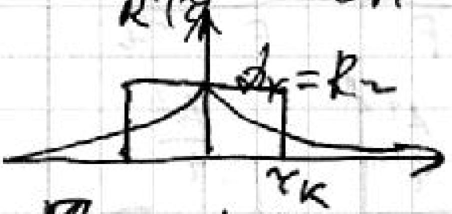
1) Симметрия (четная) $R(\tau)=R(-\tau)$

2) $R(0)=P_{ср}=\max\limits_{\tau} R(\tau)$

3) $\tau\to\infty$ ост. связь пост. сост. с самой собой

$D_x = P_{ср} - P_{=} = R(0)-R(\infty)$

$\xi(t)\Rightarrow \underset{\uparrow\ \text{СП}}{\xi'(t)}=\xi(t)-\bar{x}$



$R'(\infty)=0$

По КФ можно установить время (τ_k) на которое можно делать прогноз поведения СП

$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} R'(\tau)\,d\tau}{2\cdot R'(0)} = \frac{\int_{0}^{+\infty} R'(\tau)\,d\tau}{R'(0)}$$

$$\tau_k=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(R(\tau)-R(\infty)\right)d\tau}{2\cdot\left(R(0)-R(\infty)\right)}$$

Спектральные хар. СП

$x(t) \Leftarrow \xi(t)$ – стац, эрг.

$X(f)=F\{x(t)\}$

$x(t)$ - случ. сигн.

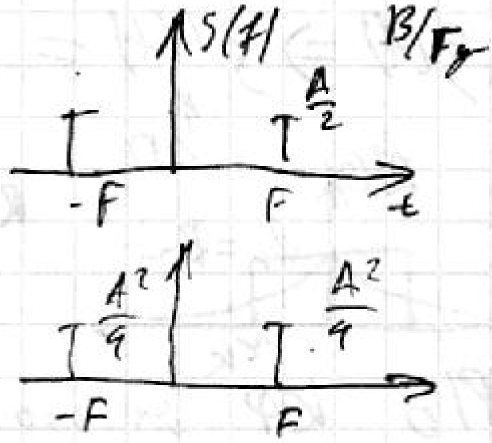
$X(f)$ - случ. спектр.

СПМ - показ. на каких част. соср. спектр пл. мощн.

Распр. мощности по частотам <u>не случайно</u>

Физ. смысл СПМ

$s(t) = A\cos(2\pi F t)$



В отличие от периодич. сигн мощн. непрерыв. сигн. не сосред., а рассеяна в полосе

Сл. сигн. - квазипериодич.

(периодич. с непост. случ. периодом)

W(f) <u>СПМ СП</u>

1) $W(f) \geq 0$

2) $W(f) = W(-f)$

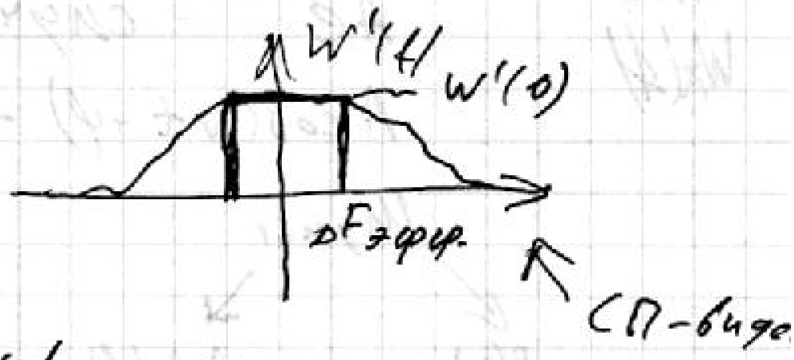
($\xi(t)$ - действ)

3) $\delta(f) \Leftrightarrow$ П.С.

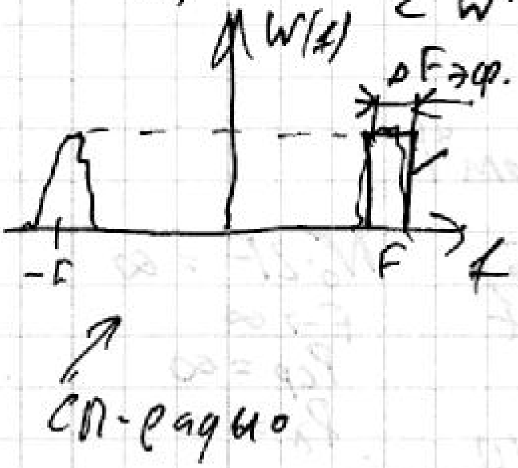
$$P_{ср.} = \bar{x}^2 + D_x$$

$$P_{ср} = \int_{-\infty}^{+\infty} W(f)\,df$$

$\Delta F_{эффект.}$



$$\Delta F_{эф} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W'(f)\,df}{2W'(0)} = \frac{D_x}{2W'(0)}$$



$$\Delta F_{эф} = \frac{\int_{0}^{+\infty} W(f)\,df}{W(F)}$$

Связь КФ и СПМ

$R(\tau) \overset{ПФ}{\Longleftrightarrow} W(f)$ – теорема Винера-Хинчина

$\Delta F_{эф} \cdot \tau_к = \underset{\text{база}}{B} = const$ для типа СП

Лекция 18.05

$p(x)$

$P_x(t)$

$W_x(f)$

СП

шумы — квазидетерм.

$Ae^{-\alpha t}$ - случ. A или α

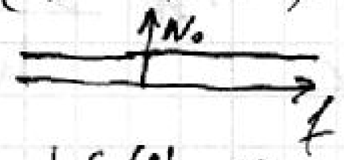
$A\cos(\omega t+\varphi)$ - случ. A или φ

Шумы

$p(x)$ — плотн. вер.

$W_x(f)$ — спектр. плотн. шумов

("белый шум")



$N_0\cdot 2F=\infty$

$F\to\infty$

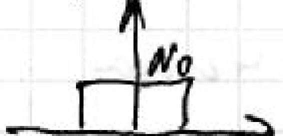
$P_{ср}=\infty$

$P_x=\infty$

$W_x(f)=N_0$

$p(x)\Rightarrow x(t)$ - любое

Шум белый в полосе



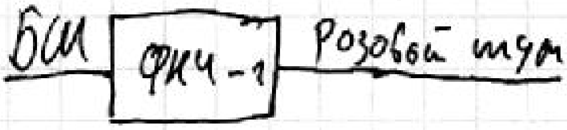
от быстр. случ

безразл. что за пред. полосы ☺

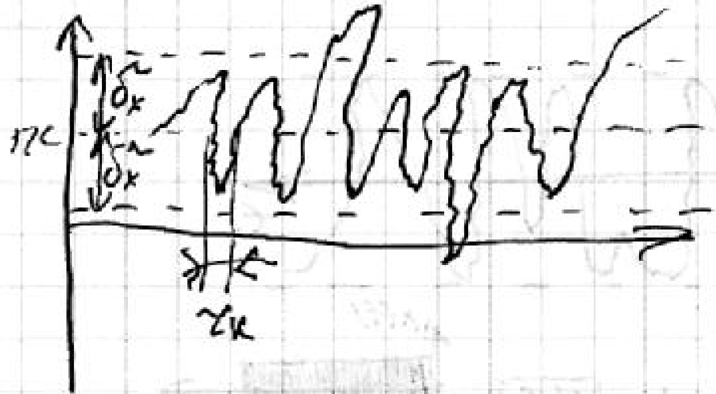
$P_{ср.}=2N_0\cdot F\neq\infty$

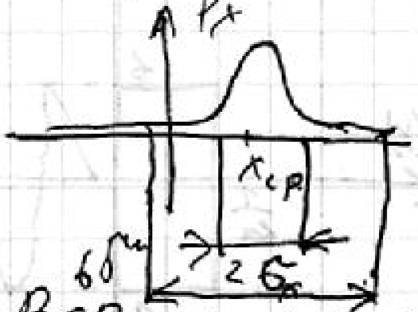
$P_x=2N_0F$

$\Delta F_{раб}<\Delta F$

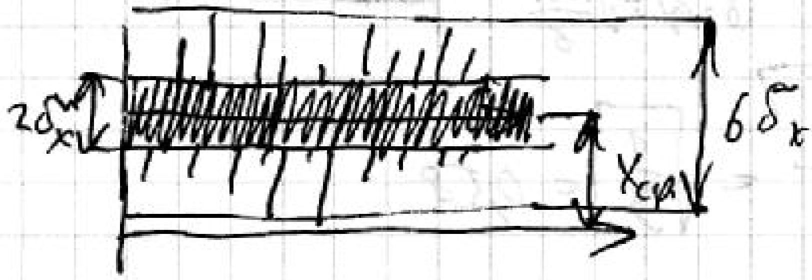


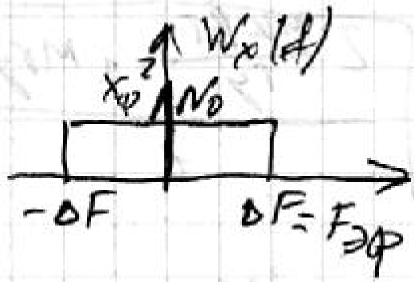
Б.Г.Ш - белый гауссовский шум





Вер. попад. в шумовую дорожку 60%





$\Delta F = 1$ МГц $\qquad P_{ср.}$

$N_0 = 2 \frac{мкВт}{Гц}$

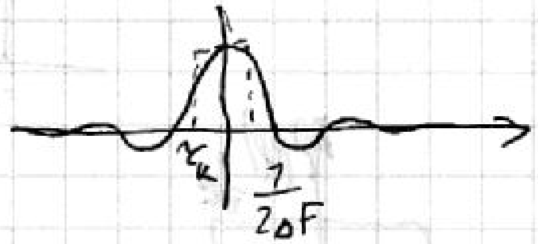
$D_x = \sigma_x^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ Вт

$R = 1$ Ом $\quad D_x = 4$ В^2

$R_x(t) = ОПФ(W_x(f))$

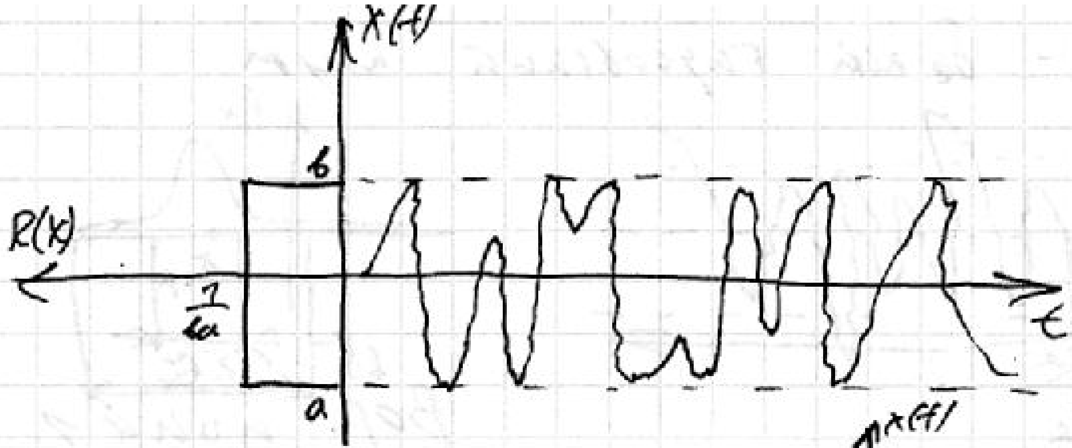
$\tau_k \doteq R_x(t) \to R_x'(t)|_{X_=} = 0$

$\tau_k = \frac{1}{2} \frac{N_0}{2N_0 \Delta F} = \frac{1}{4\Delta F}$

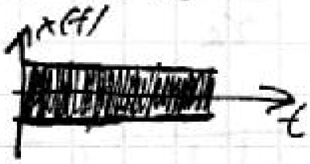


Равномерный белый шум

$W_x(f)$ и $R_x(t)$ - те же что и у Б.Г.Ш.



$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = 2N_0\Delta F \qquad (b-a) = \sqrt{\frac{N_0 F}{6}}$$

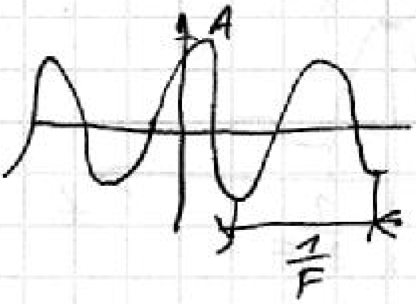


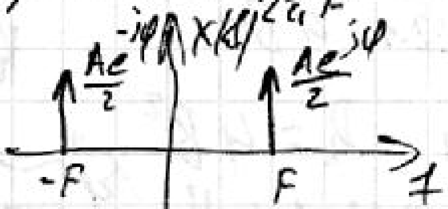
$$\sqrt{\frac{2\,\frac{мкВт}{Гц}\cdot 1\,МГц}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}58$$

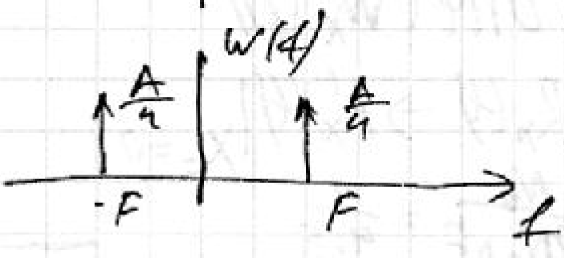
Квази детерминированные процессы

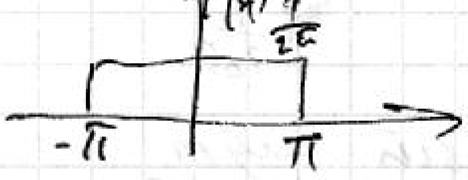
$$x(t) = A\cos(\underbrace{\omega t+\varphi}_{*}) \qquad \varphi - \text{случ.}$$

$$* = 2\pi F(t-\tau) \qquad \tau = -\frac{\varphi}{2\pi F}$$









фикс. t

$t=0$

$x = A\cos(\varphi)$

$$F_\varphi(\varphi) = P(\Phi<\varphi)$$

$$F_\varphi = \int_{-\infty}^{\varphi} p(u)\,du$$

$\varphi = \arccos \frac{x}{A}$

$\varphi = a$

$x = A \cos a$

$0 \le \varphi \le a$

$\Downarrow$

$A\cos(a) \le x \le A$

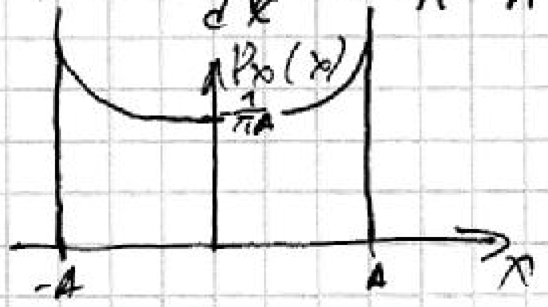
$P(\Phi \le \varphi) = P(X \le x)$

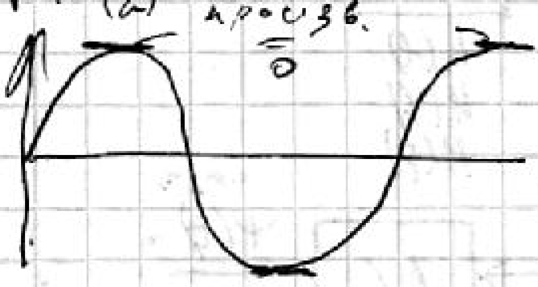
$$F_\varphi(\varphi) = \int_0^{\arccos \frac{x}{a}} \frac{1}{2\pi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\varphi \Big|_0^{\arccos \frac{x}{a}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{x}{A}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x}{a}$$

$$p(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

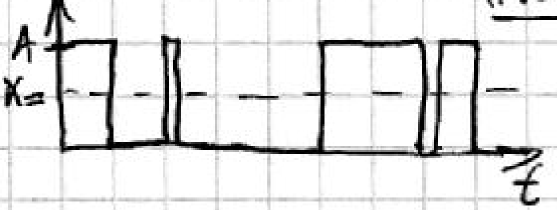




X: $\frac{dx}{dt} = 0$ (плоские участки)

$p(x) \to \infty$

<u>Хаотическая импульсная последовательность (ХИП)</u>

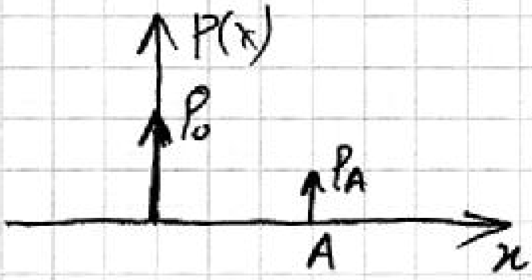


T_{min}, T_{max}

T – время постоянства

$T_{ср.}$

$P(T)$ $\quad p(x) = \begin{cases} 0 \Rightarrow P(x=0) = P_0 \\ A \Rightarrow P(x=A) = P_A \end{cases} \quad P_0 + P_A = 1$

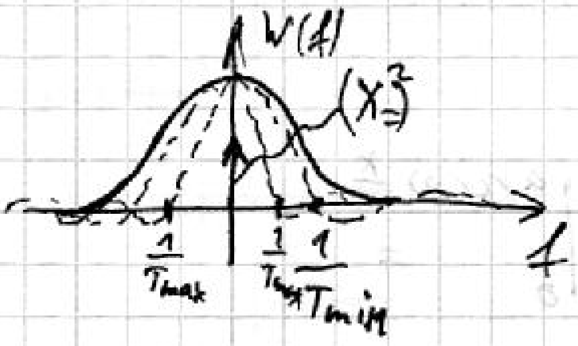


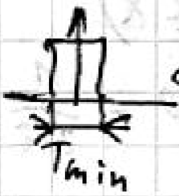
$$X_= = m_x = 0\cdot P_0 + A\cdot P_A = A\cdot P_A$$

$$P_{cp} = \nu_2 = (0)^2 P_0 + A^2 P_A = A^2 P_A$$

$$P_\sim = D_x = \sigma_x^2 = \nu_2 - m_x^2 =$$

$$= P_A A^2 - P_A^2 A^2 = A^2 P_A (1 - P_A) = A^2 P_A P_0$$

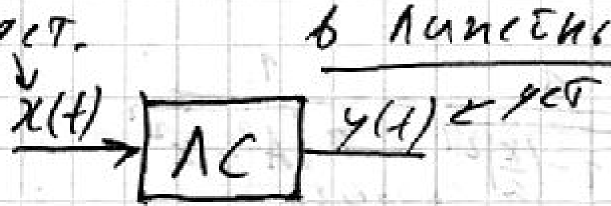




$\Leftrightarrow S(f) = A\cdot T_{min}\,\mathrm{sinc}(\pi f T_{min})$

$W(f) = A^2 T_{min}^2\,\mathrm{sinc}^2(\pi f T_{min})$

Преобразование случ. процессов в линейных цепях (системах)



$h(t)$
$H(f)$
$H(p)$

$P(x)$	$h(t)$	$P(x)$
$W_x(f)$	$H(f)$	$W_y(f)$
$R_x(t)$	$H(p)$	$R_y(t)$

$W_y(f) = W_x(f)\cdot|H(f)|^2 \qquad АЧХ^2 = \underset{ПФМ}{G(f)}$

$R_y(t) = R_x(t)\cdot \underset{\uparrow АКФ\{h(t)\}}{R_h(t)}$

$P(y) = \Pi(p(x))$

частн. случ. — общая закономерность

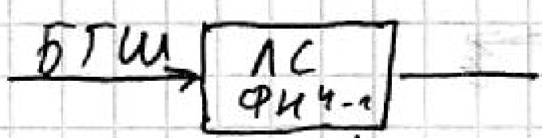
$P(x), H(f)$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta F_{эф}\{W_x(f)\} > \Delta F_{ЛС} \\ P(y) \to \text{Гаусс.}\end{array}}$$

$P(x)$ – Гаусс

$\downarrow$!

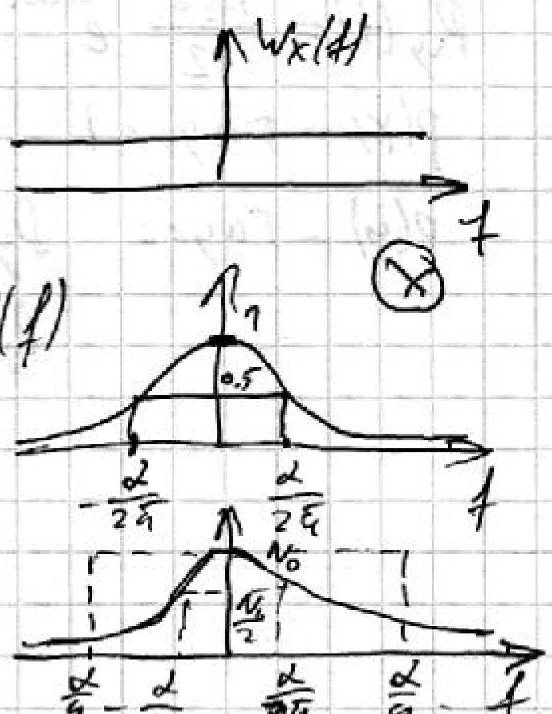
$p(y)$ – Гаусс



$H(p) = \dfrac{\alpha}{p+\alpha}$

$H(f) = \dfrac{\alpha}{\alpha + j2\pi f}$

$|H(f)|^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} = G(f)$



$W_y(f) = \dfrac{N_0 \alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$

$P_{ср.y} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_y(f)\,df$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x}$$

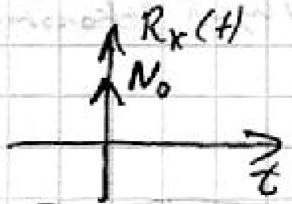
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}}{1 + \left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)^2}\, d\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right) = N_0(\alpha/2\pi)\, \operatorname{arctg} \frac{2\pi f}{\alpha}\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{N_0 \alpha}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{N_0 \alpha}{2\pi} = P_{ср}$$

$$\Delta F_{эф} = \frac{P_{ср.}}{2N_0} = \frac{\alpha}{4}$$

$$R_y(t) = R_x(t) * R_h(t)$$

$$R_x(t) = N_0\,\delta(t)$$



БШГ - не огр. по полосе
δ-корелир. шум

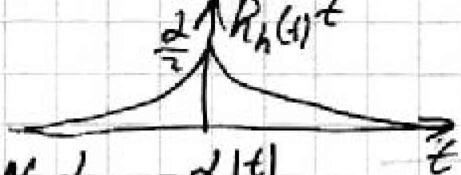
$$R_h(t) = АКФ\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, h(t+\tau)\, dt =$$

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} \cdot u(t)$$

$$= \alpha^2 \int_t^{+\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-\alpha(\tau - t)} =$$

$$= \alpha^2 e^{\alpha t} \int_t^{+\infty} e^{-2\alpha\tau} = \alpha^2 \frac{e^{\alpha t}}{-2\alpha} e^{-2\alpha\tau}\Big|_t^{+\infty} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha t}$$



$$R_y(t) = \frac{N_0 \alpha}{2} e^{-\alpha|t|}$$

$p(x)$ - гаусс

$p(y)$ - гаусс $\quad D_y < D_x$

$$D_y = P_{ср} = \frac{N_0 \alpha}{2}$$

9, 16 - экз.

Лекция 25.05

I Нелинейные преобразования СП

II Шум квантования

III Оптимальная согласованная фильтрация (введение)

IV Сигма-дельта АЦП

(I) $\xrightarrow[p_x(x)]{\xi(t)}$ $\boxed{НЛУ}$ $\xrightarrow[p_Y(y)]{\psi(t)}$

$y = f(x)$

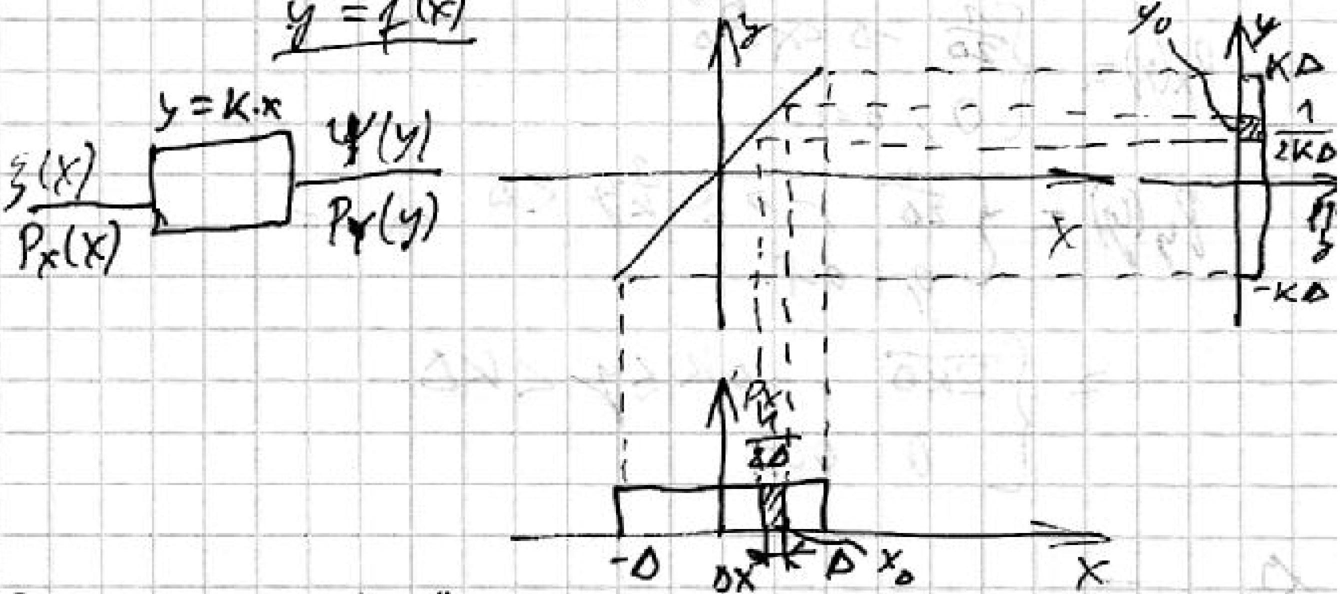
1) $p_x(x) \to p_Y(y)$

2) $R_x(t) \to R_Y(y)$

$W_x(f) \to W_Y(f)$

НЛУ: безынерционное устройство

$y = f(x)$



2 подхода - через ф-ю вероятн

напрямую через производную.

$$\Delta P = P_X(x_0)\Delta X$$

$$\Delta P = P_Y(y_0)\Delta y$$

$$P_X(x_0)\cdot\Delta X = P_Y(y_0)\cdot\Delta y$$

$$P_Y(y) = P_X(X)\frac{\Delta X}{\Delta y}$$

1) $\Delta X \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$

2) $X_0 = X$ (арг.)

3) $x = g(y)$ $\quad (g = f^{-1})$ выраз. x через y

$$\frac{\Delta X}{\Delta y}_{\Delta X\to 0} \Rightarrow f'(X) = \frac{dy}{dX}$$

$$P_Y(y) = \frac{P_X(X)}{f'(X)}\Big|_{x=g(y)}$$

$$P_Y(y) = P_X(g(y))\cdot g'(y)$$

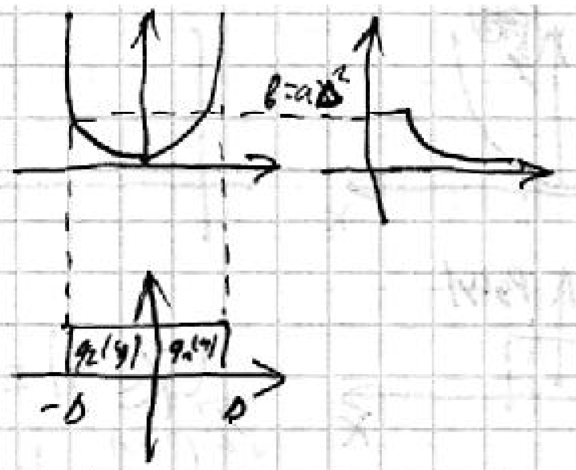
$y = kx \qquad X = \frac{1}{k}y$

$$P_X(X) = \begin{cases} \frac{1}{2D} & -D < x < D \\ 0, & \text{ост.} \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2D}, & -D \le \frac{1}{k}y < D \\ 0, & \text{ост.} \end{cases} \cdot k =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2kD}, & -Dk \le y < kD \\ 0 & \text{ост.} \end{cases}$$

$\xi(t)$, $P_x(x)$ → $\boxed{y = a x^2}$ → $\psi(t)$, $P_y(y)$



$$g_1(y) = \sqrt{\frac{y}{a}}$$

$$g(y) = -\sqrt{\frac{y}{a}}$$

$$P_Y^{(1)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & 0 < x < \Delta \\ 0, & \text{ост.} \end{cases} \Bigg| \cdot g_1'(y) \Bigg|_{x=\sqrt{\frac{y}{a}}} =$$

$$g_1' = \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{a}} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{ay}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & 0 < \sqrt{\frac{y}{a}} < \Delta \\ 0, & \text{ост. } y, \end{cases} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ay}}$$

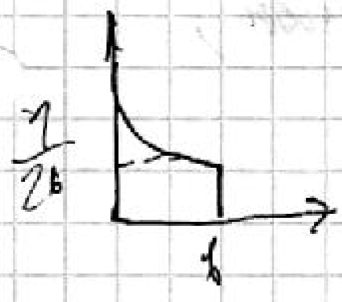
$$\begin{cases} \frac{1}{4\Delta\sqrt{ay}} & 0 < y < a\Delta^2 \\ 0 & , \text{ост.} \end{cases}$$

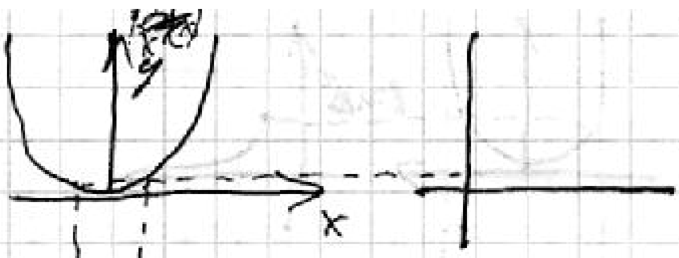
Аналог. $g_2(y)$

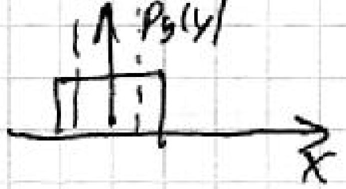
$$P_Y^2(y) = P_Y^1(y)$$

$$P_{y\,\text{общ.}} = P_Y^1(y) + P_Y^2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta\sqrt{ay}} & 0 < y < a^2\Delta \\ 0, \text{ ост.} & \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{by}}, \quad 0 \le y \le b$$





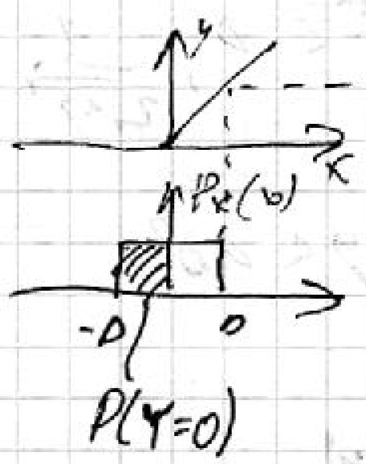


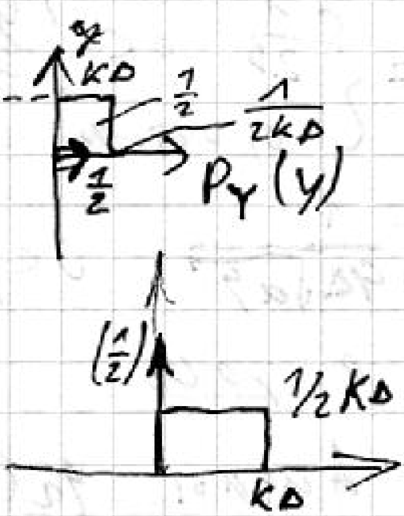
$$P(Y \le y) = F_Y(y) = P\left(-\sqrt{\tfrac{y}{a}} < X < \sqrt{\tfrac{y}{a}}\right) = \int_{-\sqrt{\frac{y}{a}}}^{\sqrt{\frac{y}{a}}} \frac{1}{2\Delta}\,dx = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{y}{a}}$$

$$P_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dt} = \frac{1}{2\Delta\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{by}} \quad 0 < y < b$$

Н.Э. с отсечкой

$$y = \begin{cases} kx & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$





Самост.: гауссовский импульс.

<u>УОС + СП</u>

<u>Шум квантования</u>

Квантование – УС может прин. не любые знач. из непрерывн., а только дискретные.

$[U_{min}, U_{max}]$ $\quad U_{min} = -U_{max}$

$K = 2^L$ $\quad L$ - разрядность АЦП

$L \gg 8$

$$\Delta = \frac{U_{max} - U_{min}}{K} = \frac{2U_{max}}{2^L}$$ - шаг квантования

$S[n]$

$$\underbrace{\overset{x_k}{U_{min}} \quad U_{min}+\Delta \quad \cdots \quad U_{max}}_{K-1}$$

$x_k = U_{min} + k\Delta$

$x_0 = U_{min}$

$x_1 = U_{min} + \Delta$

$x_{K-1} = U_{max}$

1) Округление вниз

$x_n \le S \le x_{n+1}$

$\hat{S} = x_n$

2) Округление вверх

$\hat{S} = x_{n+1}$

3) Средняя точка

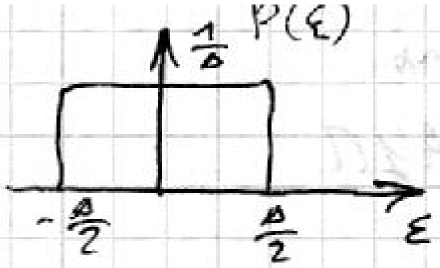
$$\hat{S} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$$

$\hat{S}[n] = S[n] + \varepsilon[n]$

3: ε окр. к ср.

$|\varepsilon[n]| < \frac{\Delta}{2}$

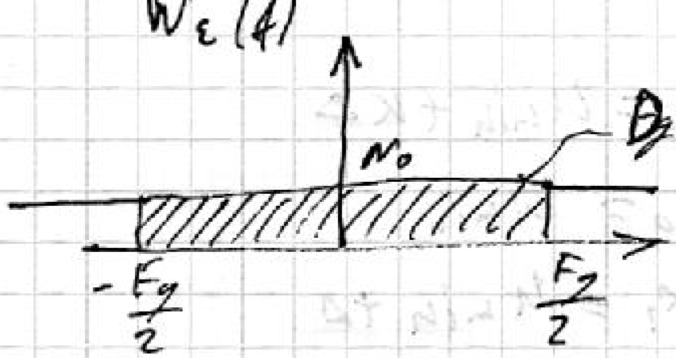
1: $0 < \varepsilon[n] < \Delta$



– равновероятный шум

$\overline{\varepsilon} = 0$

$\overline{P_\varepsilon} = \frac{\Delta^2}{12}$ $\quad \sigma = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}3\Delta$



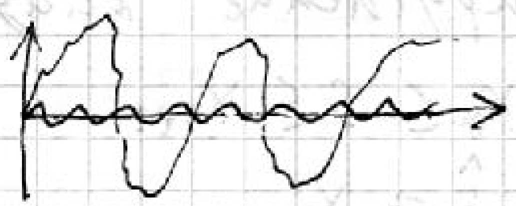
$D = \frac{\Delta^2}{12}$ $\quad N_0 = \frac{P_\varepsilon}{F_д} = \frac{\Delta^2}{12 F_д}$

$N_0\downarrow \Rightarrow \Delta\downarrow \Rightarrow K\uparrow \Rightarrow L\uparrow$
$\Rightarrow F_д\uparrow \Rightarrow T_д$

Динамический диапазон АЦП

$K = const$

$s(t) = u(t) + e(t)$



$U_{max} \leftarrow \max\limits_t |u(t)|$

$\max|e(t)| \approx \Delta = \frac{U_{max}\cdot 2}{K}$

$\frac{U_{max}}{\sigma_\varepsilon} = \frac{U_{max}}{\frac{\Delta}{2\sqrt{3}}} = \frac{\frac{K\Delta}{2}}{\frac{\Delta}{2\sqrt{3}}} = K\sqrt{3} = 2^L\sqrt{3} = Q$ – дин. диапазон.

$Q[дБ] = 20\log_{10}(2^L\sqrt{3}) = 20\lg 2^L + 20\lg\sqrt{3} =$

$= 20\frac{\log_2 2^L}{\log_2 10} + 10\log_{10}3 = 20\frac{L}{\frac{1}{\log_2 10}} =$

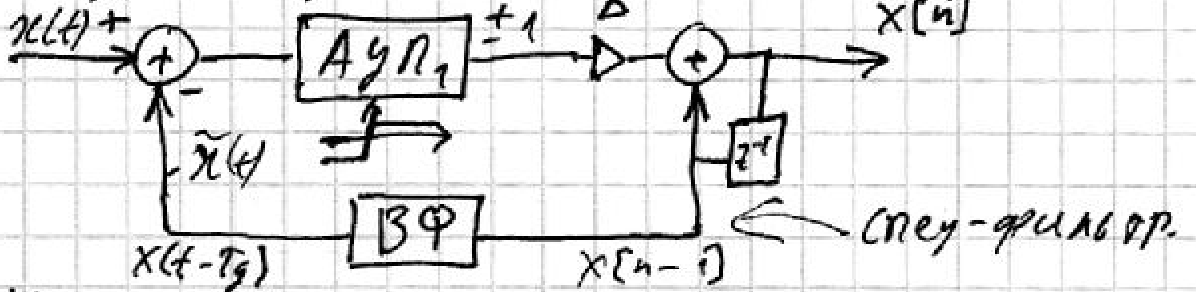
x	lg x
3	0,3
5	0,7

$= 6\cdot L + 4{,}5$ — $6\ \frac{дБ}{разряд}$

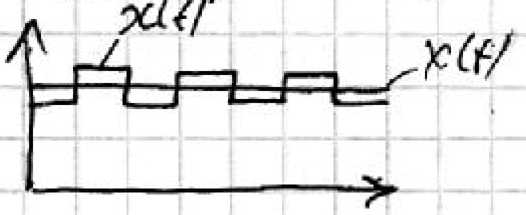
Сигма-дельта АЦП

Σ-Δ АЦП

1 разр F_g — ↑↑↑



Когда режим работы установился



123